ОСНОВАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ

ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

СОЧИНЕНІЕ

В. Я. Буняковскаго,

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ ОРДИНАРНАГО АКАДЕМИКА, ПРОФЕССОРА С. ПЕТЕРБУРГСКАГО УНИВЕРСИТЕТА И ДОКТОРА МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМІИ.

La théorie des probabilités n'est au fond, que le bon sens réduit au calcul.

Il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.

(LAPLACE, *Essai philosophique sur les Probabilités.*)

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ Типографіи Императорской Академіи Наукъ.

1846.

Съ одобренія Императорской Академіи Наукъ.

Въ Августѣ 1846 г.

П. Фусъ
Непремѣнный Секретарь.



ОТЪ СОЧИНИТЕЛЯ.

Аналитическая Теорія Вѣроятностей, входящая въ область Прикладной Математики, существенно отличается отъ другихъ приложеній чистаго анализа. Въ Геометріи и въ предметахъ Естественной Философіи, какъ напримѣръ въ явленіяхъ всеобщаго тяготѣнія, въ теоріи свѣта, тепла, звука, электричества и проч., всѣ изслѣдованія основаны частію на нашихъ понятіяхъ о разныхъ величинахъ дѣйствительно существующихъ, или только воображаемыхъ нами, частію же на законахъ, выведенныхъ изъ опытовъ, или, за недостаткомъ такихъ опытныхъ началъ, на ипотезахъ, болѣе или менѣе правдоподобныхъ. Напротивъ того, Анализъ Вѣроятностей подвергаетъ разсмотрѣнію и численной оцѣнкѣ явленія, зависящія отъ причинъ нетолько совершенно неизвѣстныхъ намъ, но которыя даже, по нашему невѣдѣнію, не подлежатъ никакимъ предположеніямъ. Тонкія, глубокомысленныя умозаключенія, приводящія къ этой цѣли, составляютъ въ совокупности надёжнѣйшій путь если не для открытія безусловной истины, то, по крайней мѣрѣ, для возможнаго приближенія къ ней. И когда примемъ въ соображеніе, что при такомъ важномъ назначеніи, математическое ученіе о вѣроятностяхъ



обнимаетъ въ приложеніяхъ своихъ предметы физическаго и нравственнаго міра, то утвердительно можемъ сказать, что эта теорія есть созданіе ума, наиболѣе возвышающее человѣка, и какъ бы указывающее на предѣлъ вѣдѣній, за который ему не дано перейти.

Предлагаемая нынѣ книга есть первое сочиненіе на Русскомъ языкѣ, заключающее въ себѣ подробное изложеніе какъ математическихъ началъ теоріи вѣроятностей, такъ и важнѣйшихъ ея приложеній къ жизни общественной, къ Естественной Философіи, а равно къ Наукамъ Политическимъ и Нравственнымъ. Послѣдняя, XII Глава, посвящена историческимъ подробностямъ объ постепенномъ развитіи Анализа Вѣроятностей. Въ концѣ книги помѣщено *десять Примѣчаній*, содержанія чисто математическаго; они избавятъ нѣкоторыхъ читателей отъ труда пріискивать въ другихъ трактатахъ или мемуарахъ объясненія разныхъ теорій, часто встрѣчающихся въ Исчисленіи Вѣроятностей. За Примѣчаніями слѣдуетъ *Объясненіе* двухъ полезныхъ таблицъ, прилагаемыхъ къ моему сочиненію, и, наконецъ, *Прибавленіе*, содержащее въ себѣ рѣшеніе одного любопытнаго вопроса. Впрочемъ, отсылаю къ самому Оглавленію, гдѣ можно видѣть подробное указаніе на предметы, которые вошли въ составъ книги.

Скажу нѣсколько словъ о самомъ исполненіи моего труда. Безсмертное твореніе Лапласа: *Théorie analytique des Probabilités* постоянно служило мнѣ образцомъ какъ изящностію употребленнаго въ немъ анализа, такъ и глубокомысліемъ сужденій. Но, вмѣстѣ съ тѣмъ, предлагая многія теоріи, имъ созданныя, я всегда старался упростить по возможности изложеніе и доказательства ихъ, а равно и самый анализъ. Смѣло надѣюсь, математики отдадутъ мнѣ справедливость въ томъ отношеніи, что я значительно облегчилъ изученіе книги Лапласа, которая, по сжатости своей и по свойственнымъ предмету особеннымъ затрудненіямъ, доступна весьма немногимъ. Учёныя изслѣдованія другихъ знаменитыхъ геометровъ, преимущественно *Эйлера*, *Лагранжа* и *Поассона* также были мнѣ полезны. У послѣдняго я заимствовалъ изложеніе математической теоріи Судопроизводства. Относительно другихъ моихъ трудовъ, ограничусь ссылкою на нѣкоторыя критическія замѣчанія, помѣщенныя въ моей книгѣ, а также на измѣненія при выводѣ многихъ формулъ и на перемѣны, которымъ я призналъ полезнымъ подвергнуть въ разныхъ случаяхъ общеупотребляемые аналитическіе пріёмы. Преимущественно обращу вниманіе на Главы VII и X. Читатель самъ замѣтитъ эти измѣненія при внимательномъ чтеніи многихъ статей въ моей книгѣ, и при сличеніи ихъ съ изложеніемъ въ другихъ, извѣстныхъ сочиненіяхъ. Болѣе обширныя изслѣдованія, собственно мнѣ принадлежащія, сопровождаются указаніями въ самомъ текстѣ. Сдѣлаю еще одно замѣчаніе. Такъ какъ до сихъ поръ у насъ не было никакого отдѣльнаго сочиненія, ни даже перевода объ Математической Теоріи Вѣроятностей, то мнѣ предстоялъ трудъ писать на Русскомъ языкѣ о предметѣ, для котораго мы не имѣли установленныхъ употребленіемъ оборотовъ и выраженій. Не смѣю надѣяться, чтобы я создалъ для Анализа Вѣроятностей языкъ, совершенно удовлетворительный по своей простотѣ и опредѣлительности; но, во всякомъ случаѣ, мнѣ пріятна та увѣренность, что я приложилъ всѣ старанія по возможности приблизиться къ этой цѣли.

Окончу изъявленіемъ желанія, чтобы предлагаемое сочиненіе послужило къ распространенію между моими соотечественниками здравыхъ понятій и полезныхъ практическихъ истинъ. И если даже нѣкоторые изъ моихъ читателей не будутъ имѣть достаточнаго математическаго образованія для того чтобы слѣдить за аналитическимъ изложеніемъ всѣхъ теорій, составляющихъ

предметъ Ученія о Вѣроятностяхъ, то и для нихъ внимательное чтеніе моей книги не останется безполезнымъ. Въ ней почерпнутъ они разнообразные, общепримѣнительные результаты, которые покажутъ имъ, въ настоящемъ ихъ свѣтѣ, многіе занимательные вопросы и истины, касающіеся нашей общественной жизни.

ПОДРОБНОЕ СОДЕРЖАНІЕ КНИГИ.

О выборѣ вѣроятнѣйшаго предложенія или причины.

Приложеніе Анализа Вѣроятностей къ Судопроизводству.

Примѣчанія къ математической теоріи вѣроятностей.

ОСНОВАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

ОСНОВАНІЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

ВВЕДЕНІЕ.

Всѣ явленія, представляющіяся намъ какъ въ вещественномъ, такъ и въ нравственномъ мірѣ, подчинены законамъ непреложнымъ, изъ которыхъ, до сихъ поръ, самая незначительная часть сдѣлалась достояніемъ науки. Неизмѣримое поле истинъ открыто передъ философомъ: но каждый новый шагъ на поприщѣ умственной дѣятельности, совершенствуя только какую нибудь отдѣльную отрасль нашихъ знаній, часто требуетъ, по ограниченности ума человѣческаго, усилій необыкновенныхъ. Поэтому, совершенное познаніе природы останется навсегда мечтою; стремленіе къ приблизительному осуществленію этой мечты, достойно назначенія человѣка.

Мы сказали, что всѣ явленія подчинены непреложнымъ законамъ; въ этомъ убѣждаемся внутреннимъ сознаніемъ, что *нѣтъ дѣйствія безъ причины*. «Человѣкъ, одаренный высшимъ разумѣніемъ», говоритъ *Лапласъ*, «постигшій въ опредѣленное время всѣ силы, дѣйствующія на природу, и взаимныя отношенія всѣхъ существъ, наполняющихъ её, заключилъ бы въ одной формулѣ и законы движенія огромнѣйшихъ тѣлъ Вселенной, и полётъ легчайшей пылинки; для высшаго разумѣнія не существовало бы ничего недостовѣрнаго; какъ будущее, такъ и прошедшее было бы передъ нимъ открыто.» Нѣтъ человѣка мыслящаго, который, съ полнымъ внутреннимъ убѣжденіемъ, не сознавалъ бы

справедливости этой основной истины, составляющей начало всѣхъ законовъ природы; и между тѣмъ, сколько умовъ, даже просвѣщенныхъ, которые отвергаютъ прямыя ея слѣдствія. Не видимъ ли мы повседневно, что приписываютъ счастію, слѣпому случаю, неудачѣ и проч. такія явленія или дѣйствія, которыя непосредственно проистекаютъ изъ неизмѣнныхъ, хотя и неизвѣстныхъ намъ причинъ? Прибавимъ даже: нѣкоторыя наши ощущенія находятся въ явномъ противорѣчіи съ понятіями, очищенными отъ всякихъ умственныхъ предразсудковъ; такъ удивленіе, обнаруживаемое нами при какомъ либо событіи, которое, повидимому, выходитъ изъ обыкновеннаго порядка вещей, не противорѣчитъ ли условіямъ здраваго мышленія? Дѣйствительно, допустивъ однажды, что нѣтъ дѣйствія безъ причины, мы тѣмъ самымъ отвергаемъ уже возможность всякаго случая, неподчиненнаго непреложнымъ законамъ, и который бы могъ возбудить наше удивленіе. Нельзя отвергнуть справедливости этого замѣчанія, но вмѣстѣ съ тѣмъ нельзя побѣдить и привычки, часто заставляющей насъ дѣйствовать наперекоръ признаваемой нами истины.

Невѣдѣніе законовъ природы приводитъ насъ, на каждомъ шагу, къ недоумѣнію и нерѣшимости. Мы судимъ о какомъ нибудь явленіи, или событіи, съ цѣлію узнать, случится ли оно или нѣтъ. Если бы всѣ данныя, отъ которыхъ событіе зависитъ, были намъ извѣстны, и если бы сверхъ того мы были одарены умомъ столько проницательнымъ, что могли бы обнять и сообразить взаимныя отношенія всѣхъ этихъ данныхъ, то безошибочно рѣшили бы вопросъ, и могли предсказать появленіе или непоявленіе событія. Но много ли такихъ случаевъ, для которыхъ всѣ данныя намъ извѣстны? Да и допустивъ даже извѣстность этихъ данныхъ, надобно еще, для вывода слѣдствія, подвергнуть ихъ строгому обсужденію и разбору, чего, по ограниченности нашего ума, мы вообще не въ состояніи сдѣлать.

При такой недостаточности средствъ, умъ нашъ, отвлекая неизвѣстныя данныя, и собравъ только тѣ, которыя въ состояніи извлечь непосредственно изъ сущности разсматриваемаго явленія, распредѣляетъ ихъ въ стройномъ порядкѣ, соображаетъ ихъ взаимныя отношенія, и, послѣ строгаго разбора, выводитъ рядъ возможныхъ рѣшеній предложеннаго вопроса. Нѣтъ никакого сомнѣнія, что этотъ рядъ рѣшеній не составитъ полнаго, удовлетворительнаго отвѣта на вопросъ. Отвѣтъ будетъ только условный и не совсѣмъ опредѣленный. Но, если въ найденномъ ряду рѣшеній мы замѣтимъ, что одно событіе повторяется чаще другихъ, то невольнымъ образомъ нашъ умъ остановится на нёмъ; это событіе и будетъ *правдоподобнымъ* рѣшеніемъ вопроса, подходящимъ тѣмъ

ближе къ истинному рѣшенію, чѣмъ обстоятельства или данныя, не принятыя въ расчётъ, малочисленнѣе, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, менѣе значительны по вліянію своему на событіе, появленія котораго мы ожидаемъ. Объяснимъ это примѣромъ: изъ сосуда, заключающаго 5 шаровъ чёрныхъ и 10 бѣлыхъ, вынимаемъ одинъ шаръ; спрашивается, какого цвѣта будетъ вынутый шаръ. Данныя, непосредственно выводимыя изъ вопроса, суть: совокупность 5 шаровъ чёрныхъ и 10 бѣлыхъ; ожидаемое событіе—*цвѣтъ* вынутаго шара; данныя, которыхъ по невѣдѣнію нашему, мы не въ состояніи опредѣлить—взаимное расположеніе бѣлыхъ и чёрныхъ шаровъ въ сосудѣ и образъ движенія руки, вынимающей шаръ. Очевидно, что при такомъ состояніи вопроса, можно предложить только слѣдующее рѣшеніе: если предположимъ, что не существуетъ причины, по которой бы рука могла выдернуть одинъ шаръ преимущественно передъ другимъ, то каково бы ни было первоначальное расположеніе бѣлыхъ и чёрныхъ шаровъ, возможныхъ случаевъ будетъ 15, именно, появленіе по-одиначкѣ, но въ какомъ ни есть порядкѣ, 5-ти чёрныхъ и 10-ти бѣлыхъ шаровъ. Вотъ отвѣтъ, заключающій въ себѣ и условность, и неопредѣленность; рядъ возможныхъ рѣшеній состоитъ здѣсь изъ 15 случаевъ. Если же замѣтимъ, что 10 изъ нихъ ведутъ къ появленію бѣлаго цвѣта, а только 5 къ чёрному, то заключимъ, что появленіе бѣлаго шара правдоподобнѣе вскрытія чёрнаго. По невѣдѣнію всѣхъ необходимыхъ данныхъ, мы не въ состояніи опредѣлительнѣе отвѣчать на вопросъ.

Если бы, вмѣсто 5 шаровъ чёрныхъ и 10 бѣлыхъ, сосудъ заключалъ только 1 шаръ чёрный и 100 бѣлыхъ, то возможныхъ случаевъ было бы 101, именно: появленіе по-одиначкѣ одного шара чёрнаго и ста бѣлыхъ, въ какомъ ни есть порядкѣ. Слѣдовательно, вскрытіе бѣлаго цвѣта было бы правдоподобнѣе вскрытія чёрнаго. Нѣтъ никакого сомнѣнія, что появленіе бѣлаго шара, въ этомъ второмъ предположеніи, будетъ правдоподобнѣе чѣмъ въ первомъ, потому что здѣсь, изъ 101 случая, 100 благопріятствуютъ ожидаемому событію, между тѣмъ какъ въ прежнемъ, изъ 15 возможныхъ случаевъ, имѣли только 10 благопріятствующихъ. Это показываетъ намъ, что правдоподобіе, при различныхъ обстоятельствахъ, можетъ быть болѣе или менѣе значительнымъ, и слѣдовательно оно, какъ всякая математическая величина, подлежитъ измѣренію и допускаетъ мѣру. Мѣра эта, въ математическомъ смыслѣ, называется *вѣроятностію*, а исчисленіе, занимающееся точнымъ ея опредѣленіемъ, — *Анализомъ Вѣроятностей.*

Чтобъ объяснить съ возможною вразумительностію, какимъ образомъ математики измѣряютъ различныя степени вѣроятности, сдѣлаемъ сперва опредѣленіе *достовѣрности*, отъ условной мѣры которой зависитъ и мѣра вѣроятности. Когда человѣкъ сознаетъ съ полною

очевидностію бытіе или небытіе какого либо факта физическаго, умственнаго, или нравственнаго, то въ этомъ сознаніи почерпаетъ увѣренность или *достовѣрность* о существованіи или несуществованіи того факта. Пріобрѣтаемую такимъ путемъ достовѣрность должно считать *безусловною;* дѣйствительно, для познанія истины, человѣкъ не имѣетъ иного средства, кромѣ свидѣтельства внутренняго чувства или способности разума, непосредственно усматривающей согласіе или несогласіе двухъ подлежащихъ понятій. Безусловную достовѣрность называютъ также *математическою* для отличенія ея отъ *нравственной достовѣрности*, которая обнаруживается въ томъ случаѣ, когда нашъ умъ, признавая съ полнымъ внутреннимъ убѣжденіемъ какой либо фактъ, не можетъ однако же утвердить бытіе его неоспоримыми доводами. И такъ, предложеніе: *человѣкъ смертенъ*, представляетъ примѣръ нравственной достовѣрности; никто не усумнится въ истинѣ этого утвержденія, хотя оно, въ умѣ нашемъ, основано только на одной аналогіи. Для человѣка съ умомъ здравымъ, истины, нравственно достовѣрныя, должны имѣть ту же силу, какъ и предложенія, утвержденныя математическою достовѣрностію.

Въ аналитической Теоріи Вѣроятностей *достовѣрность математическую* условились принимать за *единицу*. При такомъ условіи, всякая вѣроятность должна изображаться правильною дробью. Положимъ, что желаемъ опредѣлить вѣроятность какого нибудь событія. Прежде всего, разыскиваемъ всѣ случаи, которые могутъ представиться при данныхъ условіяхъ вопроса, и всѣ эти случаи приводимъ къ *равновозможнымъ*, то есть къ такимъ, въ существованіи которыхъ мы были бы, въ строгомъ смыслѣ, въ одинаковой нерѣшимости. Отбираемъ потомъ статочности, благопріятствующія событію, котораго ищемъ вѣроятность. Число благопріятствующихъ статочностей, раздѣленное на совокупность всѣхъ возможныхъ случаевъ, изобразитъ вѣроятность ожидаемаго событія. И такъ, *мѣрою вѣроятности служитъ дробь, коей числитель равняется числу благопріятствующихъ статочностей, а знаменатель, числу всѣхъ возможныхъ случаевъ.*

При такомъ опредѣленіи мы предполагаемъ, что вѣроятность не измѣнится, когда отношеніе числа благопріятныхъ случаевъ къ числу всѣхъ возможныхъ останется постояннымъ, хотя бы совокупность тѣхъ и другихъ увеличивалась или уменьшалась. Разсудокъ убѣждаетъ насъ въ справедливости этого предположенія: дѣйствительно, отдавая себѣ отчётъ въ нашихъ понятіяхъ объ этомъ предметѣ, мы видимъ, что степень вѣрованія въ какой либо фактъ отнюдь не зависитъ отъ числа утвердительныхъ и отрицательныхъ объ немъ сужденій, но зависитъ единственно отъ относительнаго ихъ числа.

Когда всѣ возможные случаи благопріятствуютъ ожидаемому событію, то дробь, изображающая его вѣроятность, получаетъ значеніе, равное единицѣ, и слѣдовательно обращается въ аналитическое выраженіе достовѣрности. И такъ, въ математическомъ смыслѣ, вѣроятность можетъ быть принимаема за нѣкоторую часть достовѣрности.

На основаніи предложенныхъ здѣсь понятій и опредѣленій, приступаемъ къ изложенію правилъ и самыхъ пріёмовъ Анализа Вѣроятностей. Въ первыхъ шести Главахъ этой книги мы займемся почти исключительно разборомъ тѣхъ случаевъ, когда вѣроятность можетъ быть выведена *a priori* изъ условій вопроса. Остальныя Главы будутъ преимущественно посвящены изслѣдованію законовъ вѣроятности при неопредѣленномъ числѣ статочностей, или, иначе, опредѣленію вѣроятностей *a posteriori*.

ГЛАВА I.

О ЗАКОНАХЪ ВѢРОЯТНОСТИ ВООБЩЕ.

ОБЩІЯ ПРАВИЛА ДЛЯ ОПРЕДѢЛЕНІЯ ВѢРОЯТНОСТИ.

1. Первое начало Теоріи Вѣроятностей составляетъ самое опредѣленіе вѣроятности. Уже сказано во ВВЕДЕНІИ, что *вѣроятность какого либо событія измѣряется дробью, имѣющей числителемъ число статочностей, благопріятствующихъ ожидаемому событію, а знаменателемъ, число всѣхъ возможныхъ случаевъ, къ которымъ приводятъ условія рѣшаемаго вопроса.* И такъ, если изобразимъ чрезъ p вѣроятность событія, чрезъ m число статочностей, благопріятствующихъ ему, а чрезъ n полное число случаевъ, то получимъ

$$p = \frac{m}{n}.$$

Противная вѣроятность, или, вѣроятность что событіе не совершится, выразится дробью

$$\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - p,$$

которая, вмѣстѣ съ предъидущею $p = \frac{m}{n}$, составитъ единицу, или мѣру *достовѣрности*, что и должно быть, потому что изъ двухъ случаевъ, появленія или непоявленія событія, одинъ, непремѣнно, долженъ состояться.

Необходимо замѣтить, что при сдѣланномъ опредѣленіи вѣроятности, всѣ статочности предполагаются равновозможными, о чёмъ было уже упомянуто въ **ВВЕДЕНІИ**; подробнѣе объ этомъ предметѣ будетъ говорено въ N° 2.

Пояснимъ сказанное примѣромъ: положимъ, ищется вѣроятность выдернуть фигуру изъ полной колоды картъ. Такъ какъ въ 52 картахъ находится 12 фигуръ, то заключаемъ, что вопросъ допускаетъ 52 равновозможныя статочности, именно, вскрытіе по-одиначкѣ 52 картъ, а изъ числа этихъ 52 статочностей, только 12, благопріятствующихъ ожидаемому событію — появленію фигуры. Слѣдовательно, искомая вѣроятность будетъ $\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$, а противная ей, или вѣроятность вскрытія простой карты, выразится дробью $\frac{52-12}{52}=\frac{10}{13}$.

Въ этомъ примѣрѣ мы разсматривали только два событія, именно: вскрытіе фигуры и вскрытіе простой карты. Но, случается часто, что по сущности вопроса мы должны принимать въ соображеніе бóльшее число событій. Напримѣръ, если бы искали вѣроятности появленія фигуръ красной и чёрной масти, то нашли бы, что вѣроятность, какъ для той такъ и для другой, равна $\frac{6}{52}=\frac{3}{26}$, а вѣроятность вскрытія простой карты, $\frac{40}{52}=\frac{20}{26}=\frac{10}{13}$. Здѣсь представлялись три возможныя событія: 1) вскрытіе красной фигуры; 2) вскрытіе чёрной фигуры; и 3) вскрытіе простой карты. Сумма $\frac{3}{26}+\frac{3}{26}+\frac{20}{26}$ найденныхъ трехъ вѣроятностей равна 1, какъ и должно быть.

Подобнымъ образомъ найдется, что вѣроятность выдернуть фигуру каждой изъ четырехъ мастей, равна $\frac{3}{52}$, а вѣроятность вскрытія простой карты, $\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$. По смыслу вопроса имѣемъ здѣсь пять возможныхъ событій: появленіе фигуры червонной, бубновой, трефовой и пиковой, и вскрытіе простой карты. Сумма вѣроятностей, относящихся къ этимъ пяти случаямъ, именно $\frac{3}{52}+\frac{3}{52}+\frac{3}{52}+\frac{3}{52}+\frac{40}{52}$, равна, какъ и выше, единицѣ.

2. Когда статочности не всѣ равновозможны, то, чрезъ раздробленіе на другія, онѣ могутъ быть приведены къ равновозможнымъ; потомъ уже, для опредѣленія вѣроятности, поступаютъ какъ показано въ N° 1. Впрочемъ, вмѣсто приведенія неравновозможныхъ случаевъ къ равновозможнымъ, часто выгоднѣе будетъ руководствоваться слѣдующимъ правиломъ:

При неравновозможныхъ статочностяхъ надобно сперва опредѣлить вѣроятность каждой изъ нихъ; потомъ, взявъ сумму вѣроятностей, относящихся къ тѣмъ статочностямъ, которыя благопріятствуютъ ожидаемому событію, получимъ вѣроятность сего послѣдняго.

Для доказательства положимъ, что предложенный вопросъ приводитъ къ неравновозможнымъ случайностямъ

$$A, A', A'', \ldots.$$

благопріятствующимъ ожидаемому событію; пусть будутъ

$$p, p', p'', \ldots$$

соотвѣтствующія имъ вѣроятности. Сверхъ того, вообразимъ, что всѣ статочности $A, A', A'' \ldots$ приведены къ равновозможнымъ, такъ что A состоитъ изъ n равновозможныхъ случаевъ, A' изъ n', A'' изъ n'' и такъ далѣе; положимъ $n+n'+n''+\ldots=N$. Наконецъ, означимъ чрезъ m число случаевъ, благопріятствующихъ статочности A, и чрезъ $m', m'' \ldots$ подобныя числа, соотвѣтствующія статочностямъ $A', A'' \ldots$. Дроби $\frac{m}{N}, \frac{m'}{N}, \frac{m''}{N} \ldots$ соотвѣтственно изобразятъ вѣроятности случайностей $A, A', A'' \ldots$ На такомъ основаніи, рѣшаемый нами вопросъ приведенъ очевидно къ опредѣленію вѣроятности событія, представляющаго $n+n'+n''+\ldots=N$ равновозможныхъ статочностей, изъ числа которыхъ $m+m'+m''+\ldots$ благопріятствуютъ ожидаемому событію. Въ силу N° 1 искомая вѣроятность будетъ

$$\frac{m+m'+m''+\ldots}{N};$$

но

$$\frac{m+m'+m''+\ldots}{N}=\frac{m}{N}+\frac{m'}{N}+\frac{m''}{N}+\ldots,$$

и слѣдовательно

$$\frac{m+m'+m''+\ldots}{N}=p+p'+p''+\ldots$$

Послѣднее равенство есть не иное что, какъ аналитическое выраженіе того правила, которое мы имѣли въ виду доказать.

Объяснимъ сказанное въ этомъ N° примѣромъ. Положимъ, что въ извѣстную игру, называемую *орлянкою*, ищется вѣроятность вскрытія *орла* при двукратномъ бросаніи монеты.

Здѣсь можно разсматривать *три* слѣдующія статочности:

Бросая въ 1-й разъ:	*Бросая во 2-й разъ:*
Орелъ,	*Бросать не нужно;*
Рѣшетка,	*Орелъ;*
Рѣшетка,	*Рѣшетка.*

Если бы эти три статочности были равновозможны, то искомая вѣроятность изобразилась бы дробью $\frac{2}{3}$, потому что двѣ изъ нихъ, именно первая и вторая, ведутъ къ вскрытію *орла*. Но разсмотрѣвъ предметъ повнимательнѣе, увидимъ, что двѣ благопріятствующія статочности не равновозможны. Вѣроятность первой изъ нихъ, т. е. появленія *орла* съ перваго раза, очевидно равняется $\frac{1}{2}$, между тѣмъ какъ вѣроятность второй благопріятствующей статочности: *рѣшетка, орелъ*, будетъ только $\frac{1}{4}$, потому что равновозможныхъ случаевъ четыре, именно:

Орелъ,	*Орелъ;*
Рѣшетка,	*Орелъ;*
Орелъ,	*Рѣшетка;*
Рѣшетка,	*Рѣшетка.*

Сложивъ вѣроятности $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, которыя соотвѣтствуютъ статочностямъ вскрытія *орла*, получимъ для искомой вѣроятности дробь $\frac{3}{4}$.

То же самое нашли бы раздробивъ статочность: *орелъ съ перваго раза* на двѣ другія

Орелъ,	*Орелъ;*
Орелъ,	*Рѣшетка,*

равновозможныя какъ между собою, такъ и съ остальными двумя случаями

Рѣшетка,	*Орелъ;*
Рѣшетка,	*Рѣшетка.*

Такимъ образомъ получили бы *четыре* равновозможныя соединенія:

Бросая въ 1-й разъ:	*Бросая во 2-й разъ:*
Орелъ,	*Орелъ;*
Рѣшетка,	*Орелъ;*
Орелъ,	*Рѣшетка;*
Рѣшетка,	*Рѣшетка,*

изъ числа которыхъ *три* благопріятствуютъ ожидаемому событію; слѣдовательно его вѣроятность будетъ $\frac{3}{4}$, какъ было найдено выше*).

*) *Д'Аламбертъ*, въ *Encyclopédie Méthodique* въ статьѣ *Croix ou pile*, изъявляетъ сомнѣнія на счётъ справедливости обыкновеннаго способа опредѣленія статочностей этой игры, и, разсматривая предметъ съ другой точки, получаетъ, вмѣсто истинной вѣроятности $\frac{3}{4}$, дробь $\frac{2}{3}$. Ошибка его состояла въ томъ, что онъ принималъ равновозможными три соединенія: *орелъ; рѣшетка, орелъ; рѣшетка, рѣшетка*, между тѣмъ какъ вѣроятность перваго изъ нихъ равна $\frac{1}{2}$, а втораго, равно какъ и третьяго, только $\frac{1}{4}$.

3. Часто случается, что событіе, для котораго желаемъ опредѣлить вѣроятность, составлено изъ нѣсколькихъ другихъ событій. Когда сіи послѣднія независимы между собою, то *вѣроятность сложнаго событія равняется произведенію вѣроятностей всѣхъ простыхъ*. Дѣйствительно, положимъ, что событіе A составлено изъ событій A', A'' A'''....; пусть будутъ p, p', p'', p'''.... вѣроятности, соотвѣтствующія A, A', A'', A'''...; сверхъ того, изобразимъ чрезъ n', n'', n'''.... совокупность равновозможныхъ, а чрезъ m', m'', m'''.... совокупность благопріятствующихъ простымъ событіямъ A', A'', A'''.... статочностей; дроби

$$\frac{m'}{n'},\ \frac{m''}{n''},\ \frac{m'''}{n'''}\ldots.$$

соотвѣтственно изобразятъ вѣроятности

$$p',\ p'',\ p'''\ldots.$$

Но съ другой стороны очевидно, что полное число равновозможныхъ статочностей будетъ равно произведенію $n'n''n'''$....; дѣйствительно, отъ соединенія каждаго изъ n' случаевъ съ каждымъ изъ n'', произойдетъ $n'n''$ статочностей; потомъ, каждая изъ $n'n''$ статочностей соединится съ каждымъ изъ n''' случаевъ, что доставитъ $n'n''n'''$ статочностей, и такъ далѣе. Точно такимъ образомъ увидимъ, что число статочностей, благопріятствующихъ событію A, опредѣлится произведеніемъ $m'm''m'''$.... Поэтому, вѣроятность сложнаго событія A изобразится дробью

$$p = \frac{m'm''m'''\ldots}{n'n''n'''\ldots} = \frac{m'}{n'}\cdot\frac{m''}{n''}\cdot\frac{m'''}{n'''}\cdots\ ;$$

но мы видѣли выше, что

$$\frac{m'}{n'} = p',\quad \frac{m''}{n''} = p'',\quad \frac{m'''}{n'''} = p'''\ldots;$$

слѣдовательно

$$p = p'\cdot p''\cdot p'''\ldots,$$

сообразно съ приведеннымъ сей-часъ правиломъ.

Для поясненія этого правила, рѣшимъ слѣдующую весьма простую задачу:

Имѣемъ два сосуда, которые, для сокращенія рѣчи, изобразимъ нумерами 1 и 2. Въ n° 1 находится 12 шаровъ: 5 бѣлыхъ и 7 чёрныхъ, а въ n° 2, 19 шаровъ: 11 бѣлыхъ и 8 чёрныхъ. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что вынувъ на-удачу по одному шару изъ каждаго сосуда, оба будутъ бѣлые?

Сличимъ условія этого частнаго вопроса съ общими означеніями, которыя мы сей-часъ употребили.

Сложное событіе A будетъ совокупное появленіе двухъ бѣлыхъ шаровъ изъ двухъ сосу-

довъ. Сложное событіе A разлагается на два простыя A' и A''; первое изъ нихъ состоитъ въ появленіи бѣлаго шара изъ сосуда n° 1, а второе, въ появленіи бѣлаго же шара изъ сосуда n° 2.

Пусть будутъ p, p' и p'' вѣроятности, соотвѣтствующія событіямъ A, A' и A''. Для опредѣленія вѣроятности p' стоитъ только замѣтить, что изъ 12 шаровъ, находящихся въ сосудѣ n° 1, имѣемъ 5 бѣлыхъ; поэтому $p' = \frac{5}{12}$. Точно такимъ образомъ найдемъ $p'' = \frac{11}{19}$. Слѣдовательно, въ силу предложеннаго выше правила, искомая вѣроятность совокупнаго появленія двухъ бѣлыхъ шаровъ, будетъ

$$p = \frac{5}{12} \cdot \frac{11}{19} = \frac{55}{228}.$$

Въ справедливости этого вывода весьма легко удостовѣриться непосредственнымъ опредѣленіемъ какъ полнаго числа возможныхъ случаевъ, такъ и всѣхъ статочностей, благопріятствующихъ появленію двухъ бѣлыхъ шаровъ. Дѣйствительно, такъ какъ каждый изъ 12 шаровъ сосуда n° 1 можетъ выдернуться съ каждымъ изъ 19 шаровъ сосуда n° 2, то число всѣхъ возможныхъ случаевъ изобразится произведеніемъ 12.19 = 228. Съ другой стороны, число статочностей, приводящихъ къ совокупному появленію двухъ бѣлыхъ шаровъ, опредѣлится произведеніемъ 5.11 = 55, потому что каждый изъ 5 бѣлыхъ шаровъ сосуда n° 1 можетъ выдернуться съ каждымъ изъ 11 бѣлыхъ же шаровъ сосуда n° 2. Раздѣляя число благопріятствующихъ случаевъ на число всѣхъ возможныхъ, получимъ, какъ и выше, дробь $\frac{55}{228}$ для искомой вѣроятности.

Замѣтимъ, что вѣроятность сложнаго событія, для сокращенія рѣчи, часто называютъ *сложною вѣроятностію*, въ противоположность *простой вѣроятности*, относящейся къ простому событію.

Когда сложное событіе состоитъ изъ повторенія одного и того же простаго, то сложная вѣроятность выражается степенью. Дѣйствительно, пусть будетъ p вѣроятность сложнаго, а p' вѣроятность простаго событія, которое, положимъ, должно повториться m разъ. Въ силу доказаннаго правила будетъ

$$p = p'.p'.p'.... = p'^m.$$

Напримѣръ, еслибы желали опредѣлить вѣроятность трехъ-кратнаго вскрытія орла при трехъ-кратномъ бросаніи монеты, то замѣтивъ, что вѣроятность простаго событія, именно, появленія орла съ перваго раза, равна $\frac{1}{2}$, заключили бы, что искомая вѣроятность равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

4. Когда сложное событіе составлено изъ двухъ простыхъ, зависящихъ одно отъ другаго, то *сложная вѣроятность опредѣляется произведеніемъ вѣроятности перваго событія на вѣроятность втораго, вычисленную въ томъ предположеніи, что первое простое событіе дѣйствительно состоялось.*

И въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ A сложное событіе, состоящее изъ двухъ простыхъ A' и A''. Изобразимъ чрезъ n число всѣхъ возможныхъ случаевъ, относящихся къ A, и предположимъ, что изъ этого числа, m' статочностей благопріятствуютъ появленію событія A'. Дробь $\frac{m'}{n}$ изобразитъ вѣроятность событія A'.

Опредѣлимъ теперь вѣроятность втораго событія A'', допустивъ что первое A' состоялось. Ясно, что для этого надобно изъ всѣхъ статочностей m' отобрать тѣ случаи, которые благопріятствуютъ событію A''; если означимъ чрезъ m число этихъ случаевъ, то $\frac{m}{m'}$ изобразитъ вѣроятность событія A'' въ сдѣланномъ сей-часъ предположеніи. Произведеніе найденныхъ двухъ простыхъ вѣроятностей будетъ

$$\frac{m'}{n} \cdot \frac{m}{m'} = \frac{m}{n}.$$

Но, легко видѣть, что дробь $\frac{m}{n}$ изображаетъ вѣроятность сложнаго событія A; дѣйствительно, знаменатель ея n есть число всѣхъ возможныхъ случаевъ, а числитель m, совокупность благопріятствующихъ этому событію статочностей, что̀ очевидно, ибо, допустивъ существованіе событія A', получаемъ m случаевъ, приводящихъ къ A'', и слѣдовательно то̀ же число случаевъ для совокупнаго существованія двухъ простыхъ событій A' и A'', или, одного сложнаго A.

Опредѣлимъ по этому правилу вѣроятность выдернуть двѣ простыя карты изъ полной колоды, предполагая, что первая выдернутая карта откладывается въ сторону. Такъ какъ въ колодѣ 40 простыхъ картъ, то вѣроятность перваго простаго событія, т. е. появленія простой карты въ первый разъ, будетъ $\frac{40}{52}$. Теперь надобно предположить, что въ первый разъ дѣйствительно выдернулась простая карта, и, въ этомъ предположеніи, искать вѣроятность втораго простаго событія, именно, вскрытія простой карты при второмъ пріемѣ. Но всѣхъ картъ числомъ 51, простыхъ 39, а фигуръ 12; поэтому вѣроятность появленія простой карты будетъ $\frac{39}{51}$. Слѣдовательно, искомая сложная вѣроятность выразится произведеніемъ $\frac{40}{52} \cdot \frac{39}{51} = \frac{10}{17}$.

Вообще, сколько бы не было простыхъ событій A', A'', A''', A^{IV}...., зависящихъ одни отъ другихъ, *сложная вѣроятность будетъ равняться произведенію* $p'.p''.p'''.p^{IV}$...

всѣхъ простыхъ ихъ вѣроятностей, вычисленныхъ при слѣдующихъ условіяхъ: вѣроятность p'' *опредѣляется предположивъ, что событіе* A′ *совершилось;* p''', *что* A′ *и* A″ *совершились;* p^{IV}, *что* A′, A″ *и* A‴ *совершились, и такъ далѣе.*

5. Если примемъ, что сложное событіе состоитъ изъ случившагося уже событія, которое назовемъ *наблюденнымъ*, и нѣкотораго другаго, еще несовершившагося, или *будущаго*, то правило, изложенное въ предъидущемъ нумерѣ, выразится въ такомъ видѣ:

Вѣроятность сложнаго событія опредѣляется произведеніемъ вѣроятности наблюденнаго событія, на вѣроятность будущаго, вычисленную въ томъ предположеніи, что наблюденное событіе дѣйствительно совершилось.

Изъ этого начала выводимъ, какъ слѣдствіе, новое правило, относящееся къ опредѣленію вѣроятностей будущихъ событій посредствомъ вѣроятностей наблюденныхъ:

Вѣроятность будущаго событія, выводимая изъ наблюденнаго, равняется отношенію вѣроятности сложнаго событія, опредѣленной непосредственно, къ вѣроятности наблюденнаго событія, также вычисленной a priori.

6. Иногда, по смыслу вопроса, ищется величина одной вѣроятности въ отношеніи къ другой. Въ такомъ случаѣ искомая вѣроятность называется *относительною*, и она опредѣляется на основаніи слѣдующаго правила:

При сравненіи двухъ какихъ нибудь событій A *и* B, *относительная вѣроятность перваго равна абсолютной или безусловной его вѣроятности, раздѣленной на сумму абсолютныхъ же вѣроятностей обоихъ событій.*

Когда имѣемъ въ виду сравнить два событія A и B съ цѣлію узнать, которое изъ нихъ правдоподобнѣе, и въ какой именно мѣрѣ, то въ такомъ случаѣ очевидно не слѣдуетъ уже принимать въ расчётъ другія событія, къ которымъ можетъ привести вопросъ. Означимъ чрезъ N число всѣхъ равновозможныхъ статочностей, доставляемыхъ условіями задачи, а чрезъ m и n числа случаевъ, соотвѣтственно благопріятствующихъ событіямъ A и B. Дроби $\frac{m}{N}$ и $\frac{n}{N}$ изобразятъ абсолютныя вѣроятности сихъ послѣднихъ. Съ другой стороны, такъ какъ изъ числа N всѣхъ статочностей, только $m+n$ благопріятствуютъ событіямъ A и B, именно, m первому изъ нихъ, а n, второму, то относительныя вѣроятности ихъ будутъ

$$\frac{m}{m+n} \text{ и } \frac{n}{m+n}.$$

Эти дроби, написанныя въ видѣ

$$\frac{m}{m+n} = \frac{\frac{m}{N}}{\frac{m}{N}+\frac{n}{N}}, \quad \frac{n}{m+n} = \frac{\frac{n}{N}}{\frac{m}{N}+\frac{n}{N}},$$

выражаютъ правило, предложенное выше для опредѣленія относительной вѣроятности.

Легко распространить этотъ выводъ на какое ни есть число сравниваемыхъ событій. Во всякомъ случаѣ, *относительная вѣроятность какого либо событія будетъ равна абсолютной его вѣроятности, раздѣленной на сумму абсолютныхъ же вѣроятностей всѣхъ сравниваемыхъ событій.*

Положимъ, напримѣръ, что бросая разомъ двѣ обыкновенныя игральныя кости, желаемъ сравнить между собою вѣроятности вскрытія 8 очковъ преимущественно передъ вскрытіемъ 5 очковъ. Опредѣляемъ сперва абсолютныя вѣроятности этихъ двухъ случайностей. Такъ какъ каждая кость есть правильный шестигранникъ или кубъ, на граняхъ котораго написаны нумера 1, 2, 3, 4, 5, 6, то совокупное ихъ бросаніе можетъ привести къ 36 случаямъ, ибо каждый нумеръ одной кости можетъ выпасть съ каждымъ нумеромъ другой, почему и получится 6.6 = 36 соединеній. Изъ числа этихъ 36 соединеній, 5 ведутъ къ вскрытію 8 очковъ, а 4, къ вскрытію 5 очковъ, что усматривается изъ слѣдующей таблицы:

Къ 8 очкамъ:

1-я кость.	2-я кость.
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2

Къ 5 очкамъ:

1-я кость.	2-я кость.
1	4
2	3
3	2
4	1

Слѣдовательно, абсолютныя вѣроятности вскрытія 8 и 5 очковъ будутъ $\frac{5}{36}$ и $\frac{4}{36}$. Вѣроятность вскрытія 8 очковъ, преимущественно передъ 5-ю, или относительная вѣроятность перваго предположенія, по приведенному выше правилу, будетъ

$$\frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36}+\frac{4}{36}} = \frac{5}{9},$$

а противная ей вѣроятность, относящаяся къ вскрытію 5-ти, а не 8-ми очковъ, опредѣлится дробью

$$\frac{\frac{4}{36}}{\frac{5}{36}+\frac{4}{36}} = \frac{4}{9}.$$

Въ этомъ примѣрѣ мы сравнивали между собою только два случая: вскрытіе 8 или 5 очковъ; вскрытіе же очковъ: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11 и 12 мы вовсе не принимали въ расчётъ. Поэтому, рѣшенный вопросъ, при допущенныхъ условіяхъ, представлялъ только два возможныя событія, и сумма ихъ вѣроятностей, то есть $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$, какъ и слѣдовало, нашлась равною единицѣ.

Общія формулы для вычисленія вѣроятности при повтореніи и при какомъ ни есть совокупленіи событій.

7. Въ N° 3 мы видѣли какимъ образомъ опредѣляется вѣроятность сложныхъ событій. Теперь разсмотримъ этотъ предметъ съ возможною подробностію, и предложимъ общія формулы для вычисленія вѣроятности при повтореніи событій и при извѣстномъ ихъ совокупленіи.

Положимъ сперва, что вопросъ приводитъ къ двумъ событіямъ A и B, изъ которыхъ то̀ или другое непремѣнно должно совершиться. Пусть будетъ a число статочностей, благопріятствующихъ событію A, а b то̀ же самое въ разсужденіи B. Такъ какъ число всѣхъ статочностей есть $a+b$, и всѣ онѣ предполагаются равновозможными, то дроби

$$\frac{a}{a+b} \text{ и } \frac{b}{a+b}$$

изобразятъ соотвѣтственно простыя вѣроятности событій A и B.

Допустимъ теперь, что послѣ перваго испытанія, которое привело насъ къ тому или другому изъ двухъ событій, мы производимъ второе испытаніе. Оно приведетъ насъ также къ A или къ B. Поэтому, разсматривая результаты обоихъ испытаній въ совокупности, мы будемъ приведены къ одной изъ слѣдующихъ равновозможныхъ случайностей:

При 1-омъ испытаніи: *При 2-омъ испытаніи:*

A . . . . A или B

B . . . . A или B,

которыхъ числомъ будетъ четыре, именно:

$$AA, \quad AB, \quad BA, \quad BB;$$

вѣроятности этихъ сложныхъ событій, въ силу N° 3, опредѣлятся дробями:

Для AA . . . . $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$

Для AB . . . . $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)^2}$

Для BA . . . . $\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)^2}$

Для BB . . . . $\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{b^2}{(a+b)^2}$.

Если условимся не принимать въ расчётъ порядка, въ которомъ событія A и B слѣдуютъ одно за другимъ, то совокупленія AB и BA составятъ для насъ одно и то̀ же сложное событіе, вѣроятность котораго очевидно выразится суммою

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} = \frac{2ab}{(a+b)^2}$$

двухъ вѣроятностей, относящихся къ AB и BA; въ этомъ удостовѣряемся непосредственно замѣтивъ, что число статочностей, благопріятствующихъ совокупленію событій A и B, будетъ $ab+ba=2ab$, а число всѣхъ возможныхъ случаевъ, $(a+b)^2$. На такомъ основаніи, вѣроятности сложныхъ событій

$$AA, \quad AB, \quad BB,$$

изобразятся соотвѣтственно дробями

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}, \quad \frac{2ab}{(a+b)^2}, \quad \frac{b^2}{(a+b)^2},$$

сумма которыхъ, какъ и должно быть, равна единицѣ. Замѣтимъ также, что числители этихъ трехъ дробей суть не иное что̀, какъ послѣдовательные три члена разложенія

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$

Приступаемъ къ третьему испытанію. Совокупность произведенныхъ трехъ испытаній приведетъ насъ къ одному изъ слѣдующихъ равновозможныхъ случаевъ:

1-ое испытаніе: *2-ое испытаніе:* *3-ье испытаніе:*

A . . . . $\begin{cases} A \text{ . . . . } A \text{ или } B \\ B \text{ . . . . } A \text{ или } B \end{cases}$

B . . . . $\begin{cases} A \text{ . . . . } A \text{ или } B \\ B \text{ . . . . } A \text{ или } B \end{cases}$

которыхъ, какъ легко видѣть, будетъ восемь, а именно:

$$AAA, \quad AAB, \quad ABA, \quad ABB, \quad BAA, \quad BAB, \quad BBA, \quad BBB;$$

вѣроятности сихъ сложныхъ событій изобразятся по порядку дробями (N° 3):

$$\frac{a^3}{(a+b)^3}, \quad \frac{a^2b}{(a+b)^3}, \quad \frac{a^2b}{(a+b)^3}, \quad \frac{ab^2}{(a+b)^3}, \quad \frac{a^2b}{(a+b)^3}, \quad \frac{ab^2}{(a+b)^3}, \quad \frac{ab^2}{(a+b)^3}, \quad \frac{b^3}{(a+b)^3}.$$

Если, какъ и выше, не будемъ обращать вниманія на порядокъ послѣдованія событій, то вмѣсто восьми найденныхъ совокупленій, получимъ только четыре, которыя приводимъ здѣсь вмѣстѣ съ относящимися къ нимъ вѣроятностями:

$$\text{Для } AAA \ \ldots\ldots \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a^3}{(a+b)^3}$$

$$\text{Для } AAB \ \ldots\ldots 3\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{3a^2b}{(a+b)^3}$$

$$\text{Для } ABB \ \ldots\ldots 3\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{3ab^2}{(a+b)^3}$$

$$\text{Для } BBB \ \ldots\ldots \frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{b^3}{(a+b)^3}.$$

И такъ, при трехъ-кратномъ повтореніи испытаній, изъ которыхъ каждое приводитъ къ событію A или B, вѣроятность что событіе A повторится три раза, равна $\frac{a^3}{(a+b)^3}$; вѣроятность что A случится два раза, а B одинъ разъ, равна $\frac{3a^2b}{(a+b)^3}$; вѣроятность, что A случится одинъ разъ, а B два раза, равна $\frac{3ab^2}{(a+b)^3}$; наконецъ, вѣроятность трехъкратнаго повторенія B, равна $\frac{b^3}{(a+b)^3}$. Замѣтимъ и здѣсь, что сумма четырехъ дробей, опредѣляющихъ вѣроятности сложныхъ событій AAA, AAB, ABB, BBB, равна единицѣ, и что числители ихъ изображаютъ послѣдовательные члены разложенія

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Сказанное здѣсь о двухъ и трехъ испытаніяхъ, легко распространить на общій случай. Дѣйствительно, руководствуясь извѣстными правилами для опредѣленія числа соединеній, усмотримъ, что совокупность всѣхъ сложныхъ событій, получаемыхъ по совершеніи m испытаній, или, что всё равно, число *сочетаній съ повтореніемъ* двухъ буквъ A и B, взятыхъ по-m, равняется 2^m. Если же условимся не отличать между собою тѣхъ сложныхъ событій, которыя различествуютъ однимъ порядкомъ послѣдованія простыхъ событій, то, вмѣсто числа 2^m, получимъ только $m+1$ соединеній, потому что рядъ сложныхъ событій будетъ

$$A^m,\quad A^{m-1}B,\quad A^{m-2}B^2,\ \ldots.\ AB^{m-1},\quad B^m.$$

Первый членъ A^m соотвѣтствуетъ предположенію, что каждое изъ m испытаній привело къ событію A; второй членъ, что изъ того же числа m испытаній, $m-1$ привели къ A, а одно только къ B; третій, что $m-2$ испытанія привели къ A, а два къ B, и такъ далѣе, независимо отъ порядка послѣдованія событій.

Основываясь на теоріи соединеній, легко опредѣлить число статочностей, благопріятствующихъ сложнымъ событіямъ A^m, $A^{m-1}B$, $A^{m-2}B^2, \ldots.$ Возьмемъ въ этомъ ряду

общій членъ $A^{m-n}B^n$, выражающій $(m-n)$-кратное появленіе событія A, и n-кратное повтореніе событія B при m испытаніяхъ. Число случаевъ, приводящихъ къ сложному событію $A^{m-n}B^n$, по совершеніи m испытаній, очевидно будетъ равняться числу перестановленій двухъ буквъ A и B, изъ которыхъ первая повторяется $m-n$ разъ, а вторая n разъ. Это число перестановленій, или, что̀ всё равно, число случаевъ, ведущихъ къ событію $A^{m-n}B^n$, опредѣляется, какъ извѣстно, формулою

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3.\ldots(m-n).1.2.3.\ldots n} = \frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ \ldots n}.$$

Но число статочностей, благопріятствующихъ каждому событію $A^{m-n}B^n$, есть $a^{m-n}b^n$ (N° 3), и какъ сверхъ того число самыхъ событій равно

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots(m-n+1)}{1.2.3.\ldots n},$$

то отсюда и слѣдуетъ, что искомое число статочностей, благопріятствующихъ сложному событію $A^{m-n}B^n$, будетъ

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ (m-n+1)}{1.2.3\ \ldots n}\,a^{m-n}b^n; \tag{1}$$

раздѣляя это выраженіе на число всѣхъ возможныхъ статочностей, то есть на $(a+b)^m$, получимъ вѣроятность событія $A^{m-n}B^n$, которая поэтому равна дроби

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.2.3.\ldots n}\cdot\frac{a^{m-n}b^n}{(a+b)^m}. \tag{2}$$

Выраженіе (1) есть не иное что̀, какъ общій членъ разложенія двучленнаго количества $(a+b)^m$; слѣдовательно, число статочностей, благопріятствующихъ сложнымъ событіямъ

$$A^m,\quad A^{m-1}B,\quad A^{m-2}B^2,\ldots.\ A^{m-n}B^n,\ldots.\ AB^{m-1},\quad B^m,$$

изобразится послѣдовательными членами разложенія

$$(a+b)^m = a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ \ldots n}a^{m-n}b^n+\ldots+mab^{m-1}+b^m, \tag{3}$$

а вѣроятности этихъ же самыхъ событій, членами формулы

$$\left.\begin{aligned}\frac{(a+b)^m}{(a+b)^m} = 1 = \frac{a^m}{(a+b)^m}+m.\frac{a^{m-1}b}{(a+b)^m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{a^{m-2}b^2}{(a+b)^m}+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{m-n}b^n}{(a+b)^m}+\ldots+m.\frac{ab^{m-1}}{(a+b)^m}+\frac{b^m}{(a+b)^m}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

8. Сказанное въ предъидущемъ N° легко распространить на случай какого ни есть числа событій. Положимъ, напримѣръ, что имѣемъ три простыя событія A, B, C; пусть будетъ a число статочностей, благопріятствующихъ событію A, а b и c то̀ же самое въ разсужденіи B и C. Дроби

$$\frac{a}{a+b+c},\quad \frac{b}{a+b+c},\quad \frac{c}{a+b+c}$$

изобразятъ простыя вѣроятности разсматриваемыхъ трехъ событій. Допустимъ, какъ въ № 7, что производимъ m испытаній сряду, и не принимаемъ въ расчётъ порядка послѣдованія простыхъ событій A, B, C. Въ этомъ предположеніи, и на основаніи соображеній подобныхъ тѣмъ, которыя привели насъ къ формулѣ (3), мы увидимъ, что число статочностей, благопріятствующихъ сложнымъ событіямъ

$$A^m,\quad A^{m-1}B,\quad A^{m-1}C,\quad A^{m-2}BC\ldots,$$

опредѣлится послѣдовательными членами разложенія

$$(a+b+c)^m = a^m + ma^{m-1}b + ma^{m-1}c + m(m-1)a^{m-2}bc + \ldots,$$

а вѣроятности сихъ самыхъ событій, членами ряда

$$\frac{(a+b+c)^m}{(a+b+c)^m} = 1 = \frac{a^m}{(a+b+c)^m} + m\cdot\frac{a^{m-1}b}{(a+b+c)^m} + m\cdot\frac{a^{m-1}c}{(a+b+c)^m} + m(m-1)\cdot\frac{a^{m-2}bc}{(a+b+c)^m} + \ldots$$

Такъ какъ общій членъ разложенія $(a+b+c)^m$ есть

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(1.2.3\ldots\lambda)\,(1.2.3\ldots\mu)\,(1.2.3\ldots\nu)}\cdot a^\lambda b^\mu c^\nu,\quad \text{гдѣ } \lambda+\mu+\nu = m,$$

то заключаемъ, что число статочностей, благопріятствующихъ какому угодно сложному событію $A^\lambda B^\mu C^\nu$, опредѣлится формулою

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(1.2.3\ldots\lambda)\,(1.2.3\ldots\mu)\,(1.2.3\ldots\nu)}\cdot a^\lambda b^\mu c^\nu,$$

а вѣроятность его, выраженіемъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(1.2.3\ldots\lambda)\,(1.2.3\ldots\mu)\,(1.2.3\ldots\nu)}\cdot\frac{a^\lambda b^\mu c^\nu}{(a+b+c)^m}.$$

И вообще, положимъ, что разсматриваемъ сколько угодно простыхъ событій $A, B, C, D\ldots$ Пусть будетъ a число статочностей, благопріятствующихъ событію A при каждомъ испытаніи, а b, c, $d\ldots$ тò же самое въ отношеніи къ B, C, $D\ldots$. На основаніи предъидущаго окажется, что если изобразимъ чрезъ m число всѣхъ испытаній, то для сложнаго событія $A^\lambda B^\mu C^\nu D^\varrho\ldots$, гдѣ $\lambda+\mu+\nu+\varrho+\ldots = m$, будемъ имѣть слѣдующіе результаты: число перестановленій буквъ $A, B, C, D, \ldots$, изъ которыхъ первая повторяется λ разъ, вторая μ разъ, третья ν разъ, четвертая ϱ разъ, и такъ далѣе, или, что всё равно, число случаевъ, ведущихъ къ событію $A^\lambda B^\mu C^\nu D^\varrho\ldots$, опредѣлится коэффиціентомъ при $a^\lambda b^\mu c^\nu d^\varrho\ldots$ въ разложеніи $(a+b+c+d+\ldots)^m$. Этотъ коэффиціентъ будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(1.2.3\ldots\lambda)\,(1.2.3\ldots\mu)\,(1.2.3\ldots\nu)\,(1.2.3\ldots\varrho)\ldots}.\qquad(5)$$

Число статочностей, благопріятствующихъ тому же сложному событію, опредѣлится произведеніемъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(1.2.3\ldots\lambda)\,(1.2.3\ldots\mu)\,(1.2.3\ldots\nu)\,(1.2.3\ldots\varrho)\ldots}\cdot a^\lambda b^\mu c^\nu d^\varrho\ldots,\qquad(6)$$

а вѣроятность его, дробью

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(1.2.3\ldots\lambda)\,(1.2.3\ldots\mu)\,(1.2.3\ldots\nu)\,(1.2.3\ldots\varrho)\ldots}\cdot\frac{a^\lambda b^\mu c^\nu d^\varrho\ldots}{(a+b+c+d+\ldots)^m}.\qquad(7)$$

9. Если бы желали опредѣлить, какъ велика вѣроятность, что какое либо простое событіе A случится *не менѣе* даннаго числа l разъ при опредѣленномъ числѣ m испытаній, то для этого, въ силу № 2, слѣдовало бы взять сумму вѣроятностей всѣхъ тѣхъ сложныхъ событій, въ которыхъ A, при m испытаніяхъ, повторяется не менѣе l разъ. И такъ, вѣроятность, что въ m испытаній, первое изъ двухъ событій A и B случится *не менѣе* $m-1$ разъ, изобразится совокупностію первыхъ двухъ членовъ формулы (4), то есть суммою

$$\frac{a^m}{(a+b)^m} + m\cdot\frac{a^{m-1}b}{(a+b)^m}.$$

Дѣйствительно, число статочностей, благопріятствующихъ $(m-1)$-кратному повторенію событія A, есть $ma^{m-1}b$ по формулѣ (3); сверхъ того, первый членъ a^m той же формулы изображаетъ число статочностей, приводящихъ m разъ къ событію A; но какъ этотъ послѣдній случай нисколько не противорѣчитъ условію, что событіе A повторяется *не менѣе* $m-1$ разъ, то и заключаемъ, что полное число статочностей, приводящихъ къ повторенію событія A *не менѣе* $m-1$ разъ, въ m испытаній, будетъ

$$a^m + ma^{m-1}b,$$

а поэтому вѣроятность разсматриваемой случайности выразится дробью

$$\frac{a^m+ma^{m-1}b}{(a+b)^m} = \frac{a^m}{(a+b)^m} + m\cdot\frac{a^{m-1}b}{(a+b)^m}.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ, что вѣроятность повторенія того же событія A не менѣе $m-2$ разъ, въ m испытаній, будетъ

$$\frac{a^m}{(a+b)^m} + m\cdot\frac{a^{m-1}b}{(a+b)^m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{a^{m-2}b^2}{(a+b)^m}.$$

Вообще, вѣроятность повторенія событія A *не менѣе* $m-n$ разъ, или, что всё равно, вѣроятность повторенія событія B *не болѣе* n разъ, въ m испытаній, опредѣлится формулою

$$\frac{a^m}{(a+b)^m} + m\cdot\frac{a^{m-1}b}{(a+b)^m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{a^{m-2}b^2}{(a+b)^m} + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{m-n}b^n}{(a+b)^m}.\qquad(8)$$

Замѣтимъ, что когда простыя вѣроятности событій A и B равны между собою, т. е. когда $a=b$, то эта формула обращается въ слѣдующую:

$$\frac{1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}}{2^m}.$$

Можно еще предложить себѣ слѣдующій вопросъ: опредѣлить вѣроятность, что въ m испытаніяхъ, событіе A повторится *не менѣе* n разъ, а событіе B, *не менѣе* k разъ, полагая, разумѣется, $n+k<m$. Изъ сказаннаго выше, усматриваемъ непосредственно, что искомая вѣроятность выразится совокупностію тѣхъ членовъ ряда (4), въ которыхъ степень количества a не менѣе n, и, въ одно время, степень величины b, не менѣе k. Поэтому искомая вѣроятность опредѣлится формулою:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2.3.\ldots k}\cdot\frac{a^{m-k}b^k}{(a+b)^m}+\frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{1.2.3\ldots(k+1)}\cdot\frac{a^{m-k-1}b^{k+1}}{(a+b)^m}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^nb^{m-n}}{(a+b)^m}. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) этого N° легко могутъ быть распространены на случай сколькихъ угодно событій. Такъ какъ вся эта теорія основана на весьма простомъ разложеніи степени многочленнаго количества, то мы считаемъ излишнимъ входить въ дальнѣйшія подробности по этому предмету.

ПРИЛОЖЕНІЕ ПРЕДЫДУЩИХЪ ФОРМУЛЪ КЪ ЧИСЛЕННОМУ РѢШЕНІЮ НѢКОТОРЫХЪ ВОПРОСОВЪ.

10. Для поясненія общихъ формулъ, выведенныхъ въ предыдущей статьѣ, приводимъ здѣсь нѣсколько легкихъ численныхъ примѣровъ.

ВОПРОСЪ 1. *Какъ велика вѣроятность, что бросивъ монету* 10 *разъ сряду, орелъ вскроется* 7 *разъ, и слѣдовательно* рѣшетка *только* 3 *раза*?

Очевидно, что этотъ вопросъ рѣшается посредствомъ формулы (2) [N° 7]. Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ могутъ представиться только два равновозможные случая — вскрытіе *орла* или *рѣшетки*, — то и должно быть $a=b=1$; сверхъ того, по условію задачи, число испытаній $m=10$. Если положимъ, что величина a, изображающая въ общей формулѣ число статочностей, благопріятствующихъ событію A, относится здѣсь къ вскрытію *орла*, то найдемъ $m-n=7$, или $n=3$. И такъ, употребляя формулу (2), получимъ для искомой вѣроятности слѣдующую дробь:

$$\frac{10.9.8}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{15}{128}.$$

11. ВОПРОСЪ II. *Снимаемъ* 8 *разъ сряду полную колоду картъ; найти вѣроятность трехъ-кратнаго вскрытія фигуры.*

Полное число статочностей въ этомъ примѣрѣ равно 52, изъ числа которыхъ 12 благопріятствуютъ появленію фигуры, а 40, вскрытію простой карты; слѣдовательно $a=12$, $b=40$. Число испытаній $m=8$, и какъ $m-n=3$, то найдется $n=5$. При такихъ данныхъ, и на основаніи формулы (2), получимъ для искомой вѣроятности дробь

$$\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{12^3.40^5}{52^8}=\frac{2^8.3^3.5^5.7}{13^8},$$

которая, легко видѣть, заключается между $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{5}$.

12. ВОПРОСЪ III. *Найти число различныхъ расположеній картъ въ пикетной игрѣ.*

Пикетъ играется вдвоемъ въ 32 карты. Каждому игроку сдается по 12 картъ; изъ остальныхъ 8 картъ, называемыхъ *прикупными*, 5 откладываются въ сторону для того, ктò въ рукѣ, а 3 для сдающаго. Изъ сказаннаго въ N° 8 легко заключить, что при такихъ условіяхъ, искомое число различныхъ расположеній 32 картъ, разлагаемыхъ на 4 купы, изобразится коэффиціентомъ при произведеніи $a^{12}b^{12}c^5d^3$ въ разложеніи степени

$$(a+b+c+d)^{32}.$$

На основаніи формулы (5) [N° 8], этотъ коэффиціентъ будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots32}{(1.2\ldots12)(1.2\ldots12)(1.2.3.4.5)(1.2.3)};$$

по сокращеніи, онъ приметъ видъ

$$2^7.3^4.5^2.7^2.13^2.17.19.23.29.31 = 1\ 592\ 814\ 947\ 068\ 800.$$

Значительность этого числа несомнѣнно показываетъ, что всѣ соединенія картъ, свойственныя условіямъ пикетной игры, далёко еще не истощились. Впрочемъ, легко увѣриться въ этомъ посредствомъ самаго простаго ариѳметическаго вычисленія. Положимъ, что народонаселеніе Европы простирается до 200 милліоновъ жителей, изъ которыхъ сотая часть играетъ день и ночь въ пикетъ; сверхъ того допустимъ, что каждая игра продолжается не болѣе 2 минутъ. При такихъ условіяхъ, для истощенія вышенайденнаго числа соединеній, потребовалось бы слишкомъ 6 тысячь лѣтъ, да и то предполагая, что ни одно изъ вскрывшихся уже соединеній не повторилось въ другой разъ. Но какъ изобрѣтеніе карточной игры относятъ къ концу XIV-го вѣка, почему давность ея не восходитъ даже до 500 лѣтъ, то смѣло можно заключить, что въ пикетной игрѣ существуютъ милліоны милліоновъ такихъ распредѣленій картъ, которыя нетолько до сихъ поръ не представлялись, да и не представятся еще въ теченіи нѣсколькихъ тысячь лѣтъ.

13. ВОПРОСЪ IV. *Снимаемъ* 5 *разъ сряду полную колоду картъ; найти вѣроятность, что вскроется фигура по крайней мѣрѣ* 2 *раза.*

Для рѣшенія этой задачи слѣдуетъ употребить формулу (8) [N° 9]. Здѣсь, какъ и въ вопросѣ N° 11, $a=12$, $b=40$. Число испытаній $m=5$; величина n опредѣляется изъ условія $m-n=2$, откуда $n=3$. И такъ, искомая вѣроятность будетъ

$$\frac{12^5}{52^5}+5\cdot\frac{12^4.40}{52^5}+10\cdot\frac{12^3.40^2}{52^5}+10\cdot\frac{12^2.40^3}{52^5}=\frac{3^5+5.3^4.10+10.3^3.10^2+10.3^2.10^3}{13^5}=\frac{121293}{371293}.$$

Легко видѣть, что найденная дробь болѣе $\frac{1}{4}$ и менѣе $\frac{1}{3}$.

14. ВОПРОСЪ V. *При семикратномъ бросаніи монеты, опредѣлить вѣроятность вскрытія* орла *не менѣе двухъ, а* рѣшетки *не менѣе трехъ разъ.*

Для рѣшенія этой задачи должно употребить формулу (9) [N° 9]. Данныя будутъ: $a=b=1$; $m=7$; $n=2$; $k=3$. Подставляя эти значенія въ упомянутую формулу, найдемъ для искомой вѣроятности слѣдующую величину:

$$35\cdot\frac{1}{2^7}+35\cdot\frac{1}{2^7}+21\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{91}{128}.$$

Такъ какъ дробь $\frac{91}{128}$ чувствительнымъ образомъ превышаетъ $\frac{1}{2}$, то заключаемъ, что вскрытіе орла не менѣе двухъ разъ, а рѣшетки не менѣе трехъ разъ, при семикратномъ бросаніи монеты, есть случайность довольно правдоподобная.

Вскрытіе орла и вмѣстѣ рѣшетки по крайней мѣрѣ по три раза, при семикратномъ же бросаніи монеты, есть случай менѣе правдоподобный чѣмъ предъидущій; дѣйствительно, вѣроятность его, равная суммѣ $35\cdot\frac{1}{2^7}+35\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{70}{128}$, хотя и превышаетъ $\frac{1}{2}$, но вмѣстѣ съ тѣмъ менѣе чѣмъ $\frac{91}{128}$.

Вѣроятность, что при семикратномъ бросаніи монеты, орелъ вскроется 3 раза, а рѣшетка 4 раза, равна дроби $35\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{35}{128}$. Такъ какъ $\frac{35}{128}<\frac{1}{2}$ и даже $<\frac{1}{3}$, то заключаемъ, что сбыточность этого послѣдняго случая довольно сомнительна.

15. ВОПРОСЪ VI. *Найти сколько разъ должно бросить кость, чтобы вѣроятность вскрытія опредѣленнаго нумера, напримѣръ 6-ти, равнялась данному числу, положимъ* $\frac{1}{2}$.

Простая вѣроятность вскрытія нумера 6, равна $\frac{1}{6}$. Если изобразимъ чрезъ m неизвѣстное число, означающее сколько разъ должно бросить кость для того, чтобы вѣроятность появленія нумера 6 равнялась $\frac{1}{2}$, то по формулѣ (8) [N° 9] найдемъ для искомой вѣроятности сумму

$$\frac{1}{6^m}+m\cdot\frac{5}{6^m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{5^2}{6^m}+\ldots+m\cdot\frac{5^{m-1}}{6^m}.$$

И дѣйствительно, здѣсь, какъ и въ N° 9, можно разсматривать два событія: первое, появленіе нумера 6; вѣроятность этой случайности равна $\frac{1}{6}$; второе, появленіе одного изъ нумеровъ 1, 2, 3, 4 и 5, не дѣлая между ними никакого различія; вѣроятность этой второй случайности очевидно изобразится дробью $\frac{5}{6}$.

Уравнивъ дроби $\frac{1}{2}$ предъидущее значеніе вѣроятности, получимъ равенство, изъ котораго должно будетъ опредѣлить m. Но, замѣтивъ что

$$\frac{1}{6^m}+m\cdot\frac{5}{6^m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{5^2}{6^m}+\ldots+m\cdot\frac{5^{m-1}}{6^m}=1-\frac{5^m}{6^m},$$

найдется просто

$$1-\frac{5^m}{6^m}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$\left(\frac{5}{6}\right)^m=\frac{1}{2}.$$

Взявъ логариѳмы обѣихъ частей, получимъ

$$m\,log\left(\frac{5}{6}\right)=log\left(\frac{1}{2}\right),$$

и наконецъ

$$m=\frac{log 2}{log 6-log 5}=\frac{0,3010300}{0,0791825}=4-\frac{187000}{791825}.$$

Такъ какъ $m<4$, то и заключаемъ, что при четырехъ-кратномъ бросаніи кости, должно считать болѣе правдоподобнымъ однократное вскрытіе нумера 6, чѣмъ непоявленіе этого очка.

Вычисляя по той же формулѣ (8) вѣроятность вскрытія нумера 6, по крайней мѣрѣ одинъ разъ при четырехъ-кратномъ бросаніи кости, найдемъ, что эта вѣроятность равна

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296};$$

такъ какъ дробь $\frac{671}{1296}$ превышаетъ $\frac{1}{2}$, то заключаемъ, какъ и выше, что появленіе нумера 6 въ разсматриваемомъ случаѣ можно считать правдоподобною случайностію.

16. ВОПРОСЪ VII. *Найти сколько разъ должно бросить двѣ кости при томъ условіи, чтобы вѣроятность вскрытія* двѣнадцати очковъ, *или, что всё равно, одновременнаго появленія нумера* 6 *на обѣихъ костяхъ, равнялась* $\frac{1}{2}$.

Примемъ за простое событіе вскрытіе двухъ опредѣленныхъ нумеровъ при совокупномъ бросаніи двухъ костей. Вѣроятность появленія двѣнадцати очковъ, при первомъ бросаніи, очевидно выразится дробью $\frac{1}{36}$, а противная вѣроятность будетъ $\frac{35}{36}$. Означимъ чрезъ m, какъ и въ предъидущемъ N°, неизвѣстное число послѣдовательныхъ бросаній. Въ силу формулы (8) [N° 9] вѣроятность, что въ m пріёмовъ выпадетъ по крайней мѣрѣ одинъ разъ 12 очковъ, выразится суммою

$$\frac{1}{36^m}+m\cdot\frac{35}{36^m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{35^2}{36^m}+\ldots+m\cdot\frac{35^{m-1}}{36^m},$$

или, что всё равно, разностію

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^m.$$

Эта вѣроятность, по условію задачи, должна равняться $\frac{1}{2}$; слѣдовательно

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^m=\frac{1}{2},$$

или

$$\left(\frac{36}{35}\right)^m=2,$$

откуда

$$m=\frac{\log 2}{\log 36-\log 35}=\frac{0.3010300}{0,0122345}=24,60.$$

И такъ, при 24-кратномъ бросаніи двухъ костей, вскрытіе двѣнадцати очковъ менѣе вѣроятно чѣмъ противное событіе, а при 25-кратномъ бросаніи, напротивъ того, вскрытіе 12 очковъ дѣлается болѣе вѣроятнымъ, чѣмъ невскрытіе ихъ.

Кавалеръ *Мере*, болѣе извѣстный своими сношеніями съ первостепенными математиками XVII столѣтія, чѣмъ собственными познаніями въ точныхъ наукахъ, предложилъ вопросъ, рѣшенный въ этомъ N°, знаменитому *Паскалю*. Кавалеръ Мере сильно возставалъ противъ приведеннаго сей-часъ рѣшенія, и утверждалъ, что 24-хъ бросаній двухъ костей достаточно для того, чтобы получить бо́льшую вѣроятность вскрытія 12 очковъ, чѣмъ для невскрытія. Онъ основывалъ свое утвержденіе на слѣдующемъ, весьма ошибочномъ сужденіи: доказано, что вѣроятность вскрытія нумера 6 превышаетъ $\frac{1}{2}$ при четырехъ-кратномъ бросаніи одной кости, представляющей при каждомъ пріёмѣ только 6 равновозможныхъ статочностей; но какъ бросаніе двухъ костей приводитъ къ 36, т. е. къ 6×6 равновозможнымъ статочностямъ, то должно быть достаточно числа $6\times4=24$ бросаній для того, чтобы получить вѣроятность, превышающую $\frac{1}{2}$, одновременнаго вскрытія нумера 6 на каждой кости.

Погрѣшность кавалера Мере состояла въ томъ, что онъ, безъ всякаго основанія, принималъ числа бросаній, какъ при одной такъ и при двухъ костяхъ, пропорціональными числамъ всѣхъ статочностей. Для рѣшенія вопроса, онъ просто искалъ четвертый членъ пропорціи: 6 статочностей относятся къ 4 бросаніямъ, такъ какъ 36 статочностей къ четвертому члену $=24$.

Эта ошибка, а равно и та́, на которую указано въ примѣчаніи къ N° 2, показываетъ, какъ должно быть осмотрительнымъ при оцѣнкѣ вѣроятностей, въ особенности въ тѣхъ случаяхъ, когда онѣ относятся къ сложнымъ событіямъ.

ГЛАВА II.

О ЗАКОНАХЪ ВѢРОЯТНОСТИ ПРИ НЕОПРЕДѢЛЕННОМЪ ПОВТОРЕНІИ ИСПЫТАНІЙ.

О СЛОЖНЫХЪ СОБЫТІЯХЪ, НАИБОЛѢЕ ВѢРОЯТНЫХЪ.

17. Въ N°N° 7, 8 и 9 мы предложили общіе способы для опредѣленія вѣроятностей сложныхъ событій. Разсматриваніе этихъ вѣроятностей, при возрастающемъ числѣ испытаній, приводитъ къ весьма важнымъ законамъ, доказательствомъ которыхъ мы подробно займемся въ этой Главѣ.

Сличая между собою сложныя событія

$$A^m,\quad A^{m-1}B,\quad A^{m-2}B^2,\ldots\ldots$$

которыя могутъ представиться въ m послѣдовательныхъ испытаній, мы замѣчаемъ, что вѣроятности ихъ появленія весьма различны между собою. Положимъ, напримѣръ, что полную колоду картъ снимаемъ 10 разъ сряду, и условимся принимать за простыя событія вскрытіе *красной* и *чёрной* масти. Нѣтъ никакого сомнѣнія, что десяти-кратное появленіе исключительно *красной*, или исключительно *чёрной* масти, мы сочли бы случайностію весьма неправдоподобною. Всякія другія распредѣленія картъ, какъ то 9 красныхъ и 1 чёрная, или 8 красныхъ и 2 чёрныя, и такъ далѣе, будутъ для насъ случаями хотя сомнительными, но въ мѐньшей степени чѣмъ первый. Въ этомъ простомъ примѣрѣ, и руководствуясь только указаніемъ здраваго разсудка, мы, безъ сомнѣнія, признаемъ правдоподобнѣйшимъ изъ всѣхъ возможныхъ 11-ти событій

$$K^{10},\ K^9Ч^1,\ K^8Ч^2,\ K^7Ч^3,\ K^6Ч^4,\ K^5Ч^5,\ K^4Ч^6,\ K^3Ч^7,\ K^2Ч^8,\ K^1Ч^9,\ Ч^{10},$$

среднее $K^5Ч^5$, именно, пяти-кратное вскрытіе какъ красной такъ и чёрной масти, потому что не имѣемъ никакой причины отдавать преимущество одной масти предъ другой. По той же самой причинѣ, событіе K^{10} или $Ч^{10}$ сочтемъ менѣе правдоподобнымъ

чѣмъ $K^9Ч^1$ или $K^1Ч^9$, событіе $K^9Ч^1$ или $K^1Ч^9$ менѣе вѣроятнымъ, чѣмъ $K^8Ч^2$ или $K^2Ч^8$, и такъ далѣе. Всѣ эти заключенія становятся нетолько очевидными, но получаютъ совершенную опредѣлительность, когда вычислимъ мѣру правдоподобія, или, что̀ всё равно, вѣроятности разсматриваемыхъ сложныхъ событій. По формулѣ (4) [N° 7] найдутся слѣдующія величины для искомыхъ вѣроятностей:

$$\left\{\begin{matrix}K^{10},\\ Ч^{10},\end{matrix}\right.\quad \left\{\begin{matrix}K^9Ч^1,\\ K^1Ч^9,\end{matrix}\right.\quad \left\{\begin{matrix}K^8Ч^2,\\ K^2Ч^8,\end{matrix}\right.\quad \left\{\begin{matrix}K^7Ч^3,\\ K^3Ч^7,\end{matrix}\right.\quad \left\{\begin{matrix}K^6Ч^4,\\ K^4Ч^6,\end{matrix}\right.\quad K^5Ч^5.$$

$$\frac{1}{2^{10}},\quad \frac{10}{2^{10}},\quad \frac{45}{2^{10}},\quad \frac{120}{2^{10}},\quad \frac{210}{2^{10}},\quad \frac{252}{2^{10}}=\frac{63}{256}.$$

Сказанное здѣсь самымъ естественнымъ образомъ приводитъ къ вопросу объ опредѣленіи того сложнаго событія въ ряду

$$A^m,\quad A^{m-1}B,\quad A^{m-2}B^2,\ldots$$

вѣроятность котораго есть наибольшая. Ясно, что для рѣшенія вопроса, достаточно найти наибольшій членъ въ разложеніи степеннаго количества $(a+b)^m$: показатели надъ a и b, въ искомомъ членѣ, изобразятъ соотвѣтственно степени кратности событій A и B. Для большей ясности, разсмотримъ сперва тотъ частный случай, когда событія A и B *равновѣроятны*, то есть, когда $a=b$. Въ такомъ предположеніи имѣемъ

$$(a+b)^m=a^m+ma^m+\frac{m(m-1)}{1.2}a^m+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^m+\ldots$$

Наибольшій членъ этого разложенія очевидно тотъ, въ которомъ биноміальный коэффиціентъ есть наибольшій. Но, изъ закона составленія послѣдовательныхъ степеней двучленнаго количества, слѣдуетъ: 1° когда m *чётное* число, то наибольшій биноміальный коэффиціентъ будетъ средній, именно

$$\frac{1.2.3\ldots m}{\left(1.2.3\ldots\frac{m}{2}\right)^2},$$

помножающій $a^{\frac{m}{2}}b^{\frac{m}{2}}$ въ разложеніи $(a+b)^m$; 2° при m *нечётномъ*, наибольшихъ коэффиціентовъ будетъ два, равныхъ между собою, и занимающихъ середину разложенія $(a+b)^m$; первый изъ нихъ заключаетъ множитель $a^{\frac{m+1}{2}}b^{\frac{m-1}{2}}$, а второй, $a^{\frac{m-1}{2}}b^{\frac{m+1}{2}}$; общее ихъ выраженіе есть

$$\frac{1.2.3\ldots m}{\left(1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}\right)^2.\frac{m+1}{2}}.$$

И такъ, при $a=b$, первое изъ двухъ разложеній

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

доставляетъ наибольшій членъ $6a^2b^2=6a^4$, а второе, два наибольшіе члена, именно $10a^3b^2$ и $10a^2b^3$, обращающіеся оба въ $10a^5$.

Пояснимъ сказанное примѣромъ. Положимъ, что при многократномъ бросаніи монеты, ищемъ наиболѣе вѣроятныя случайности. Въ эту игру, простыя событія — появленіе *орла* или *рѣшетки* - равновѣроятны, и каждому изъ нихъ благопріятствуетъ одна статочность. Слѣдовательно $a=b=1$. Чтобы рѣшить, какія сложныя событія будутъ наиболѣе вѣроятны при двукратномъ, трехъ-кратномъ, четырехъ-кратномъ.... бросаніи монеты, надобно найти наибольшіе члены въ разложеніяхъ

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

не теряя изъ виду, что $a=b=1$. Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что искомые члены будутъ

При 2-кратномъ бросаніи .... $2ab$
При 3-кратномъ .... $3a^2b$ и $3ab^2$
При 4-кратномъ .... $6a^2b^2$
При 5-кратномъ .... $10a^3b^2$ и $10a^2b^3$
....

На такомъ основаніи составимъ таблицу правдоподобнѣйшихъ событій съ означеніемъ соотвѣтственныхъ имъ вѣроятностей:

Число бросаній монеты.	Правдоподобнѣйшія событія:	Соотвѣтст. вѣроятности сложн. событ.
2.	1 разъ Орелъ и 1 разъ Рѣшетка.	$\frac{1}{2}$
3.	2 р. О. 1 р. Р. или 1 р. О. 2 р. Р.	$\frac{3}{8}$
4.	2 р. О. и 2 р. Р.	$\frac{3}{8}$
5.	3 р. О. 2 р. Р. или 2 р. О. 3 р. Р.	$\frac{5}{16}$
6.	3 р. О. и 3 р. Р.	$\frac{5}{16}$
7.	4 р. О. 3 р. Р. или 3 р. О. 4 р. Р.	$\frac{35}{128}$
8.	4 р. О. и 4 р. Р.	$\frac{35}{128}$
9.	5 р. О. 4 р. Р. или 4 р. О. 5 р. Р.	$\frac{43}{256}$
10.	5 р. О. и 5 р. Р.	$\frac{43}{256}$

Выпишемъ по порядку абсолютныя вѣроятности событій, соотвѣтствующія чётному и нечётному числу бросаній монеты. Для *чётнаго* числа имѣемъ рядъ

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{5}{16},\quad \frac{35}{128},\quad \frac{43}{256},\ldots\ldots$$

для *нечётнаго*

$$\frac{3}{8},\quad \frac{5}{16},\quad \frac{35}{128},\quad \frac{43}{256},\ldots\ldots$$

Если примемъ теперь въ соображеніе, что второй рядъ тожественъ съ первымъ, и что онъ *убывающій*, ибо

$$\frac{1}{2} > \frac{3}{8} > \frac{5}{16} > \frac{35}{128} > \frac{43}{256} > \ldots.,$$

то въ правѣ будемъ вывести слѣдующія заключенія:

1° При *чётномъ* числѣ бросаній монеты, абсолютныя вѣроятности правдоподобнѣйшихъ событій, то есть вскрытія равнаго числа разъ орла и рѣшетки, уменьшаются съ увеличеніемъ числа бросаній. Такъ напримѣръ, въ 4 пріёма, появленіе орла и рѣшетки по 2 раза, будетъ событіемъ болѣе вѣроятнымъ чѣмъ вскрытіе орла и рѣшетки по 3 раза при 6-ти кратномъ бросаніи; дѣйствительно, вѣроятность первой случайности равна $\frac{3}{8}$, а вѣроятность второй изображается дробью $\frac{5}{16}$, которая на $\frac{1}{16}$ менѣе предъидущей дроби.

2° При *нечётномъ* числѣ бросаній, вѣроятность правдоподобнѣйшаго событія равна вѣроятности правдоподобнѣйшаго же событія, соотвѣтствующаго тому предположенію, что число бросаній увеличено однимъ разомъ. И такъ, при 5-ти кратномъ бросаніи монеты, вѣроятность вскрытія орла 3 раза и рѣшетки 2 раза изобразится дробью $\frac{5}{16}$; равнымъ образомъ, при 6-ти кратномъ бросаніи, вѣроятность появленія какъ орла такъ и рѣшетки по 3 раза, равна, какъ и выше, $\frac{5}{16}$.

Слѣдствія, выведенныя здѣсь для частнаго случая, будутъ доказаны въ слѣдующихъ N°N° въ самомъ общемъ видѣ.

Мы сей-часъ видѣли, что вѣроятности правдоподобнѣйшихъ событій, съ возрастаніемъ числа испытаній, будутъ постепенно уменьшаться, и это легко объяснить тѣмъ, что по мѣрѣ увеличенія числа испытаній, самый рядъ сложныхъ событій, различныхъ между собою, также увеличивается. Что же касается до относительныхъ вѣроятностей правдоподобнѣйшихъ событій, при одинаковомъ числѣ испытаній, то онѣ возрастаютъ съ числомъ испытаній. Такъ, напримѣръ, вѣроятность что при двукратномъ бросаніи монеты выпадетъ 1 разъ орелъ и 1 разъ рѣшетка, примущественно предъ двукратнымъ вскрытіемъ орла или рѣшетки, будетъ [N° 6]

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Въ три испытанія, вѣроятность двукратнаго вскрытія орла и однократнаго рѣшетки преимущественно предъ трехъ-кратнымъ появленіемъ орла, будетъ

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{4}.$$

При четырехъ испытаніяхъ найдется, что относительная вѣроятность двукратнаго появленія какъ орла такъ и рѣшетки, преимущественно предъ четырехъ-кратнымъ появленіемъ орла, изобразится дробью

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{16}} = \frac{6}{7},$$

и такъ далѣе. Сообразно съ сдѣланнымъ сей-часъ замѣчаніемъ, рядъ дробей

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{6}{7},\ldots.$$

выражающій относительныя вѣроятности правдоподобнѣйшихъ событій, будетъ возрастающій.

18. Перейдемъ теперь къ общему опредѣленію наибольшаго члена разложенія $(a+b)^m$, соотвѣтствующаго сложному событію, наиболѣе вѣроятному. Пусть будетъ $A^{m-n}B^n$ это событіе; число статочностей, благопріятствующихъ ему, изобразится [N° 7] чрезъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-n).1.2.3\ldots n}\cdot a^{m-n}b^n = M,$$

и вопросъ очевидно будетъ состоять въ опредѣленіи числа n по условію, чтобы членъ M былъ наибольшій въ разложеніи $(a+b)^m$. Но, замѣтимъ, что если M будетъ болѣе двухъ смежныхъ съ нимъ членовъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-n+1).1.2.3\ldots(n-1)}\cdot a^{m-n+1}b^{n-1} = L$$

и

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-n-1).1.2.3\ldots(n+1)}\cdot a^{m-n-1}b^{n+1} = N,$$

то вмѣстѣ съ тѣмъ превзойдетъ и всѣ остальные. Чтобъ удостовѣриться въ этомъ, достаточно разсмотрѣть отношеніе общаго члена разложенія $(a+b)^m$ къ предъидущему. Пусть будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-\mu).1.2.3\ldots\mu}\cdot a^{m-\mu}b^{\mu} = U$$

этотъ общій членъ; предшествующій ему изобразится чрезъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-\mu+1).1.2.3\ldots(\mu-1)}\cdot a^{m-\mu+1}b^{\mu-1} = V,$$

а отношеніе, о которомъ сей-часъ упомянули, равно

$$\frac{U}{V}=\frac{m-\mu+1}{\mu}\cdot\frac{b}{a}=\frac{m+1}{\mu}\cdot\frac{a}{b}-\frac{a}{b}.$$

Замѣтимъ, что по причинѣ неизмѣняемости величинъ m, a и b, это отношеніе, съ уменьшеніемъ μ, увеличивается, а съ увеличеніемъ μ, уменьшается. Первое предположеніе соотвѣтствуетъ тому случаю, когда, начиная съ общаго члена, идемъ отъ правой руки къ лѣвой къ первому члену a^m разложенія, а второе, когда, начиная съ того же общаго члена, идемъ отъ лѣвой руки къ правой къ послѣднему члену b^m. И такъ, если предположимъ, что общій членъ есть именно M, то есть, наибольшій въ разложеніи $(a+b)^m$, и означимъ чрезъ

$$\ldots\ldots L'',\ L',\ L \text{ и } N,\ N',\ N''\ldots\ldots$$

члены предшествующіе M и послѣдующіе за нимъ въ порядкѣ

$$\ldots\ldots L'',\ L',\ L,\ M,\ N,\ N',\ N''\ldots\ldots$$

то получимъ рядъ неравенствъ:

$$\frac{M}{L}>1,\quad \frac{L}{L'}>\frac{M}{L},\quad \frac{L'}{L''}>\frac{L}{L'}\ldots\ldots$$

$$\frac{N}{M}<1,\quad \frac{N'}{N}<\frac{N}{M},\quad \frac{N''}{N'}<\frac{N'}{N}\ldots\ldots$$

изъ которыхъ, чрезъ послѣдовательныя перемноженія, выведемъ

$$M>L,\quad L>L',\quad L'>L''\ldots\ldots$$

$$N<M,\quad N'<N,\quad N''<N'\ldots\ldots$$

сообразно съ сказаннымъ выше. На такомъ основаніи, остается только удовлетворить двойному условію

$$L<M>N.$$

Подставляя на мѣсто L, M и N равныя имъ величины, найдемъ слѣдующія два неравенства:

$$(m-n+1)b>na \quad\text{и}\quad (n+1)a>(m-n)b,$$

откуда

$$n<\frac{mb}{a+b}+\frac{b}{a+b},\quad n>\frac{mb}{a+b}-\frac{a}{a+b}. \tag{10}$$

Изъ этихъ условій усматриваемъ, что съ увеличеніемъ числа испытаній m, величина n будетъ также увеличиваться, не выходя однакожъ изъ предѣловъ

$$\frac{mb}{a+b}+\frac{b}{a+b} \quad\text{и}\quad \frac{mb}{a+b}-\frac{a}{a+b},$$

разность которыхъ равна $\frac{a+b}{a+b}=1$. Слѣдовательно, n будетъ равняться цѣлому числу, заключающемуся между этими предѣлами.

Если неравенствамъ (10) дадимъ видъ

$$\frac{mb}{a+b}<n+\frac{a}{a+b} \quad\text{и}\quad \frac{mb}{a+b}>n-\frac{b}{a+b},$$

то прямо увидимъ, что величину $\frac{mb}{a+b}$ можно изобразить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{mb}{a+b}=n+z,$$

разумѣя подъ z правильную дробь, положительную или отрицательную, заключающуюся между предѣлами $-\frac{b}{a+b}$ и $+\frac{a}{a+b}$. На такомъ основаніи имѣемъ два уравненія

$$\frac{mb}{a+b}=n+z, \quad\text{и}\quad \frac{ma}{a+b}=(m-n)-z; \tag{11}$$

раздѣливъ второе на первое, получимъ

$$\frac{m-n-z}{n+z}=\frac{a}{b}. \tag{12}$$

Такъ какъ величина z, входящая въ эту формулу, есть правильная дробь, а количества $m-n$ и n цѣлыя числа, возрастающія неопредѣленно съ m въ силу равенствъ (11), то заключаемъ, что наибольшій членъ въ разложеніи $(a+b)^m$ будетъ тотъ, въ которомъ показатели $m-n$ и n количествъ a и b, или въ строгомъ смыслѣ пропорціональны этимъ количествамъ, или наиближе подходятъ къ такой пропорціональности. Слѣдовательно, *наивѣроятнѣйшее сложное событіе, составленное изъ простыхъ* A *и* B, *будетъ тò, въ которомъ* A *и* B *повторяются пропорціонально величинамъ* a *и* b, *или, что всё равно, пропорціонально простымъ вѣроятностямъ* $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a+b}$ *событій* A *и* B. Когда число испытаній не можетъ быть разложено на двѣ цѣлыя части, соотвѣтственно пропорціональныя величинамъ a и b, то правдоподобнѣйшее событіе будетъ тò, въ которомъ отношеніе числа повтореній событія A къ числу повтореній событія B наиближе подходитъ къ отношенію $\frac{a}{b}$.

Разсмотримъ въ частности тотъ случай, когда m разлагается на сумму двухъ цѣлыхъ чиселъ $ka+kb$, соотвѣтственно пропорціональныхъ простымъ статочностямъ a и b; неравенства (10) примутъ видъ

$$n<kb+\frac{b}{a+b} \quad\text{и}\quad n>kb-\frac{a}{a+b};$$

отсюда, по причинѣ n цѣлаго, выводимъ $n=kb$, и поэтому $m-n=ka$. Слѣдовательно

$$\frac{m-n}{n}=\frac{a}{b}.$$

И такъ, допустивъ что число испытаній m равно суммѣ $ka+kb$, наибольшій членъ разложенія $(a+b)^m$ будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots(ka+kb)}{1.2.3\ldots ka.1.2.3\ldots kb}.a^{ka}b^{kb}, \tag{13}$$

а вѣроятность, соотвѣтствующая правдоподобнѣйшему изъ всѣхъ сложныхъ событій, получаемыхъ при $ka+kb$ испытаніяхъ, то есть вѣроятность событія $A^{ka}B^{kb}$, выразится дробью

$$\frac{1.2.3\ldots(ka+kb)}{1.2.3\ldots ka.\,1.2.3\ldots kb}\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^{ka}\cdot\left(\frac{b}{a+b}\right)^{kb}. \qquad (14)$$

19. Теперь легко будетъ распространить на общій случай слѣдствія, выведенныя въ № **17**. Прежде всего докажемъ, что абсолютныя вѣроятности правдоподобнѣйшихъ событій уменьшаются съ увеличеніемъ числа испытаній. Для этого, сравнимъ вѣроятность p_m правдоподобнѣйшаго событія при $m=ka+kb$ испытаніяхъ съ вѣроятностію p_{m+1} правдоподобнѣйшаго же событія, соотвѣтствующаго $m+1=ka+kb+1$ испытаніямъ. Если найдется, что отношеніе $\frac{p_{m+1}}{p_m}<1$, то предложеніе, о которомъ идетъ рѣчь, очевидно будетъ доказано. Мы знаемъ, что при m испытаніяхъ, вѣроятнѣйшее событіе есть то̀, которое соотвѣтствуетъ произведенію $a^{ka}b^{kb}$ въ разложеніи $(a+b)^m$; нетрудно усмотрѣть, что при $m+1$ испытаніяхъ, правдоподобнѣйшее событіе опредѣлится тѣмъ членомъ разложенія $(a+b)^{m+1}$, который заключаетъ въ себѣ $a^{ka+1}b^{kb}$ или $a^{ka}b^{kb+1}$ смотря по тому, будетъ ли $a>b$ или $b>a$. И въ самомъ дѣлѣ, въ № **18** доказано, что наибольшій членъ въ разложеніи степени двучленнаго количества $a+b$ есть тотъ, въ которомъ показатели величинъ a и b прямо пропорціональны этимъ самымъ величинамъ, или наиближе подходятъ къ пропорціональности. Первому условію, при показателѣ равномъ $ka+kb+1$, очевидно удовлетворить не можемъ, а второму удовлетворемъ принявъ за показатели количествъ a и b числа $ka+1$ и kb, или ka и $kb+1$, смотря по тому, будетъ ли $a>b$ или $b>a$. Дѣйствительно, изобразивъ чрезъ λ и μ неизвѣстные показатели величинъ a и b, соотвѣтствующіе правдоподобнѣйшему событію при $m+1$ испытаніяхъ, должно будетъ удовлетворить ближайшими цѣлыми числами уравненію

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{a}{b}$$

при условіи $\lambda+\mu=ka+kb+1$. Рѣшая эти два уравненія, находимъ

$$\lambda=ka+\frac{a}{a+b} \quad \text{и} \quad \mu=kb+\frac{b}{a+b}.$$

Но при $a>b$, будетъ

$$\frac{a}{a+b}>\frac{1}{2}, \quad \frac{b}{a+b}<\frac{1}{2};$$

слѣдовательно

$$\lambda=ka+1, \quad \mu=kb.$$

Напротивъ того, при $a<b$,

$$\frac{a}{a+b}<\frac{1}{2}, \quad \frac{b}{a+b}>\frac{1}{2},$$

почему

$$\lambda=ka, \quad \mu=kb+1.$$

На такомъ основаніи, обратимся къ доказательству самаго предложенія. Вѣроятности p_m и p_{m+1} опредѣлятся формулами

$$p_m=\frac{1.2.3\ldots(ka+kb)}{1.2.3\ldots ka.\,1.2.3\ldots kb}\cdot\frac{a^{ka}b^{kb}}{(a+b)^{ka+kb}},$$

$$p_{m+1}=\frac{1.2.3\ldots(ka+kb)(ka+kb+1)}{1.2.3\ldots(ka+1).\,1.2.3\ldots kb}\cdot\frac{a^{ka+1}b^{kb}}{(a+b)^{ka+kb+1}} \quad \text{для } a>b,$$

$$p_{m+1}=\frac{1.2.3\ldots(ka+kb)(ka+kb+1)}{1.2.3\ldots ka.\,1.2.3\ldots(kb+1)}\cdot\frac{a^{ka}b^{kb+1}}{(a+b)^{ka+kb+1}} \quad \text{для } b>a.$$

При $a>b$, получимъ

$$\frac{p_{m+1}}{p_m}=\frac{ka+kb+1}{ka+1}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{ka(a+b)+a}{ka(a+b)+a+b},$$

а при $b>a$,

$$\frac{p_{m+1}}{p_m}=\frac{ka+kb+1}{kb+1}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{kb(a+b)+b}{kb(a+b)+a+b}.$$

Такъ какъ числители обѣихъ дробей

$$\frac{ka(a+b)+a}{ka(a+b)+a+b}, \quad \frac{kb(a+b)+b}{kb(a+b)+a+b}$$

менѣе соотвѣтственныхъ имъ знаменателей, то каждая изъ нихъ менѣе единицы. И такъ, вѣроятность p_{m+1}, сообразно съ тѣмъ, что̀ имѣли въ виду доказать, будетъ менѣе вѣроятности p_m, а слѣдовательно $p_{m+2}<p_{m+1}$, $p_{m+3}<p_{m+2}$ и такъ далѣе.

Замѣтимъ мимоходомъ, что при $a=b$, и m *нечётномъ*, согласно съ сказаннымъ въ № **17**, будемъ имѣть $p_m=p_{m+1}$. Дѣйствительно, въ этомъ предположеніи

$$p_m=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\frac{m+1}{2}.\,1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{a^m}{(2a)^m}=\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1.2.3\ldots m}{(1.2.3\ldots\frac{m-1}{2})^2.\frac{m+1}{2}}$$

$$p_{m+1}=\frac{1.2.3\ldots m(m+1)}{1.2.3\ldots\frac{m+1}{2}.\,1.2.3\ldots\frac{m+1}{2}}\cdot\frac{a^{m+1}}{(2a)^{m+1}}=\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1.2.3\ldots m}{(1.2.3\ldots\frac{m-1}{2})^2.\frac{m+1}{2}},$$

и слѣдовательно $p_m=p_{m+1}$.

Сказанное здѣсь объ уменьшеніи абсолютной вѣроятности правдоподобнѣйшихъ событій съ увеличеніемъ числа испытаній, равно справедливо и въ отношеніи къ другимъ сложнымъ событіямъ. И вообще, можно замѣтить, что съ увеличеніемъ числа испытаній, абсолютная вѣроятность сложнаго событія $A^\lambda B^\mu$ будетъ уменьшаться по мѣрѣ того, какъ отношеніе $\frac{\lambda}{\mu}$ между членами, означающими кратность событій, будетъ удаляться отъ отношенія $\frac{a}{b}$ благопріятствующихъ статочностей.

Что же касается до относительной вѣроятности правдоподобнѣйшаго событія къ какому ни есть другому, то можно доказать, что она возрастаетъ съ увеличеніемъ числа испытаній. И въ самомъ дѣлѣ, изобразивъ чрезъ M наибольшій, а чрезъ H какой ни есть другой членъ разложенія $(a+b)^m$, получимъ для абсолютной вѣроятности правдоподобнѣйшаго событія дробь $\frac{M}{(a+b)^m}$, а для вѣроятности того сложнаго событія, къ которому от-

носится H, выраженіе $\frac{H}{(a+b)^m}$. Слѣдовательно, относительная вѣроятность правдоподобнѣйшаго событія къ другому, изобразится отношеніемъ (N° 6)

$$\frac{\frac{M}{(a+b)^m}}{\frac{M}{(a+b)^m}+\frac{H}{(a+b)^m}}=\frac{M}{M+H}=\frac{1}{1+\frac{H}{M}}.$$

Въ N° 22 будетъ показано, что отношеніе $\frac{H}{M}$, съ увеличеніемъ m, уменьшается неопредѣленно; основываясь на этомъ свойствѣ заключаемъ, что относительная вѣроятность $\frac{M}{M+H}$, при возрастающемъ числѣ испытаній, неопредѣленно приближается къ единицѣ, отъ которой наконецъ разнствуетъ какъ угодно мало.

ТЕОРЕМА ЯКОВА БЕРНУЛЛИ.

20. Повседневный опытъ показываетъ намъ, что съ возрастающимъ числомъ испытаній обнаруживается нѣкоторая правильность въ относительномъ числѣ повторяющихся событій. Эта правильность, безъ сомнѣнія замѣченная всѣми, но не съ одинаковою степенью ясности, есть слѣдствіе одного весьма важнаго закона вѣроятностей, изложеніемъ котораго теперь и займемся. Но, чтобы показать съ возможною опредѣлительностію, въ чёмъ именно состоитъ этотъ законъ, предложимъ сперва нѣкоторые простые примѣры.

Положимъ, что испытаніе производится надъ кубическою костью, совершенно однородною, тщательной выдѣлки, съ нумерами 1, 2, 3, 4, 5, 6 на шести ея граняхъ. Эту кость бросаютъ очень значительное число разъ, и, при каждомъ бросаніи, отмѣчаютъ выпадшій нумеръ. Сосчитавъ потомъ число появленій каждаго изъ шести нумеровъ, увидимъ, что отношеніе найденныхъ шести чиселъ, отдѣльно взятыхъ, къ полному числу бросаній, будетъ весьма мало разнствовать отъ дроби $\frac{1}{6}$, и тѣмъ менѣе, чѣмъ число бросаній значительнѣе. Или, еще, снимая полную колоду, и отмѣчая каждый разъ какая вскрылась карта, простая или фигура, мы увидимъ, что при большомъ рядѣ испытаній, отношеніе числа вскрывшихся простыхъ картъ къ числу фигуръ, весьма мало разнится отъ неправильной дроби $\frac{10}{3}=\frac{40}{12}$, числитель которой изображаетъ совокупность всѣхъ простыхъ картъ, а знаменатель, число фигуръ, входящихъ въ полную колоду.

Всякій человѣкъ, даже вовсе необразованный, руководствуется въ житейскомъ быту, бо́льшею частію безсознательно, тѣмъ закономъ вѣроятностей, о которомъ говоримъ. И такъ, земледѣлецъ, употребивъ на посѣвъ опредѣленное количество зёренъ, ожидаетъ, при извѣстномъ состояніи погоды, извѣстнаго урожая. Онъ знаетъ, что если и ошибется въ расчётѣ въ теченіи одного, двухъ, трехъ годовъ, но, въ общей сложности нѣсколькихъ лѣтъ, ожиданія его исполнятся. Точно такъ и купецъ, хорошо понимающій свое дѣло, несмотря на различныя случайности, опредѣляетъ очень приблизительно тѣ выгоды, которыя можетъ получить пуская въ оборотъ извѣстный капиталъ. Статистики, даже несвѣдущіе въ Анализѣ Вѣроятностей, основываютъ почти всѣ свои заключенія на этомъ же законѣ. Таковы результаты ихъ о народонаселеніи вообще, о мѣстномъ движеніи населенія, о числѣ преступниковъ, о плодородности почвы, о вывозѣ и ввозѣ товаровъ и проч. Естествознаніе, Медицина, Судопроизводство, однимъ словомъ всѣ отрасли нашихъ знаній, заимствуются этимъ началомъ въ бо́льшей или мéньшей мѣрѣ. И такъ, нѣтъ сомнѣнія, что правильность въ относительномъ числѣ повтореній всякаго рода явленій, какъ физическихъ такъ и нравственныхъ, когда обнимаемъ большой рядъ испытаній, можно принимать нетолько за фактъ, утвержденный опытомъ, но даже за истину, въ которой убѣждаетъ насъ здравое понятіе о вещахъ. Но истинно философскій умъ не удовольствуется такимъ эмпирическимъ и поверхностнымъ взглядомъ на этотъ важный предметъ: онъ потребуетъ опредѣлительнаго, точнаго понятія объ законѣ столь общемъ, и захочетъ узнать объёмъ его при данныхъ обстоятельствахъ; однимъ словомъ, онъ потребуетъ чиселъ, какъ непреложнаго мѣрила для всѣхъ нашихъ положительныхъ знаній. Этому требованію можетъ удовлетворить только математическій анализъ, и вотъ почему необходимо подвергнуть вычисленію *законъ большихъ чиселъ*, какъ назвалъ его весьма свойственно Г. *Поассонъ**).

Яковъ Бернулли, постигшій всю важность этого закона, обдумывалъ двадцать лѣтъ его доказательство. Оно помѣщено въ IV части его сочиненія *Ars conjectandi***). Впослѣдствіи Лапласъ предложилъ другое доказательство, болѣе удовлетворительное не со стороны строгости, но въ отношеніи къ удобности формулъ, примѣняющихся съ бо́льшею выгодою

---

*) Г. Поассонъ, въ сочиненіи своемъ *Recherches sur la probabilité des Jugements*, 1837, называетъ *закономъ большихъ чиселъ* (la loi des grands nombres) одно весьма общее предложеніе, заключающее въ себѣ ту теорему, которую имѣемъ въ виду доказать. Онъ разсматриваетъ случай, когда статочности, во время испытаній, могутъ измѣняться, и, сверхъ того, предполагаетъ, что онѣ неизвѣстны *a priori*, а опредѣляются посредствомъ наблюдаемыхъ явленій.

**) Эта книга издана въ Базелѣ въ 1713 году, семь лѣтъ послѣ смерти сочинителя, племянникомъ его *Николаемъ Бернулли*.

къ численнымъ выкладкамъ. Прежде нежели приступимъ къ этому доказательству, объяснимъ съ возможною опредѣлительностію смыслъ самаго предложенія.

Положимъ, что повтореніе какого либо рода испытанія приводитъ каждый разъ къ одному изъ двухъ событій A или B. Пусть простыя вѣроятности этихъ событій будутъ $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a+b}$, гдѣ a и b изображаютъ числа статочностей, соотвѣтственно благопріятствующихъ появленію A и B. Когда рядъ испытаній будетъ незначителенъ, то отношеніе числа появленій событія A къ числу появленій событія B можетъ много разнствовать отъ отношенія $\frac{a}{b}$ простыхъ вѣроятностей. Но, по мѣрѣ увеличенія числа испытаній, и когда оно значительно превзойдетъ сумму $a+b$, отношеніе, о которомъ говоримъ, станетъ постепенно приближаться къ дроби $\frac{a}{b}$, и наконецъ будетъ разнствовать отъ нея какъ угодно мало.

Въ этомъ свойствѣ всего, что̀ только можетъ повториться, не подлежа повидимому никакому постоянному закону, заключается предложеніе Якова Бернулли.

Пояснимъ еще это отвлеченное изложеніе весьма простымъ примѣромъ, сходствующимъ съ общимъ предложеніемъ во всѣхъ отношеніяхъ.

Положимъ, что изъ сосуда, заключающаго въ себѣ a шаровъ бѣлыхъ и b чёрныхъ, вынимаемъ на-удачу нѣсколько разъ сряду по одному шару, и каждый разъ отмѣтивъ его цвѣтъ, кладемъ опять въ сосудъ. При незначительномъ числѣ пріёмовъ, отношеніе числа отмѣченныхъ бѣлыхъ шаровъ къ чёрнымъ, будетъ, вообще, много разнствовать отъ содержанія $\frac{a}{b}$; но, по мѣрѣ увеличенія числа извлеченій шаровъ изъ сосуда, мы усмотримъ, что сказанное отношеніе приближается постепенно къ $\frac{a}{b}$, и Анализъ Вѣроятностей доставляетъ способы для опредѣленія степени правдоподобія предѣловъ, между которыми будетъ заключаться это отношеніе по мѣрѣ того, какъ распространяемъ рядъ испытаній.

Послѣ предложенныхъ здѣсь объясненій теоремы Якова Бернулли, легко будетъ понять слѣдующее сжатое изложеніе этого примѣчательнаго закона:

При неопредѣленномъ повтореніи испытаній, изъ которыхъ каждое приводитъ къ одному изъ двухъ простыхъ событій A *или* B, *отношеніе между числами появленій этихъ событій непрестанно приближается къ отношенію ихъ простыхъ вѣроятностей, и, наконецъ, при надлежащемъ числѣ испытаній, разнствуетъ отъ него какъ угодно мало.*

Доказательство самаго Бернулли основано на нѣкоторыхъ предложеніяхъ объ относительной величинѣ членовъ разложенія степеннаго количества $(a+b)^m$. Желающіе озна-

комиться съ этимъ анализомъ, могутъ обратиться къ сочиненію *Ars conjectandi* или къ книгѣ *Elémens du Calcul des Probabilités*, соч. *Лакроа*. Мы приведемъ здѣсь, съ небольшими измѣненіями, доказательство, помѣщенное у *Лапласа* въ *Théorie analytique des Probabilités*. Оно основано на весьма примѣчательной формулѣ *Стирлинга*, имѣющей обширное приложеніе въ Исчисленіи Вѣроятностей. Займемся сперва выводомъ этой формулы.

21. Положимъ, что разсматривается произведеніе послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ

$$s = 1.2.3....x,$$

вычисленіе котораго, даже при посредственной величинѣ x, становится почти невозможнымъ. Формула Стирлинга служитъ для опредѣленія этого произведенія съ такою степенью точности, какой пожелаемъ. Замѣтивъ, что

$$\log.s = \log.1+\log.2+\log.3+....+\log.x,$$

можно будетъ написать величину s въ видѣ

$$s = e^{\log.1+\log.2+\log.3+...+\log.x}, \qquad (15)$$

разумѣя подъ e основаніе *Неперовой* системы логариѳмовъ, которые здѣсь употреблены. Для опредѣленія суммы логариѳмовъ, примемъ въ соображеніе, что по правиламъ обратнаго способа разностей, имѣемъ

$$\log.1+\log.2+\log.3+....+\log.x = \Sigma\log.x+\log.x;$$

съ другой же стороны, конечный интегралъ Σ можно преобразовать въ обыкновенный интегралъ $\int$ посредствомъ извѣстной формулы *Эйлера* [ПРИМѢЧАНІЕ I]:

$$\Sigma y = \int y dx - \frac{1}{2}y + \frac{1}{12}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{1}{720}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{30240}\cdot\frac{d^5y}{dx^5} - ....$$

На такомъ основаніи, положивъ $y = \log.x$, получимъ

$$\Sigma\log.x = \int\log.x.dx - \frac{1}{2}\log.x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - ....;$$

но $\int\log.x.dx = x\log.x - x + C$; поэтому найдется

$$\Sigma\log.x+\log.x = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \cdots + C.$$

Подставивъ эту величину въ формулу (15), и замѣнивъ e^C постояннымъ множителемъ A, получимъ

$$1.2.3...x = A.x^{x+\frac{1}{2}}.e^{-x}.e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\cdots}.$$

Величина A опредѣляется очень просто посредствомъ слѣдующаго выраженія окружности, найденнаго Англійскимъ математикомъ *Вальисомъ*:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7.9...},$$

гдѣ число множителей, какъ въ числителѣ такъ и въ знаменателѣ, есть безконечное

[ПРИМѢЧАНІЕ II, § 2]. Если положимъ $n = \infty$, то это выраженіе можно будетъ представить въ видѣ

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2.4.6.8\ldots 2n)^2}{(1.3.5\ldots[2n-1])^2(2n+1)} = \frac{2^{2n}(1.2.3\ldots n)^2}{(1.3.5\ldots[2n-1])^2(2n+1)}.$$

Но, съ другой стороны,

$$1.2.3\ldots 2n = 2.4.6\ldots 2n.1.3.5\ldots(2n-1) = 2^n.1.2.3\ldots n.1.3.5\ldots(2n-1);$$

слѣдовательно

$$1.3.5\ldots(2n-1) = \frac{1.2.3\ldots 2n}{2^n.1.2.3\ldots n},$$

почему и найдется

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^{4n}(1.2.3\ldots n)^4}{(2n+1)(1.2.3\ldots 2n)^2}.$$

Въ силу же доказаннаго выше, имѣемъ

$$1.2.3\ldots n = A.n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}.e^{\frac{1}{12n}-\cdots}.$$

$$1.2.3\ldots 2n = A(2n)^{2n+\frac{1}{2}}.e^{-2n}.e^{\frac{1}{12.2n}-\cdots};$$

слѣдовательно

$$\frac{\pi}{2} = \frac{A^4.2^{4n}.n^{4n+2}.e^{-4n}.e^{\frac{1}{3n}-\cdots}}{A^2.(2n+1)2^{4n+1}.n^{4n+1}.e^{-4n}.e^{\frac{1}{12n}-\cdots}} = \frac{nA^2}{4n+2}.e^{\frac{1}{4n}-\cdots},$$

или

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)\pi = A^2.e^{\frac{1}{4n}-\cdots}.$$

Положивъ $n = \infty$, получимъ окончательно

$$2\pi = A^2, \quad \text{откуда} \quad A = \sqrt{2\pi}.$$

И такъ, найдется формула

$$1.2.3\ldots x = x^{x+\frac{1}{2}}.e^{-x}\sqrt{2\pi}.e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\cdots}, \tag{16}$$

удержавшая имя своего изобрѣтателя *Стирлинга*. Если величину показательную обратимъ въ рядъ, то получимъ

$$e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\cdots} = 1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\cdots$$

и слѣдовательно

$$1.2.3\ldots x = x^{x+\frac{1}{2}}.e^{-x}.\sqrt{2\pi}.\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\cdots\right).$$

Этой формулѣ можно дать слѣдующій простѣйшій видъ:

$$1.2.3\ldots x = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}.\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\cdots\right). \tag{17}$$

Строка $1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\cdots$ будетъ тѣмъ менѣе разнствовать отъ единицы, чѣмъ x будетъ больше. Поэтому, когда x довольно значительное число, можно, во многихъ случаяхъ, довольствоваться приближенною величиною, которую доставитъ формула

$$1.2.3\ldots x = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}. \tag{18}$$

Чтобы показать на примѣрѣ какой степени точности можно ожидать отъ опредѣленія (17), возьмемъ $x = 10$. Вычисляя по логариѳмамъ вторую часть формулы

$$1.2.3\ldots 10 = \left(\frac{10}{e}\right)^{10}\sqrt{20\pi}.\left(1+\frac{1}{120}+\frac{1}{28800}\right),$$

мы получимъ, несмотря на незначительность x, число, разнствующее отъ настоящей величины произведенія $1.2.3\ldots 10 = 3628800$, менѣе чѣмъ на одну единицу.

Весьма легко найти формулу, опредѣляющую произведеніе нечётныхъ чиселъ. Для этого стоитъ только замѣтить, что тожественное уравненіе

$$1.3.5\ldots(2x-1) = \frac{1.2.3\ldots 2x}{2^x.1.2.3\ldots x},$$

въ силу формулы (17), приметъ видъ:

$$1.3.5\ldots(2x-1) = \frac{\left(\frac{2x}{e}\right)^{2x}.\sqrt{4\pi x}.\left(1+\frac{1}{24x}+\frac{1}{1152x^2}+\cdots\right)}{2^x.\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}.\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\cdots\right)}.$$

По сокращеніи этой дроби, и по раздѣленіи безконечнаго ряда въ числителѣ на безконечный рядъ знаменателя, получимъ

$$1.3.5\ldots(2x-1) = \left(\frac{2x}{e}\right)^x\sqrt{2}.\left(1-\frac{1}{24x}+\frac{1}{1152x^2}-\cdots\right). \tag{19}$$

Эта формула, выражающая произведеніе нечётныхъ чиселъ, не заключаетъ въ себѣ трансцендентнаго числа π.

22. Чтобы сдѣлать по возможности вразумительнымъ ходъ доказательства Бернулліева предложенія, мы дадимъ этой теоремѣ видъ вопроса, и положимъ, что рѣшаемъ слѣдующую задачу:

Производится большой рядъ испытаній, изъ которыхъ каждое приводитъ къ одному изъ двухъ событій A *или* B*; простыя вѣроятности для* A *и* B *предполагаются постоянными; изобразимъ ихъ соотвѣтственно чрезъ* $p = \frac{a}{a+b}$ *и* $q = 1-p = \frac{b}{a+b}$. *Если означимъ чрезъ* m *число испытаній, то вѣроятнѣйшее сложное событіе будетъ* $A^xB^{x'}$, *для котораго отношеніе* $\frac{x}{x'}$, *или равно дроби* $\frac{a}{b}$, *или весьма мало разнствуетъ отъ нея, и гдѣ, сверхъ того,* $x+x'=m$; [N° 18]. *Теперь могутъ представиться слѣдующіе два вопроса:* 1° *Какъ велика вѣроятность* P, *что при* m *испытаніяхъ, событіе* A

случится не менѣе x—l и не болѣе x+l разъ, и слѣдовательно B не менѣе x'—l и не болѣе x'+l разъ, разумѣя подъ l число несравненно ме́ньшее x и x'. 2° *Предполагая вѣроятность p событія A неизвѣстною, но зная сколько разъ оно случилось при m испытаніяхъ, опредѣлить вѣроятность P', что p будетъ заключаться между данными предѣлами.*

На основаніи формулы (4) [N° 7] и соображеній, заключающихся въ N° 9, первая изъ искомыхъ двухъ вѣроятностей, именно P, выразится совокупностію слѣдующихъ $2l+1$ членовъ:

$$P=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(x+l).1.2.3\ldots(x'-l)}\cdot p^{x+l}(1-p)^{x'-l}+\cdots+\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'}\cdot p^{x}(1-p)^{x'}+\cdots$$
$$+\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(x-l).1.2.3\ldots(x'+l)}\cdot p^{x-l}(1-p)^{x'+l}. \quad (20)$$

Займемся сперва приблизительнымъ вычисленіемъ перваго члена величины P. На основаніи Стирлинговой формулы (17), получимъ

$$1.2.3\ldots m=\left(\frac{m}{e}\right)^{m}.\sqrt{2\pi m}.\left(1+\frac{1}{12m}+\cdots\right)$$
$$1.2.3\ldots(x+l)=\left(\frac{x+l}{e}\right)^{x+l}.\sqrt{2\pi(x+l)}\cdot\left(1+\frac{1}{12(x+l)}+\cdots\right)$$
$$1.2.3\ldots(x'-l)=\left(\frac{x'-l}{e}\right)^{x'-l}.\sqrt{2\pi(x'-l)}.\left(1+\frac{1}{12(x'-l)}+\cdots\right);$$

слѣдовательно, по причинѣ $x+x'=m$,

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(x+l).1.2.3\ldots(x'-l)}\cdot p^{x+l}(1-p)^{x'-l}=m^{m}\left(\frac{p}{x+l}\right)^{x+l}.\left(\frac{1-p}{x'-l}\right)^{x'-l}.\sqrt{\frac{m}{2\pi(x+l)(x'-l)}}\cdot K \quad (21)$$

гдѣ подъ K разумѣемъ величину

$$K=\frac{1+\frac{1}{12m}+\cdots}{\left(1+\frac{1}{12(x+l)}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{12(x'-l)}+\cdots\right)}=1+\frac{1}{12m}-\frac{m}{12(x+l)(x'-l)}+\cdots$$

Условимся теперь въ степени приближенія, съ которою желаемъ опредѣлить вѣроятность P. Положимъ, что m есть весьма большое число въ сравненіи съ суммою $a+b$; такъ какъ $x+x'=m$, то x и x' будутъ одного порядка съ m, ибо мы предполагаемъ, что a и b сравнимы между собою, то есть, что ни одна изъ двухъ дробей $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a+b}$ не есть величина чрезвычайно малая. Допустимъ сверхъ того, что порядокъ величины l не превышаетъ порядка $\sqrt{m}$, а слѣдовательно и $\sqrt{x}$ или $\sqrt{x'}$. Если условимся пренебрегать величины порядка $\frac{1}{m}$, то въ вычисленіи должно будетъ удержать, при количествахъ обыкновенной величины, члены порядковъ: $\frac{l}{x}$, $\frac{l}{x'}$, $\frac{l}{m}$, $\frac{l^3}{x^2}$, $\frac{ml}{xx'}$, $\frac{l^3}{x'^2}$, $\frac{l^3}{m^2}\ldots$,

а откинуть члены порядковъ: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{l^2}{x^2}$, $\frac{l^2}{x'^2}$, $\frac{l^4}{x^3}$, $\frac{l^4}{m^3}\ldots$ Въ силу этого условія, количества K и $\sqrt{\frac{m}{2\pi(x+l)(x'-l)}}$, входящія въ формулу (21), обратятся въ слѣдующія:

$$K=1+\frac{1}{12m}-\frac{m}{12(x+l)(x'-l)}+\cdots=1$$

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi(x+l)(x'-l)}}=\sqrt{\frac{m}{2\pi xx'}}\cdot\left(1+\frac{l}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{l}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{m}{2\pi xx'}}\cdot\left(1+\frac{x-x'}{2xx'}.l\right).$$

И такъ, изобразивъ чрезъ X первый членъ второй части формулы (20), найдется

$$X=m^{m}\left(\frac{p}{x+l}\right)^{x+l}\cdot\left(\frac{1-p}{x'-l}\right)^{x'-l}\cdot\sqrt{\frac{m}{2\pi xx'}}\cdot\left(1+\frac{x-x'}{2xx'}.l\right).$$

Разложимъ теперь величину $\left(\frac{p}{x+l}\right)^{x+l}$, принимая въ соображеніе вторую изъ формулъ (11) [N° 18]. Въ этой формулѣ, при новыхъ означеніяхъ, будетъ $\frac{a}{a+b}=p$, $m-n=x$; поэтому $pm=x-z$, откуда

$$p=\frac{x-z}{m},\quad 1-p=\frac{m-x+z}{m}=\frac{x'+z}{m}. \quad (22)$$

И такъ

$$\left(\frac{p}{x+l}\right)^{x+l}=\frac{1}{m^{x+l}}\cdot\left(\frac{x-z}{x+l}\right)^{x+l}$$
$$\left(\frac{1-p}{x'-l}\right)^{x'-l}=\frac{1}{m^{x'-l}}\cdot\left(\frac{x'+z}{x'-l}\right)^{x'-l},$$

въ слѣдствіе чего

$$X=\left(\frac{x-z}{x+l}\right)^{x+l}\cdot\left(\frac{x'+z}{x'-l}\right)^{x'-l}\cdot\sqrt{\frac{m}{2\pi xx'}}\cdot\left(1+\frac{x-x'}{2xx'}.l\right). \quad (23)$$

Но

$$\left(\frac{x-z}{x+l}\right)^{x+l}=e^{(x+l)\left[\log\left(1-\frac{z}{x}\right)-\log\left(1+\frac{l}{x}\right)\right]};$$

обративъ $\log.\left(1-\frac{z}{x}\right)$ и $\log.\left(1+\frac{l}{x}\right)$ въ ряды, и опустивъ въ нихъ члены порядка $\frac{1}{x^2}$ по причинѣ множителя $x+l$, получимъ для разности логариѳмовъ

$$-\frac{z}{x}-\frac{l}{x}+\frac{l^2}{2x^2}-\frac{l^3}{3x^3}.$$

Умножимъ эти четыре члена на $x+l$; такъ какъ въ произведеніи послѣдній членъ $\frac{l^4}{3x^3}$ будетъ порядка $\frac{1}{x}$, то его должно откинуть, въ слѣдствіе чего найдется

$$(x+l)\left[\log.\left(1-\frac{z}{x}\right)-\log.\left(1+\frac{l}{x}\right)\right]=-z-l+\frac{l^2}{2x}-\frac{l^3}{3x^2}-\frac{lz}{x}-\frac{l^2}{x}+\frac{l^3}{2x^2}.$$

И такъ

$$\left(\frac{x-z}{x+l}\right)^{x+l}=e^{-z-l-\frac{l^2}{2x}-\frac{lz}{x}+\frac{l^3}{6x^2}}.$$

Подобнымъ образомъ получимъ

$$\left(\frac{x'+z}{x'-l}\right)^{x'-l} = e^{z+l-\frac{l^2}{2x'}-\frac{lz}{x'}-\frac{l^3}{6x'^2}}.$$

Слѣдовательно, наблюдая что $x+x'=m$,

$$\left(\frac{x-z}{x+l}\right)^{x+l}\cdot\left(\frac{x'+z}{x'-l}\right)^{x'-l} = e^{-\frac{ml^2}{2xx'}}.e^{-\frac{mlz}{xx'}+\frac{l^3}{6}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x'^2}\right)} = e^{-\frac{ml^2}{2xx'}}.\left[1-\frac{mlz}{xx'}+\frac{l^3}{6}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x'^2}\right)\right].$$

Подставивъ эту величину въ формулу (23), и откинувъ надлежащіе члены при перемноженіи подскобочныхъ величинъ, найдемъ окончательно:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(x+l).1.2.3\ldots(x'-l)}\cdot p^{x+l}(1-p)^{x'-l} = \\ \qquad\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2xx'}}.e^{-\frac{ml^2}{2xx'}}\cdot\left(1-\dfrac{mlz}{xx'}+\dfrac{x-x'}{2xx'}.l+\dfrac{l^3}{6x^2}-\dfrac{l^3}{6x'^2}\right).\end{array}\right\} \quad (24)$$

Таково выраженіе перваго члена вѣроятности P, опредѣленнаго съ точностію до величинъ порядка $\frac{1}{m}$. Внося послѣдовательно въ эту формулу $l-1$, $l-2$, ... 0, -1, -2, .. $-l$ на мѣсто l, получимъ по порядку всѣ члены второй части уравненія (20). Приближенная величина средняго, наибольшаго члена, соотвѣтствующаго очевидно предположенію $l=0$, будетъ

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2xx'}}.$$

Такъ какъ это выраженіе изображаетъ величину порядка $\frac{1}{\sqrt{m}}$, то и слѣдуетъ заключить, согласно съ замѣченнымъ уже въ N° 19, что абсолютныя вѣроятности правдоподобнѣйшихъ событій уменьшаются съ увеличеніемъ числа испытаній.

Легко показать теперь, что съ увеличеніемъ числа испытаній, отношеніе члена (24) въ разложеніи $[p+(1-p)]^m$ къ наибольшему, будетъ уменьшаться съ возрастаніемъ численной величины l, то есть по мѣрѣ того, какъ разсматриваемый членъ будетъ болѣе удаляться отъ наибольшаго, въ лѣвую или въ правую сторону. Это отношеніе можетъ быть сдѣлано какъ угодно малымъ. Дѣйствительно, отношеніе, о которомъ говоримъ, выразится чрезъ

$$\frac{1-\frac{mlz}{xx'}+\ldots\ldots}{e^{\frac{ml^2}{2xx'}}}.$$

Эта дробь будетъ уже менѣе $\frac{1}{e}=\frac{1}{2{,}718\ldots}$ при $\frac{ml^2}{2xx'}=1$, то есть при $l=\sqrt{\frac{2xx'}{m}}$; если положимъ, что l есть величина порядка, превышающаго $\sqrt{m}$, напримѣръ равна $m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ разумѣя подъ ε правильную положительную дробь, то найдется

$$e^{\frac{ml^2}{2xx'}} = e^{\frac{m^2}{2xx'}}.m^{2\varepsilon},$$

и какъ $\frac{m^2}{2xx'}$, есть количество нулеваго порядка въ отношеніи къ m, то вторая часть послѣдняго уравненія, по причинѣ показателя $m^{2\varepsilon}$, будетъ неопредѣленно возрастать съ увеличеніемъ m; самое же отношеніе, напротивъ того, будетъ уменьшаться по произволенію. Изъ этого должно заключить о справедливости предложенія, о которомъ упомянуто въ концѣ N° 19, на счётъ увеличенія относительныхъ вѣроятностей.

Перемѣнивъ въ формулѣ (24) знакъ величины l, найдется послѣдній членъ уравн: (20). Сложивъ потомъ выраженія для обоихъ членовъ, и изобразивъ ихъ сумму чрезъ y, получимъ

$$y=\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2xx'}}.e^{-\frac{ml^2}{2xx'}}.$$

Если къ интегралу въ конечныхъ разностяхъ Σy, взятому относительно l, отъ $l=0$ до разсматриваемой величины l, придадимъ самую величину y, равную суммѣ двухъ крайнихъ членовъ второй части формулы (20), то получимъ величину P, увеличенную среднимъ, то есть наибольшимъ членомъ. Слѣдовательно, изобразивъ наибольшій членъ чрезъ Y, будетъ

$$P=\overset{l}{\underset{0}{\Sigma}}y+y-Y.$$

Но, по формулѣ Эйлера, которая уже употреблена въ N° 21, имѣемъ

$$\Sigma y=\int ydl-\frac{1}{2}y+\frac{1}{12}.\frac{dy}{dl}-\ldots+C.$$

При той степени приближенія, съ которою имѣемъ въ виду вычислить величину P, членъ $\frac{1}{12}.\frac{dy}{dx}$, и всѣ слѣдующіе за нимъ, должны быть опущены. Дѣйствительно, такъ какъ выраженіе

$$\frac{dy}{dl}=-\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2xx'}}\cdot\frac{ml}{xx'}\cdot e^{-\frac{ml^2}{2xx'}}$$

имѣетъ множителемъ коэффиціентъ $\frac{m^{\frac{3}{2}}.l}{x^{\frac{3}{2}}.x'^{\frac{3}{2}}}$, то есть величину порядка $\frac{1}{m}$, то оно должно быть откинуто. Дальнѣйшіе члены будутъ порядковъ еще низшихъ въ отношеніи къ m, и потому также должны быть отброшены. Слѣдовательно

$$\Sigma y=\int ydl-\frac{1}{2}y+C.$$

Постоянное количество C исключится изъ этого уравненія, когда возьмемъ интегралы между предѣлами. Такъ какъ при $l=0$, y обращается въ $2Y$, то получимъ

$$\sum_0^l y = \int_0^l y\,dl - \frac{1}{2}y + Y,$$

откуда

$$P = \int_0^l y\,dl + \frac{1}{2}y.$$

Если для краткости положимъ

$$t = \frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{2xx'}},$$

то при $l = 0$ будетъ и $t = 0$, и найденная величина для P приметъ слѣдующій видъ:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2xx'}}\cdot e^{-t^2}, \quad \text{гдѣ } t = \frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{2xx'}}. \tag{25}$$

Вотъ выраженіе искомой вѣроятности P съ точностію до величинъ порядка $\frac{1}{m}$. Чѣмъ m будетъ значительнѣе, тѣмъ формула (25) съ бо́льшею степенью приближенія опредѣлитъ P, и она сдѣлалась бы въ строгомъ смыслѣ точною, еслибъ предположили m безконечнымъ.

Найденная величина P изображаетъ вѣроятность, что по совершеніи весьма значительнаго числа m испытаній, число повтореній событія A будетъ заключаться между предѣлами $x+l$ и $x-l$, а B, между $x'-l$ и $x'+l$, разумѣя подъ x и x' величины цѣлыя, которыхъ сумма равна m, а отношеніе $\frac{x}{x'}$ наиближе подходитъ къ отношенію $\frac{p}{1-p}$ простыхъ вѣроятностей событій A и B; l, какъ сказано выше, означаетъ число, котораго порядокъ не превышаетъ $\sqrt{m}$. Но, въ силу формулы (22), имѣемъ $x = mp + z$, гдѣ численная величина $z < 1$; слѣдовательно

$$\frac{x+l}{m} - p = \frac{z}{m} + \frac{l}{m} \quad \text{и} \quad \frac{x-l}{m} - p = \frac{z}{m} - \frac{l}{m}.$$

Подставляя во вторыя части обоихъ уравненій на мѣсто l величину $\frac{t\sqrt{2xx'}}{\sqrt{m}}$, получимъ формулу

$$\frac{z}{m} \mp \frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}}, \tag{26}$$

въ которой, по причинѣ $x = mp + z$ и $x' = m(1-p) - z$, будетъ

$$\sqrt{2xx'} = m\sqrt{2p(1-p) + \frac{2z}{m}(1-2p) - \frac{2z^2}{m^2}}.$$

На такомъ основаніи формула (25) изобразитъ вѣроятность, что разность между отношеніемъ дѣйствительнаго числа повтореній событія A къ полному числу испытаній, и простою вѣроятностію p того же событія A, не выходитъ изъ предѣловъ

$$\frac{z}{m} - \frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}} \quad \text{и} \quad \frac{z}{m} + \frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}},$$

при чёмъ промежутокъ $\frac{2t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}}$ между этими предѣлами будетъ порядка $\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Формулы (25) и (26) заключаютъ въ себѣ полное рѣшеніе первой части предложеннаго въ началѣ N° 22 вопроса. Но, для численнаго рѣшенія разсматриваемаго рода задачъ, надобно еще показать способы для вычисленія по приближенію опредѣленнаго интеграла $\int_0^t e^{-t^2}dt$, который входитъ во вторую часть формулы (25). Предлагаемъ здѣсь нѣкоторыя изслѣдованія объ этомъ предметѣ, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, отсылаемъ читателей къ ПРИМѢЧАНІЮ IV.

23. Замѣняя функцію e^{-t^2} ея разложеніемъ $1 - t^2 + \frac{t^4}{1.2} - \frac{t^6}{1.2.3} + \ldots$, и интегрируя каждый членъ между предѣлами 0 и t, получимъ,

$$\int_0^t e^{-t^2}dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{t^9}{9} - \ldots\ldots \tag{27}$$

Интегрированіе по частямъ, произведенное въ видѣ

$$\int_0^t e^{-t^2}dt = te^{-t^2} + 2\int_0^t e^{-t^2}t^2dt$$

$$\int_0^t e^{-t^2}t^2dt = \frac{t^3}{3}\cdot e^{-t^2} + \frac{2}{3}\int_0^t e^{-t^2}t^4dt$$

$$\int_0^t e^{-t^2}t^4dt = \frac{t^5}{5}\cdot e^{-t^2} + \frac{2}{5}\int_0^t e^{-t^2}t^6dt$$

. . . .

приведетъ насъ еще къ слѣдующему разложенію:

$$\int_0^t e^{-t^2}dt = te^{-t^2}\left[1 + \frac{(2t^2)}{1.3} + \frac{(2t^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2t^2)^3}{1.3.5.7} + \cdots\right] \tag{28}$$

Ряды (27) и (28) оба сходящіеся для всѣхъ возможныхъ величинъ t [ПРИМѢЧАНІЕ III, § 4]. Первый изъ нихъ очень выгоденъ для значеній этой перемѣнной, не превосходящихъ единицы. Вообще, оба ряда будутъ достаточно сходящіеся, когда $2t^2$ не превзойдетъ 4. Но ежели $2t^2 > 4$, то для опредѣленія интеграла съ достаточною точностію, потребуется вычислить много членовъ, что́ на практикѣ весьма неудобно.

Въ этомъ случаѣ выгоднѣе будетъ употребить другое разложеніе. Изобразивъ предложенный интегралъ въ видѣ

$$\int_0^t e^{-t^2}dt = \int_0^\infty e^{-t^2}dt - \int_t^\infty e^{-t^2}dt,$$

и замѣтивъ, что $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ [ПРИМѢЧАНІЕ IV, § 1), получимъ

$$\int_0^t e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_t^\infty e^{-t^2}dt.$$

Интегрированіе по частямъ послѣдняго интеграла между предѣлами t и ∞, доставитъ послѣдовательно

$$\int_t^\infty e^{-t^2}dt = \int_t^\infty \frac{1}{t}.e^{-t^2}tdt = \frac{e^{-t^2}}{2t} - \int_t^\infty e^{-t^2}.\frac{dt}{2t^2}$$

$$\int_t^\infty e^{-t^2}.\frac{dt}{2t^2} = \int_t^\infty \frac{1}{2t^3}.e^{-t^2}tdt = \frac{e^{-t^2}}{4t^3} - \int_t^\infty e^{-t^2}.\frac{1.3}{4t^4}.dt$$

$$\int_t^\infty e^{-t^2}.\frac{1.3}{4t^4}dt = \int_t^\infty \frac{1.3}{4t^5}.e^{-t^2}tdt = \frac{1.3}{8t^5}e^{-t^2} - \int_t^\infty e^{-t^2}.\frac{1.3.5}{8t^6}.dt$$

....

откуда заключаемъ

$$\int_t^\infty e^{-t^2}dt = \frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{(2t^2)} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \ldots\ldots\right],$$

и наконецъ

$$\int_0^t e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{(2t^2)} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \ldots\ldots\right]. \qquad (29)$$

Рядъ

$$\frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{(2t^2)} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \ldots\ldots\right] \qquad (30)$$

въ первыхъ своихъ членахъ, и для значеній $2t^2$ превосходящихъ 4, будетъ достаточно сходящійся. Но легко видѣть, что начиная съ нѣкотораго дальнѣйшаго члена, который весьма легко опредѣляется, строка становится расходящеюся. И дѣйствительно, такъ какъ численныя величины двухъ смежныхъ общихъ членовъ изобразится чрезъ

$$\frac{e^{-t^2}}{2t}.\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{(2t^2)^{n-1}}, \quad \frac{e^{-t^2}}{2t}.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2t^2)^n},$$

то отношеніе ихъ будетъ $\frac{2n-1}{2t^2}$,

и оно сдѣлается больше единицы при $t < \sqrt{\frac{2n-1}{2}}$; слѣдовательно, самая строка обратится въ расходящуюся, какъ скоро достигнемъ члена, для котораго n равенъ ближайшему цѣлому числу, заключающемуся въ дроби $\frac{2t^2+1}{2}$. Вопросъ состоитъ въ томъ, можно ли, при такихъ обстоятельствахъ, употреблять рядъ (30). Чтобы рѣшить недоумѣніе утвердительно, достаточно показать, что если ограничимъ разложеніе нѣсколькими первыми его членами, то остатокъ ряда будетъ величина конечная, мéньшая численной величины того члена строки, на которомъ остановились. Положимъ, напримѣръ, что останавливаемся на членѣ

$$\frac{e^{-t^2}}{2t}.\frac{1.3.5}{(2t^2)^3};$$

остатокъ ряда, въ силу формулы

$$\int_t^\infty e^{-t^2}.\frac{1.3.5}{8t^6}dt = \frac{1.3.5}{16t^7}.e^{-t^2} - \int_t^\infty e^{-t^2}.\frac{1.3.5.7}{16t^8}dt,$$

изобразится, независимо отъ знака, интеграломъ

$$\frac{1.3.5.7}{16}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^8}.dt,$$

который, какъ легко видѣть, менѣе члена $\frac{1.3.5}{16t^7}.e^{-t^2}$; и въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ первая часть послѣдняго уравненія положительная, ибо подъинтегральная функція $e^{-t^2}.\frac{1.3.5}{8t^6}$ существенно положительная, то и должно быть

$$\frac{1.3.5}{16t^7}e^{-t^2} > \int_t^\infty e^{-t^2}.\frac{1.3.5.7}{16t^8}dt,$$

что̀ и имѣли въ виду доказать. Отсюда заключаемъ, что строка (30), а слѣдовательно и формула (29), могутъ быть употребляемы съ полною надёжностію до члена, гдѣ рядъ становится расходящимся. Такого рода разложенія, названныя Лапласомъ *предѣльными рядами* (*séries-limites*), имѣютъ то̀ свойство, общее съ сходящимися рядами, у которыхъ члены попеременно положительные и отрицательные, что получаемыя послѣдовательно суммы будутъ больше или меньше истинной, смотря по тому, на какомъ членѣ останавливаемся, на положительномъ или на отрицательномъ. Лапласъ*) нашелъ другое, весьма примѣчательное выраженіе для интеграла $\int_t^\infty e^{-t^2}dt$; онъ изобразилъ его посредствомъ непрерывной дроби въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int_t^\infty e^{-t^2}dt = \frac{e^{-t^2}}{2t}.\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+.}}}}} \qquad (31)$$

гдѣ для сокращенія $q = \frac{1}{2t^2}$. Замѣтимъ, что какъ бы далеко не продолжили это разложеніе, оно всегда останется сходящимся, и главныя дроби будутъ попеременно больше и меньше настоящей величины интеграла. Для доказательства этой формулы, отсылаемъ къ ПРИМѢЧАНІЮ IV (§ 3).

*) *Mécanique céleste, dixième section.*

24. Если подставимъ теперь въ уравненіе (25) величину интеграла, опредѣляемаго формулою (29), то получимъ слѣдующее значеніе для вѣроятности P:

$$P = 1 - \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{(2t^2)} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \dots\right] + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2m\pi\left[p(1-p) + \frac{z}{m}(1-2p) - \frac{z^2}{m^2}\right]}}. \quad (32)$$

Здѣсь можно сдѣлать два предположенія: можно допустить, что величина $t = \frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{2xx'}}$, съ возрастаніемъ числа m испытаній, не измѣняется; при такомъ условіи вѣроятность P, опредѣляемая весьма приблизительно формулою (25), сохранитъ также величину почти постоянную; въ то же время промежутокъ, заключающійся между предѣлами (26), и равный $\frac{2l}{m} = \frac{2l}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$, будетъ болѣе и болѣе стѣсняться, ибо второй множитель $\frac{1}{\sqrt{m}}$ этого произведенія уменьшается неопредѣленно, между тѣмъ какъ первый $\frac{2l}{\sqrt{m}}$ остается чувствительно постояннымъ, въ чёмъ удостовѣряемся давъ ему видъ $\frac{2l}{\sqrt{m}} = 2t\frac{\sqrt{2xx'}}{m}$, и замѣтивъ, что $\frac{\sqrt{2xx'}}{m}$ чрезвычайно мало разнствуетъ отъ $\frac{\sqrt{2ab}}{a+b}$. Если, напротивъ того, положимъ промежутокъ $\frac{2l}{m}$ неизмѣннымъ, то величина t будетъ возрастать вмѣстѣ съ m, и почти пропорціонально $\sqrt{m}$, ибо $t = \frac{l}{m}\sqrt{\frac{m^2}{2xx'}} \cdot \sqrt{m}$, гдѣ $\frac{l}{m}$ предполагается неизмѣннымъ, а $\sqrt{\frac{m^2}{2xx'}}$ весьма мало разнствуетъ отъ $\frac{a+b}{\sqrt{2ab}}$. Въ этомъ случаѣ, вторая часть формулы (32), изображающая значеніе вѣроятности P, по причинѣ неопредѣленно уменьшающагося множителя e^{-t^2} при возрастающемъ t, будетъ стремиться съ быстротою къ единицѣ. Отсюда должно заключить, что при неопредѣленномъ повтореніи испытаній, отношеніе числа появленій событія A къ числу появленій B, непрестанно приближается къ отношенію простыхъ вѣроятностей событій A и B, отъ котораго наконецъ разнствуетъ какъ угодно мало. Въ этой правильности въ повтореніи случайностей, обнаруживающейся при значительномъ рядѣ испытаній, состоитъ, какъ уже сказано выше, примѣчательная теорема Якова Бернулли.

25. Обратимся теперь къ рѣшенію второй части занимающаго насъ вопроса. Изобразимъ чрезъ i наблюденное число появленій событія A при весьма значительномъ числѣ m испытаній. Формула (25) изобразитъ вѣроятность, что разность $\frac{i}{m} - p$ заключается между предѣлами $\frac{z}{m} \mp \frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}}$, или, иначе, что

$$\frac{i}{m} - p > \frac{z}{m} - \frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}} \quad \text{и} \quad \frac{i}{m} - p < \frac{z}{m} + \frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}},$$

откуда

$$p < \frac{i}{m} - \frac{z}{m} + \frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}} \quad \text{и} \quad p > \frac{i}{m} - \frac{z}{m} - \frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}}.$$

Такъ какъ вѣроятность, что число появленій событія A заключается между предѣлами $x \pm l$, гдѣ l не превышаетъ порядка $\sqrt{m}$, весьма близка къ единицѣ, то можно допустить, что i будетъ разнствовать отъ x величиною, не превышающею того же порядка $\sqrt{m}$. Сверхъ того, функція $\frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}}$, при обыкновенной величинѣ t, будетъ порядка $\frac{1}{\sqrt{m}}$; изъ этого заключаемъ, что условившись откидывать члены порядка $\frac{1}{m}$, можно, безъ ощутительной погрѣшности, замѣнить въ радикалѣ $\sqrt{2xx'}$ величину x числомъ i, а x', разностію $m-i$. На такомъ основаніи, откинувъ дробь $\frac{z}{m}$, получимъ для предѣловъ вѣроятности p слѣдующее выраженіе:

$$\frac{i}{m} \mp \frac{t\sqrt{2i(m-i)}}{m\sqrt{m}}, \quad \text{гдѣ } t = \frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{2i(m-i)}} \quad (33)$$

а вѣроятность P', что p заключается между этими предѣлами, опредѣлится формулою

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2i(m-i)}} \cdot e^{-t^2}. \quad (34)$$

Вопросъ, рѣшенный въ этомъ N°, относится къ опредѣленію вѣроятности *a posteriori*. Въ Главѣ VII нашей книги, мы увидимъ, какимъ образомъ подобные вопросы рѣшаются на основаніи другихъ началъ.

26. Пояснимъ теперь употребленіе формулъ (25), (26), (33) и (34) численными приложеніями. Начнемъ съ примѣра, помѣщеннаго въ самомъ сочиненіи Якова Бернулли*). Онъ предполагаетъ, что число статочностей, благопріятствующихъ событію A, равно 30, а событію B, 20, и ищетъ, сколько должно произвести испытаній, чтобы получить вѣроятность, по крайней мѣрѣ равную $\frac{1000}{1001}$, предѣловъ $\frac{31}{50}$ и $\frac{29}{50}$, между которыми заключалось бы отношеніе наблюденнаго числа повтореній событія A къ полному числу испытаній. На основаніи своего способа, Бернулли нашелъ, что число испытаній равно 25550. Предполагая вопросъ рѣшеннымъ, и приводя означенія Бернулли къ нашимъ, будемъ имѣть:

$$p = \frac{30}{50}, \quad m = 25550, \quad x = 15330, \quad x' = 10220,$$

$$z = 0, \quad l = \frac{31}{50}m - x = 511, \quad P = \frac{1000}{1001} = 0{,}99900\dots$$

Для приложенія къ настоящему примѣру формулъ (25) и (26), примемъ вѣроятность P за неизвѣстную, а всѣ прочія величины за данныя. Формула (26) даетъ непосредственно предѣлы

$$\pm\frac{t\sqrt{2xx'}}{m\sqrt{m}} = \pm\frac{l}{m} = \pm\frac{1}{50}$$

для разности между простою вѣроятностію событія A и отношеніемъ наблюденнаго числа

*) *Ars conjectandi, Pars quarta*, стр. 238.

повторенії того же событія къ полному числу испытаній. Далѣе замѣчаемъ, что l можно принять за величину одного порядка съ $\sqrt{m}$, ибо, въ настоящемъ случаѣ, имѣемъ $l=(3,1968\ldots)\sqrt{m}$; слѣдовательно, можемъ употребить съ надёжностію формулы, которыя выведены въ томъ предположеніи, что l есть величина порядка $\sqrt{m}$. Вычисляя t по формулѣ $t=\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{2xx'}}$, получимъ $t=4,6143$, откуда $t^2=21,292$ и $\frac{1}{2t^2}=0,02348$.

Такъ какъ $t>4$, то для опредѣленія вѣроятности P, употребляемъ формулу (32), въ которой, по причинѣ чрезвычайной малости множителя $\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2m\pi}}$, послѣдній членъ можетъ быть откинутъ. Изъ безконечнаго же ряда достаточно удержать первые два члена $1-\frac{1}{2t^2}$. Такимъ образомъ найдется

$$1-\frac{1}{2t^2}=0,97652, \quad \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}}=\frac{6,923}{10^{11}},$$

и слѣдовательно

$$P=1-\frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2t^2}\right)=1-\frac{6,923}{10^{11}}.(0,97652)=0,9999999994\ldots.$$

Эта величина вѣроятности такъ близка къ единицѣ, что относящуюся къ ней случайность, именно, надёжность предѣловъ $\pm\frac{1}{80}$, можно считать достовѣрною. Замѣтимъ, что у Бернулли та же вѣроятность выражается дробью 0,99900..., которая хотя и мало разнствуетъ отъ единицы, но болѣе однакожъ чѣмъ значеніе, найденное сей-часъ посредствомъ формулы (32). Послѣднее точнѣе. Вообще, вникнувъ въ сущность способовъ Бернулли и Лапласа, удостовѣримся, что формулы послѣдняго имѣютъ преимущество со стороны степени приближенія, съ которою ведутъ къ численному рѣшенію вопросовъ.

Для втораго примѣра предложимъ себѣ рѣшеніе слѣдующей задачи: по извѣстному числу рожденій младенцевъ мужескаго и женскаго пола въ теченіи опредѣленнаго времени, найти вѣроятность, что возможность рожденія младенца мужескаго пола заключается между данными предѣлами. Легко видѣть, что этотъ вопросъ рѣшается посредствомъ формулъ (33) и (34), выведенныхъ въ N° 25. Приложимъ ихъ къ даннымъ, относящимся къ С. Петербургу за 1840 годъ. Въ Статистическихъ Таблицахъ показано, что въ упомянутомъ 1840 году родилось въ С. Петербургѣ 11670 младенцевъ Православнаго исповѣданія, въ томъ числѣ 5919 мужескаго и 5751 женскаго пола. Поэтому

$$i=5919, \quad m-i=5751, \quad m=11670;$$

слѣдовательно, предѣлы вѣроятности рожденія младенца мужескаго пола, будутъ, по формулѣ (33),

$$\frac{i}{m}\mp\frac{t\sqrt{2i(m-i)}}{m\sqrt{m}}=0,50719\mp t.0,00654,$$

разумѣя подъ t произвольное число. Если примемъ $t=1$, то получимъ для предѣловъ числа

$$0,50719\mp 0,00654,$$

то есть

$$0,50065 \quad \text{и} \quad 0,51373.$$

Вѣроятность P' этихъ предѣловъ, по уравненію (34), будетъ

$$P'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2i(m-i)}}.c^{-1}.$$

Вычисляя $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ по формулѣ (27), а второй членъ послѣдняго уравненія посредствомъ логариѳмовъ, получимъ

$$\int_0^1 e^{-t^2}dt=0,74684\ldots \quad \text{и} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-t^2}dt=0,84272\ldots, \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2i(m-i)}}.e^{-1}=0,00271\ldots$$

Слѣдовательно

$$P'=0,84272+0,00271=0,84543\ldots$$

И такъ, вѣроятность, что возможность рожденія младенца мужескаго пола въ С. Петербургѣ въ 1840 году заключалась между предѣлами 0,50065 и 0,51373, равна 0,84543, или, иначе: можно ставить слишкомъ 84 противъ 16, что возможность, о которой говорится, заключалась въ сказанныхъ предѣлахъ.

Если положимъ $t=2$, то найдемъ менѣе тѣсные предѣлы, именно:

$$0,50719\mp 2.0,00654=0,50719\mp 0,01308,$$

или

$$0,49411 \quad \text{и} \quad 0,52027;$$

за то получимъ для вѣроятности значеніе, которое, несравненно ближе чѣмъ предъидущее, подходитъ къ единицѣ. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ будетъ

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^2 e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{2i(m-i)}}.e^{-4};$$

вычисляя интегралъ $\int_0^2 e^{-t^2}dt$ по формулѣ (29), и помноживъ его потомъ на $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, получимъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^2 e^{-t^2}dt=0,99532\ldots;$$

для втораго члена найдемъ

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2i(m-i)}}.e^{-4}=0,00013\ldots$$

Слѣдовательно

$$P=0,99532+0,00013=0,99545.$$

И такъ, вѣроятность предѣловъ 0,49411 и 0,52027 равна 0,99545, то есть, можно ставить слишкомъ $99\frac{1}{2}$ противъ $\frac{1}{2}$, что возможность рожденія младенца мужескаго пола въ 1840 году въ С. Петербургѣ, заключалась между этими новыми предѣлами.

27. Всѣ предложенія, доказанныя въ этой Главѣ, могутъ быть распространены на случай сколькихъ угодно событій. Такъ разсматривая три простыя событія A, B и C, съ соотвѣтственными имъ вѣроятностями

$$\frac{a}{a+b+c},\quad \frac{b}{a+b+c},\quad \frac{c}{a+b+c},$$

окажется, что правдоподобнѣйшее событіе $A^{\lambda}B^{\mu}C^{\nu}$ есть то̀, для котораго λ, μ, ν будутъ числа цѣлыя, наиближе подходящія къ пропорціональности числамъ a, b, c, или, что̀ всё равно, числа цѣлыя такого свойства, что отношенія $\frac{\lambda}{a}$, $\frac{\mu}{b}$, $\frac{\nu}{c}$ наименѣе разнствуютъ между собою.

Чтобъ доказать это предложеніе, положимъ, что вмѣсто трехъ возможныхъ случайностей A, B и C, разсматриваются только двѣ, именно, появленіе событія A, и его непоявленіе, которое примемъ за новое событіе, и назовемъ D. И такъ, D изображаетъ какое ни есть соединеніе B съ C. Если означимъ чрезъ d сумму $b+c$ статочностей, благопріятствующихъ D, то простыя вѣроятности для A и D выразятся соотвѣтственно дробями

$$\frac{a}{a+d} \text{ и } \frac{d}{a+d}.$$

На такомъ основаніи, пусть будетъ m полное число испытаній, а $A^{\lambda}D^{\delta}$, гдѣ $\lambda+\delta=m$, правдоподобнѣйшее совокупленіе событій A и D. Въ силу N° 18 показатели λ и δ должны быть пропорціональны простымъ вѣроятностямъ $\frac{a}{a+d}$ и $\frac{d}{a+d}$, почему и получимъ

$$\frac{\lambda}{\delta}=\frac{a}{d},\text{ и сверхъ того } \lambda+\delta=m;$$

отсюда

$$\lambda=\frac{ma}{a+d}=\frac{ma}{a+b+c} \text{ и } \delta=\frac{md}{a+d}.$$

Эти величины для λ и δ показываютъ, что вѣроятнѣйшее совокупленіе событій A и D соотвѣтствуетъ предположенію, что A повторилось $\frac{ma}{a+b+c}$ разъ, а D, $\frac{md}{a+d}$ разъ. Но какъ само D составлено изъ нѣкотораго совокупленія B съ C, то и должно найти, какое соединеніе $B^{\mu}C^{\nu}$ будетъ наивѣроятнѣйшимъ. Такимъ образомъ мы опять приведены къ опредѣленію правдоподобнѣйшаго сложнаго событія $B^{\mu}C^{\nu}$, составленнаго изъ двухъ простыхъ B и C, и какъ вѣроятности сихъ послѣднихъ, независимо отъ A, суть $\frac{b}{d}=\frac{b}{b+c}$ и $\frac{c}{d}=\frac{c}{b+c}$, то μ и ν будутъ пропорціональны этимъ дробямъ. Съ другой стороны, число испытаній, приводящихъ въ правдоподобнѣйшемъ случаѣ къ D, есть $\frac{md}{a+d}=\frac{m(b+c)}{a+b+c}$; слѣдовательно будетъ

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{b}{c} \text{ и } \mu+\nu=\frac{m(b+c)}{a+b+c},$$

откуда

$$\mu=\frac{mb}{a+b+c} \text{ и } \nu=\frac{mc}{a+b+c}.$$

Если бы случилось, что найденныя три выраженія

$$\lambda=\frac{ma}{a+b+c},\quad \mu=\frac{mb}{a+b+c},\quad \nu=\frac{mc}{a+b+c}$$

приводились къ цѣлымъ числамъ, то получили бы, въ строгомъ смыслѣ,

$$\frac{\lambda}{a}=\frac{\mu}{b}=\frac{\nu}{c}=\frac{m}{a+b+c},$$

сообразно съ тѣмъ, что̀ имѣли въ виду доказать.

Разсуждая какъ въ предъидущихъ нумерахъ увидимъ, что при неопредѣленно возрастающемъ числѣ испытаній, отношенія между наблюденными числами x, x', x'' повтореній событій A, B, C, стремятся къ равенству съ отношеніями ихъ простыхъ вѣроятностей; или, иначе: чѣмъ рядъ испытаній будетъ продолженъ далѣе, тѣмъ съ бо̀льшею точностію будемъ имѣть $\frac{x}{a}=\frac{x'}{b}=\frac{x''}{c}$. Вѣроятность P, что отношеніе $\frac{x}{x+x'+x''}$ заключается между предѣлами $\frac{a}{a+b+c}\pm\omega$, разумѣя подъ ω весьма малое число, опредѣлится и въ этомъ случаѣ формулою (25).

ИЗСЛѢДОВАНІЕ ОДНОГО ЧАСТНАГО СЛУЧАЯ, ВЪ КОТОРОМЪ СТАТОЧНОСТИ ИЗМѢНЯЮТСЯ ВО ВРЕМЯ ИСПЫТАНІЙ.

28. Когда число статочностей, благопріятствующихъ появленію какого либо событія A, измѣняется съ каждымъ производимымъ испытаніемъ, то вѣроятность опредѣленнаго числа повторенія A будетъ зависѣть отъ закона измѣненія статочностей, относящихся къ этому событію. Напримѣръ, пусть будетъ сосудъ заключающій 5 шаровъ, 2 бѣлыхъ и 3 чёрныхъ; вынимаемъ изъ него на-удачу нѣсколько разъ сряду по одному шару, который не кладемъ обратно въ сосудъ. Въ такомъ предположеніи, полное число статочностей уменьшается одною единицею при каждомъ новомъ испытаніи. Изобразимъ чрезъ A появленіе бѣлаго, а чрезъ B появленіе чёрнаго шара. Въ силу N°N° 3 и 4 найдемъ слѣдующія вѣроятности для возможныхъ сложныхъ событій:

	Событія:	*Ихъ вѣроятности:*
при 1-омъ испытаніи:	A	$\frac{2}{5}$
	B	$\frac{3}{5}$
при 2-омъ испытаніи:	AA	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$
	AB	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$
	BB	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$
при 3-емъ испытаніи:	AAB	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}$
	ABB	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$
	BBB	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}$
при 4-омъ испытаніи:	$AABB$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}$
	$ABBB$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$
при 5-омъ испытаніи:	$AABBB$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{1}$.

Если условимся не принимать въ расчётъ порядка послѣдованія шаровъ бѣлыхъ и чёрныхъ, то вѣроятности нѣкоторыхъ изъ сихъ сложныхъ событій увеличатся (№ 7). Такъ, напримѣръ, вѣроятность $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ событія AB удвоится, потому что кромѣ его имѣемъ событіе BA, вѣроятность котораго равна также $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$. Подобнымъ образомъ увидимъ, что вѣроятность $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}$ событія AAB должно утроить по той причинѣ, что каждому изъ совокупленій AAB, ABA, BAA соотвѣтствуетъ одинаковая вѣроятность $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}$. Соображаясь съ этимъ замѣчаніемъ, составится слѣдующая таблица:

	Событія:	*Ихъ вѣроятности:*
1-ое испытаніе:	A	$\frac{2}{5}$
	B	$\frac{3}{5}$
2-ое испытаніе:	AA	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$
	AB	$2.\ \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{10}$
	BB	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$
3-ье испытаніе:	AAB	$3.\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{3}{10}$
	ABB	$3.\ \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{10}$
	BBB	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$
4-ое испытаніе:	$AABB$	$6.\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{6}{10}$
	$ABBB$	$4.\ \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{10}$
5-ое испытаніе:	$AABBB$	$10.\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{1}=1$,

изъ которой усматриваемъ, что сумма вѣроятностей всѣхъ сложныхъ событій, относящихся къ каждой совокупности испытаній, равна единицѣ, какъ и должно быть.

Рѣшеніе этой самой задачи, разсматриваемой въ общемъ ея видѣ, приведетъ насъ къ нѣкоторымъ любопытнымъ замѣчаніямъ. Положимъ, что первоначальное число шаровъ, заключавшихся въ сосудѣ, равно m, именно, a бѣлыхъ и b чёрныхъ; слѣдовательно $m=a+b$. Означимъ, какъ и выше, чрезъ A появленіе бѣлаго шара, а чрезъ B извлеченіе чёрнаго. При первомъ испытаніи вѣроятности событій A и B будутъ соотвѣтственно $\frac{a}{m}$ и $\frac{b}{m}$. Послѣ перваго испытанія, полное число шаровъ, заключающихся въ сосудѣ, будетъ уже не m, а $m-1$, именно: $a-1$ бѣлыхъ и b чёрныхъ если выдернулся сперва бѣлый шаръ, а a бѣлыхъ и $b-1$ чёрныхъ, если выдернулся чёрный. Слѣдовательно, въ силу № 4, вѣроятность извлеченія бѣлыхъ шаровъ въ первые два пріёма будетъ $\frac{a}{m}\cdot\frac{a-1}{m-1}$. Вѣроятность появленія въ первый разъ бѣлаго, а во второй чёрнаго шара, изобразится произведеніемъ $\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{m-1}$. Наконецъ, вѣроятность двукратнаго появленія чёрнаго шара равна $\frac{b}{m}\cdot\frac{b-1}{m-1}$. Если же не будемъ обращать вниманія на порядокъ появленія бѣлыхъ и чёрныхъ шаровъ, то при второмъ испытаніи получимъ:

Событія:	*Ихъ вѣроятности:*
AA	$\frac{a}{m}\cdot\frac{a-1}{m-1}$
AB	$2.\ \frac{a}{m}\cdot\frac{b}{m-1}$
BB	$\frac{b}{m}\cdot\frac{b-1}{m-1}$;

сумма этихъ трехъ вѣроятностей, какъ и должно быть, равна единицѣ. Совершенно такимъ же образомъ получимъ при трехъ-кратномъ испытаніи:

Событія:	*Ихъ вѣроятности:*
AAA	$\frac{a}{m}\cdot\frac{a-1}{m-1}\cdot\frac{a-2}{m-2}$
AAB	$3.\frac{a}{m}\cdot\frac{a-1}{m-1}\cdot\frac{b}{m-2}$
ABB	$3.\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{m-1}\cdot\frac{b-1}{m-2}$
BBB	$\frac{b}{m}\cdot\frac{b-1}{m-1}\cdot\frac{b-2}{m-2}$;

сумма четырехъ дробей, выражающихъ вѣроятности этихъ четырехъ сложныхъ событій, должна равняться единицѣ, что̀ нетрудно повѣрить, замѣнивъ m равною ей величиною $a+b$.

Вообще, положимъ, что произведено n испытаній; соображаясь съ сказаннымъ выше найдется, что вѣроятности сложныхъ событій A^n, $A^{n-1}B$, $A^{n-2}B^2$, ... опредѣлятся формулами:

Событія:	*Ихъ вѣроятности:*
A^n	$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}$
$A^{n-1}B$	$n.\frac{a(a-1)\ldots(a-n+2).b}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}$
$A^{n-2}B^2$	$\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{a(a-1)\ldots(a-n+3).b(b-1)}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}$
$A^{n-3}B^3$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{a(a-1)\ldots(a-n+4).b(b-1)(b-2)}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}$
....	

Законъ, по которому опредѣляются эти вѣроятности, очень простъ: съ перваго взгляда усматриваемъ, что въ настоящемъ случаѣ степени величинъ a и b, входившія въ выраженія вѣроятностей при неизмѣняемости статочностей, замѣняются здѣсь факторіальными количествами. Для сокращенія найденныхъ сей-часъ формулъ, введемъ въ нихъ знакоположеніе *Крампа*, въ силу котораго имѣемъ, при какомъ ни есть r,

$$a^{1|r}=a$$
$$a^{2|r}=a(a+r)$$
$$a^{3|r}=a(a+r)(a+2r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{n|r}=a(a+r)(a+2r)\ldots.(a+\overline{n-1}.r);$$

положивъ $r=-1$, найдется

$$a^{1|-1}=a$$
$$a^{2|-1}=a(a-1)$$

$$a^{3|-1}=a(a-1)(a-2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{n|-1}=a(a-1)(a-2)\ldots(a-\overline{n-1}),$$

и предъидущій рядъ вѣроятностей приметъ видъ:

Событія: A^n, $A^{n-1}B$, $A^{n-2}B^2$, $A^{n-3}B^3$, ...

Вѣроят.: $\frac{a^{n|-1}}{m^{n|-1}}$, $n\cdot\frac{a^{n-1|-1}.b^{1|-1}}{m^{n|-1}}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{a^{n-2|-1}.b^{2|-1}}{m^{n|-1}}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{a^{n-3|-1}.b^{3|-1}}{m^{n|-1}}\ldots$

И такъ, послѣдовательные члены формулы

$$\frac{a^{n|-1}}{m^{n|-1}}+n\cdot\frac{a^{n-1|-1}.b^{1|-1}}{m^{n|-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{a^{n-2|-1}.b^{2|-1}}{m^{n|-1}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{a^{n-3|-1}.b^{3|-1}}{m^{n|-1}}+\cdots \quad (35)$$

изобразятъ по порядку вѣроятности сложныхъ событій A^n, $A^{n-1}B$, $A^{n-2}B^2$, $A^{n-3}B^3$,... при допущенномъ законѣ измѣненія статочностей. Такъ какъ въ n испытаній одно изъ этихъ сложныхъ событій непремѣнно должно случиться, то совокупность членовъ (35) необходимо равна единицѣ, въ слѣдствіе чего, замѣнивъ m суммою $a+b$, получимъ примѣчательную формулу:

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^{n|-1}=a^{n|-1}+n.a^{n-1|-1}.b^{1|-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}.a^{n-2|-1}.b^{2|-1}\\+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.a^{n-3|-1}.b^{3|-1}+\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

найденную еще *Вандермондомъ*, но другимъ путемъ [ПРИМѢЧАНІЕ V]. При употребленіи этой формулы не должно терять изъ виду, что выраженіе $a^{n|-1}$ уничтожается, когда показатель n числа множителей, входящихъ въ составъ факторіальнаго количества, будетъ превосходить a. И такъ, всѣ выраженія $a^{a+1|-1}$, $a^{a+2|-1}$, $a^{a+3|-1}$,... равны нулю, что̀ впрочемъ очевидно слѣдуетъ изъ самаго ихъ опредѣленія.

29. Найдемъ теперь наибольшій членъ формулы (36), соотвѣтствующій правдоподобнѣйшему изъ событій A^n, $A^{n-1}B$, $A^{n-2}B^2$,... Допустимъ, что $A^{n-\mu}B^\mu$ изображаетъ это событіе. Число статочностей, благопріятствующихъ ему, выразится чрезъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}\cdot a^{n-\mu|-1}.b^{\mu|-1}=M.$$

Пусть будутъ L и N смежные съ M члены, L предшествующій, а N, послѣдующій; найдется

$$\frac{M}{L}=\frac{n-\mu+1}{\mu}\cdot\frac{b-\mu+1}{a-n+\mu}=\left(\frac{a+1}{a-n+\mu}-1\right)\left(\frac{b+1}{\mu}-1\right)$$
$$\frac{M}{N}=\frac{\mu+1}{n-\mu}\cdot\frac{a-n+\mu+1}{b-\mu}.$$

Такъ какъ, по свойству рѣшаемаго нами вопроса, каждая изъ величинъ $n-\mu+1$, $b-\mu+1$, $a-n+\mu$, $n-\mu$, $a-n+\mu+1$ и $b-\mu$ означаетъ число положительное, то отношеніе $\frac{M}{L}$, само по себѣ положительное, будетъ увеличиваться съ уменьшеніемъ μ, и, напротивъ того, уменьшаться съ увеличеніемъ μ. Дѣйствительно, по причинѣ неизмѣняемости величинъ a, b и n, дроби $\frac{a+1}{a-n+\mu}$ и $\frac{b+1}{\mu}$ съ увеличеніемъ μ обѣ уменьшаются, а съ уменьшеніемъ μ, обѣ увеличиваются; слѣдовательно, если предположимъ, что M есть наибольшій членъ разложенія (36), то, сообразно съ сказаннымъ въ N° 18, мы въ правѣ будемъ заключить, что послѣдовательные члены отъ M до перваго $a^{n|-1}$ и отъ M до послѣдняго $b^{n|-1}$ убываютъ постепенно въ численной величинѣ своей. Впрочемъ, можетъ случиться, что наибольшихъ членовъ, равныхъ между собою, будетъ два: такой случай соотвѣтствуетъ предположенію $M=L$, которое приводитъ къ слѣдующему, единственному значенію для μ:

$$\mu=\frac{(n+1)(b+1)}{a+b+2}.$$

Когда это послѣднее выраженіе обратится въ цѣлое число, то рядъ (36) очевидно будетъ содержать два наибольшіе члена. Напримѣръ, если бы положили $a=13$, $b=6$, $n=5$, то нашли бы $\mu=2$; въ этомъ случаѣ, вторая часть разложенія

$$19.18.17.16.15=13.12.11.10.9+5.13.12.11.10.6+10.13.12.11.6.5$$
$$+10.13.12.6.5.4+5.13.6.5.4.3+6.5.4.3.2$$

или, что всё равно, равенства

$$1395360=154440+514800+514800+187200+23400+720$$

заключаетъ два члена, равные между собой, и вмѣстѣ съ тѣмъ наибольшіе. Общая величина ихъ есть 514800.

Такимъ образомъ доказано, что въ ряду (36) можетъ существовать одинъ только наибольшій членъ, или, въ частномъ случаѣ, не болѣе двухъ смежныхъ и равныхъ между собою наибольшихъ членовъ. Сообразно съ показаннымъ въ N° 18, для опредѣленія этого наибольшаго члена, если онъ одинъ въ разложеніи, надобно положить

$$\frac{M}{L}>1, \quad \text{и} \quad \frac{M}{N}>1,$$

то есть

$$\frac{n-\mu+1}{\mu}\cdot\frac{b-\mu+1}{a-n+\mu}>1, \quad \text{и} \quad \frac{\mu+1}{n-\mu}\cdot\frac{a-n+\mu+1}{b-\mu}>1.$$

Изъ этихъ двухъ неравенствъ выведемъ

$$\mu<\frac{(n+1)(b+1)}{a+b+2} \quad \text{и} \quad \mu>\frac{nb+n-a-1}{a+b+2},$$

или

$$\mu<\frac{n(b+1)}{a+b+2}+\frac{b+1}{a+b+2} \quad \text{и} \quad \mu>\frac{n(b+1)}{a+b+2}-\frac{a+1}{a+b+2}.$$

Такъ какъ разность сихъ предѣловъ равна единицѣ, то заключаемъ, что μ равняется или наибольшему цѣлому числу, заключающемуся въ отношеніи $\frac{n(b+1)}{a+b+2}$, или этому числу увеличенному единицею. Если положимъ $\frac{n(b+1)}{a+b+2}=k$, разумѣя подъ k цѣлое число, то найдемъ $\mu=k$, и слѣдовательно

$$n-k=\frac{n(a+1)}{a+b+2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{n-k}{k}=\frac{a+1}{b+1}.$$

И такъ, правдоподобнѣйшее событіе $A^{n-k}B^k$ будетъ тò, въ которомъ отношеніе числа $n-k$ повтореній событія A, къ числу k повтореній событія B, равно дроби $\frac{a+1}{b+1}$. Въ предъидущемъ примѣрѣ, гдѣ $a=13$, $b=6$, эта дробь обращается въ $\frac{13+1}{6+1}=\frac{2}{1}$. Поэтому, при 6 испытаніяхъ, правдоподобнѣйшее событіе будетъ A^4B^2, при 9 испытаніяхъ, A^6B^3, при 12, A^8B^4 и проч.

Когда дробь $\frac{a+1}{b+1}$ не сокращается, или еще, когда величина n не можетъ быть разложена на двѣ части, соотвѣтственно пропорціональныя $a+1$ и $b+1$, то правдоподобнѣйшее событіе будетъ соотвѣтствовать тѣмъ значеніямъ показателей кратности $n-\mu$ и μ, которыхъ отношеніе наиближе подходитъ, въ цѣлыхъ числахъ, къ величинѣ $\frac{a+1}{b+1}$. Положимъ, напримѣръ, что имѣемъ слѣдующія данныя:

$$a=30, \quad b=9, \quad n=4;$$

величина μ опредѣлится условіями

$$\mu<\frac{4.10}{41}+\frac{10}{41} \quad \text{и} \quad \mu>\frac{4.10}{41}-\frac{31}{41}$$

или

$$\mu<\frac{50}{41} \quad \text{и} \quad \mu>\frac{9}{41};$$

слѣдовательно $\mu=1$. И такъ $\frac{n-\mu}{\mu}=\frac{3}{1}$, а это отношеніе и есть ближайшее, въ цѣлыхъ числахъ, къ отношенію $\frac{a+1}{b+1}=\frac{31}{10}$. Поэтому, правдоподобнѣйшее сложное событіе въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ A^3B^1, чтò легко повѣрить, составивъ, на основаніи формулы (36), слѣдующій рядъ:

$$39.38.37.36=30.29.28.27+4.30.29.28.9+6.30.29.9.8+4.30.9.8.7+9.8.7.6,$$

въ которомъ второй членъ второй части есть наибольшій.

30. Окончимъ эту статью рѣшеніемъ одного вопроса, сущность котораго заимствуемъ изъ третей Части *Ars conjectandi* (стр. 145). *Изъ 12 жетоновъ, 4 бѣлыхъ и 8 чёрныхъ, извлекаемъ на-удачу 7 жетоновъ; найти вѣроятность,* 1° *что* 3 *изъ нихъ будутъ бѣлые, и* 2° *что бѣлыхъ будетъ не менѣе трехъ.*

Изобразимъ чрезъ A появленіе бѣлаго, а чрезъ B, появленіе чёрнаго жетона. Такъ какъ послѣ каждаго испытанія полное число статочностей уменьшается одной единицею, то формула (35), выведенная въ этомъ самомъ предположеніи, послужитъ для рѣшенія нашего вопроса. Здѣсь имѣемъ $a=4$, $b=8$, $m=12$, $n=7$, и какъ сверхъ того ищемъ вѣроятность событія A^3B^4, то пятый членъ формулы

$$\frac{4^{7|-1}}{12^{7|-1}}+7\cdot\frac{4^{6|-1}\,8^{1|-1}}{12^{7|-1}}+21\cdot\frac{4^{5|-1}.8^{2|-1}}{12^{7|-1}}+35\cdot\frac{4^{4|-1}.8^{3|-1}}{12^{7|-1}}+35\cdot\frac{4^{3|-1}.8^{4|-1}}{12^{7|-1}}+21\cdot\frac{4^{2|-1}.8^{5|-1}}{12^{7|-1}}$$
$$+7\cdot\frac{4^{1|-1}.8^{6|-1}}{12^{7|-1}}+\frac{8^{7|-1}}{12^{7|-1}},$$

именно

$$35\cdot\frac{4^{3|-1}.8^{4|-1}}{12^{7|-1}}=35\cdot\frac{4.3.2.8.7.6.5}{12.11.10.9.8.7.6}=\frac{35}{99},$$

изобразитъ вѣроятность первой случайности.

Замѣтимъ, что первые три члена предъидущаго ряда, по причинѣ множителей $4^{7|-1}$, $4^{6|-1}$ и $4^{5|-1}$, обращающихся въ нуль, сами уничтожаются; сумма же пяти остальныхъ членовъ, то есть

$$\frac{7}{99}+\frac{35}{99}+\frac{42}{99}+\frac{14}{99}+\frac{1}{99},$$

равна единицѣ, какъ и должно быть. Противная найденной сей-часъ вѣроятности будетъ $\frac{64}{99}$, а отношеніе ихъ $\frac{35}{64}$. И такъ, можно ставить 64 противъ 35, что случайность, о которой идетъ рѣчь, не будетъ состояться съ перваго раза.

Для рѣшенія второй части вопроса, стоитъ только взять сумму тѣхъ членовъ, которые соотвѣтствуютъ появленію событія *A не менѣе* трехъ разъ; ихъ будетъ два, именно:

$$35\cdot\frac{4^{4|-1}.8^{3|-1}}{12^{7|-1}}+35\cdot\frac{4^{3|-1}.8^{4|-1}}{12^{7|-1}}=\frac{7}{99}+\frac{35}{99}=\frac{42}{99}=\frac{14}{33}.$$

И такъ, $\frac{14}{33}$ изобразитъ искомую вѣроятность; противная ей будетъ $\frac{19}{33}$, а отношеніе первой ко второй, $\frac{14}{19}$. Слѣдовательно, можно ставить 19 противъ 14, что въ числѣ семи выдернутыхъ на-удачу жетоновъ, будетъ находиться менѣе трехъ бѣлыхъ, или, что всё равно, болѣе четырехъ чёрныхъ.

Этого примѣра достаточно, чтобы видѣть употребленіе формулы (35). Она, какъ и Нютоновъ биномъ, можетъ быть распространена на случай сколькихъ угодно слагаемыхъ

количествъ a, b, $c\ldots$, и, въ такомъ обобщенномъ видѣ, послужитъ для опредѣленія вѣроятностей сложныхъ событій, составленныхъ изъ сколькихъ угодно простыхъ. Само собой разумѣется, что въ этомъ предположеніи, законъ измѣняемости статочностей долженъ быть одинаковаго свойства съ тѣмъ, который мы допустили выше.

Читатели найдутъ любопытныя изслѣдованія по этому же предмету въ мемуарѣ: *Recherches sur une question de l'analyse des probabilités, relative à une série d'épreuves à chances variables, et qui exige la détermination du terme principal du développement d'une factorielle, formée d'un grand nombre de facteurs;* par *M. J. Binet.* Извлеченіе изъ этого мемуара помѣщено въ Compte rendu des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, за 1844 годъ, въ томѣ XIX, стр. 375.

ГЛАВА III.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМЪ ОЖИДАНІИ.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМЪ РАВЕНСТВѢ ИЛИ БЕЗОБИДНОСТИ ВСЯКАГО РОДА ИГОРЪ, И О МѢРѢ МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОЖИДАНІЯ.

31. Предметомъ этой Главы будетъ изложеніе правилъ, которыми должно руководствоваться во всякую игру для соблюденія совершенной справедливости въ отношеніи ко всѣмъ участникамъ въ ней; эта справедливость состоитъ въ такомъ соразмѣреніи ставокъ игроковъ, чтобы ни одинъ изъ нихъ, при равномъ искусствѣ и данныхъ условіяхъ игры, не имѣлъ передъ другимъ никакой выгоды. При строгомъ удовлетвореніи этому требованію, игра называется *математически равною* или *безобидною*.

Говорѣ здѣсь объ игрѣ, мы придаемъ этому слову самое общее значеніе. Въ обширномъ смыслѣ, всякаго рода случайности, сопряженныя для насъ съ выгодою или потерею, можно отнести къ играмъ. Таковы, напримѣръ, разнообразные денежные обороты, основанные на событіяхъ недостовѣрныхъ, появленіе которыхъ влечетъ за собою выгоду или ущербъ; всякаго рода заклады, лотереи, торговыя спекуляціи, застрахованія, пожизненные доходы и проч. Въ самомъ житейскомъ быту нерѣдко встрѣчаются случаи, въ которыхъ правило математическаго равенства игры имѣетъ свое приложеніе. Но чтобы въ подобныхъ обстоятельствахъ извлечь пользу изъ этого правила, и, сообразно съ нимъ, соразмѣрить ожидаемую выгоду съ возможнымъ ущербомъ, бо́льшею частію зависящихъ отъ многоразличныхъ, почти неуловимыхъ случайностей, нуженъ умъ проницательный, чуждый предразсудковъ, вѣрный взглядъ на предметы, быстрое соображеніе и большая опытность. Качества эти весьма рѣдко соединены въ одномъ лицѣ; поэтому случается довольно часто, что предпріятія, повидимому хорошо обдуманныя, въ послѣдствіяхъ своихъ оказываются совершенно неудачными.

Прежде нежели изъ Ученія о Вѣроятностяхъ составилась аналитическая теорія, правило *математическаго равенства игры*, въ настоящемъ его видѣ, уже допускалось всѣми. Всякую игру или закладъ считали справедливымъ, когда *ставки игроковъ или рискуемыя ими суммы, были соотвѣтственно пропорціональны числу статочностей, благопріятствующихъ выигрышу*. Напримѣръ, если бы игрокъ A держалъ закладъ, что при одномъ бросаніи шестигранной кости выпадетъ опредѣленный нумеръ, положимъ 6-ой, то ставка его должна бы составлять только пятую часть ставки противника B, потому что на сторонѣ перваго одна статочность, благопріятствующая его выигрышу, а на сторонѣ втораго пять равновозможныхъ случаевъ, при которыхъ полная ставка достается ему. Это утвержденіе легко можетъ быть оправдано слѣдующимъ образомъ: положимъ, что B передаетъ свою игру пятерымъ игрокамъ B', B'', B''', B^{IV} и B^{V}, распредѣлившимъ между собою его выигрышные нумера; B' взялъ n° 1; B'', n° 2; B''', n° 3; B^{IV}, n° 4; наконецъ B^{V}, n° 5. И такъ, вмѣсто двухъ игроковъ B и A, будетъ теперь шестеро: B', B'', B''', B^{IV}, B^{V}, A, а соотвѣтствующіе имъ выигрышные нумера: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ясно, что для справедливости игры, каждый игрокъ долженъ внести въ общую ставку одинаковую сумму, потому что вскрытіе каждаго изъ шести нумеровъ равно возможно. Поэтому, если каждый внесетъ сумму μ, то полная ставка будетъ 6μ; сумма 5μ будетъ внесена пятью игроками B', B'', B''', B^{IV} и B^{V}, или, что́ всё равно, однимъ игрокомъ B. И такъ, соотвѣтственныя ставки игроковъ A и B будутъ μ и 5μ, которыя, какъ сей-часъ было сказано, дѣйствительно содержатся между собой какъ 1 къ 5. Это объясненіе, основанное на замѣщеніи одного игрока нѣсколькими другими, можетъ быть легко распространено на какую ни есть игру сообразно съ тѣмъ, что́ будетъ показано въ слѣдующемъ нумерѣ.

На основаніи правила, служащаго для опредѣленія вѣроятностей сложныхъ событій и теоремы Якова Бернулли, изложенной въ предъидущей Главѣ, легко вывести общее условіе *безобидности* или *математическаго равенства игры*, которое, при такомъ изложеніи, получитъ возможную степень ясности и опредѣлительности. Приступая къ этому доказательству, условимся, для простоты, въ значеніи нѣкоторыхъ наименованій. Вообще, подъ *выгодою*, ожидаемою отъ какого либо событія, мы будемъ разумѣть прибыль, барышъ или выигрышъ, доставляемый лицу появленіемъ этого самаго событія. Мѣрою выгоды принимаютъ произведеніе ожидаемой прибыли на вѣроятность того событія, отъ появленія котораго эта прибыль зависитъ. Такое произведеніе въ Исчисленіи Вѣроятностей называется *математическимъ ожиданіемъ* или *математическою выгодою*. Если, вмѣсто прибыли, появленіе событія влечетъ за собою ущербъ или проигрышъ, то математическое

ожиданіе обращается въ величину отрицательную. Въ слѣдствіе такихъ условій, и если предположимъ, что появленіе событій A, B, $C\ldots$, вѣроятности которыхъ изобразимъ чрезъ p, q, $r\ldots$, соотвѣтственно доставляетъ выигрыши $\alpha, \beta, \gamma\ldots$, а появленіе событій A', B', $C'\ldots$, при вѣроятностяхъ $p', q', r'\ldots$, влечетъ за собой проигрыши $\alpha', \beta', \gamma'\ldots$, то *математическое ожиданіе* изобразится разностію

$$(p\alpha+q\beta+r\gamma+\ldots)-(p'\alpha'+q'\beta'+r'\gamma'+\ldots),$$

положительною или отрицательною, смотря по тому, будетъ ли $p\alpha+q\beta+r\gamma+\ldots$ болѣе или менѣе $p'\alpha'+q'\beta'+r'\gamma'+\ldots$

Допустимъ теперь, что при какомъ либо родѣ испытаній, подверженныхъ случайностямъ, какъ напримѣръ въ играхъ, закладахъ, лотереяхъ и проч., ожидаемъ появленія одного изъ двухъ событій A или B, вѣроятности которыхъ изобразимъ чрезъ p и q. Такъ какъ, по самому предположенію, возможныхъ событій только два, то получится $q=1-p$. На такомъ основаніи предложимъ себѣ сперва рѣшеніе слѣдующаго вопроса: *Производимъ сряду* m *испытаній, и каждое изъ нихъ приводитъ къ одному изъ двухъ событій* A *или* B; *появленіе перваго доставляетъ выигрышъ* α, *а второе влечетъ за собою проигрышъ* β. *Требуется, по данной вѣроятности* p, *а слѣдовательно и* q=1—p *этихъ событій, опредѣлить величину математическаго ожиданія.*

Разлагая въ рядъ выраженіе $(p+q)^m$, получимъ

$$(p+q)^m=p^m+mp^{m-1}q+\frac{m(m-1)}{1.2}.p^{m-2}q^2+\ldots+\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\lambda.1.2.3\ldots\mu}.p^\lambda q^\mu+\ldots+q^m,$$

гдѣ $\lambda+\mu=m$. Послѣдовательные члены этого разложенія изображаютъ по порядку вѣроятности появленій сложныхъ событій

$$A^m,\quad A^{m-1}B,\quad A^{m-2}B^2,\ldots\quad A^\lambda B^\mu,\ldots\ B^m.$$

Выигрыши, соотвѣтствующіе этимъ сложнымъ событіямъ, будутъ

$$m\alpha,\quad (m-1)\alpha-\beta,\quad (m-2)\alpha-2\beta,\ldots\ \lambda\alpha-\mu\beta,\ldots -m\beta,$$

и слѣдовательно, искомое математическое ожиданіе опредѣлится суммою

$$m\alpha.p^m+m[(m-1)\alpha-\beta]p^{m-1}q+\frac{m(m-1)}{1.2}[(m-2)\alpha-2\beta]p^{m-2}q^2+\ldots$$
$$+\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\lambda.1.2.3\ldots\mu}[\lambda\alpha-\mu\beta]p^\lambda q^\mu+\ldots-m\beta.q^m.$$

Если напишемъ это выраженіе въ видѣ

$$m\alpha.p[p^{m-1}+(m-1)p^{m-2}q+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}.p^{m-3}q^2+\ldots+\frac{1.2.3.(m-1)}{1.2.3\ldots(\lambda-1).1.2.3.\mu}.p^{\lambda-1}q^\mu+\ldots]$$
$$-m\beta.q[q^{m-1}+(m-1)q^{m-2}p+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}.q^{m-3}p^2+\ldots+\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{1.2.3\ldots\lambda.1.2.3\ldots(\mu-1)}.q^{\mu-1}p^\lambda+\ldots],$$

то увидимъ непосредственно, что оно обращается просто въ

$$m(p\alpha-q\beta)(p+q)^{m-1}=m(p\alpha-q\beta)$$

по причинѣ $p+q=1$.

И такъ, при допущенныхъ выше условіяхъ, мѣра нашего математическаго ожиданія будетъ $m(p\alpha-q\beta)$. Если $p\alpha>q\beta$, то должно ожидать выгоды или выигрыша, и, напротивъ того, невыгоды или проигрыша, когда $p\alpha<q\beta$. При $p\alpha=q\beta$ состояніе наше не перемѣнится, потому что послѣдовательныя потери уравновѣсятся съ выигрышами. Это послѣднее состояніе, то есть равенство выигрышей съ проигрышами, соотвѣтствуетъ *правдоподобнѣйшему* сложному событію, въ чемъ непосредственно удостовѣримся опредѣливъ математическое ожиданіе, относящееся къ событію, наиболѣе вѣроятному. Вѣроятность сего послѣдняго будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\lambda.1.2.3\ldots\mu}.p^\lambda q^\mu$$

при условіяхъ $\lambda+\mu=m$ и $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{p}{q}$ (N° 18); слѣдовательно, соотвѣтственное математическое ожиданіе изобразится произведеніемъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\lambda.1.2.3\ldots\mu}.p^\lambda q^\mu(\lambda\alpha-\mu\beta).$$

Но изъ уравненій

$$\lambda+\mu=m \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{p}{q}$$

выводимъ

$$\lambda=\frac{mp}{p+q}=mp,\quad \mu=\frac{mq}{p+q}=mq,$$

почему и получимъ

$$\lambda\alpha-\mu\beta=m(p\alpha-q\beta),$$

а это выраженіе, въ случаѣ $p\alpha=q\beta$, дѣйствительно обращается въ нуль, какъ уже сказано выше.

Сближеніе этого замѣчанія съ теоремою Якова Бернулли приведетъ насъ, самымъ прямымъ путемъ, къ правилу о математическомъ равенствѣ игоръ. Дѣйствительно, положимъ, что два игрока играютъ весьма значительное число m партій. При каждой партіи 1-ый игрокъ имѣетъ на своей сторонѣ a статочностей для выигрыша суммы α, а 2-ой, b статочностей для выигрыша β; слѣдовательно $\frac{a}{a+b}=p$ и $\frac{b}{a+b}=1-p$ изобразятъ простыя вѣроятности выигрышей α и β. Но мы видѣли въ N° 22, что если разложимъ m на два числа цѣлыя x и x', отношеніе которыхъ наиближе подходитъ къ содержанію $\frac{p}{1-p}$, то величина P, опредѣляемая формулою (25), изобразитъ вѣроятность, что число повтореній перваго событія, или, въ настоящемъ случаѣ, число выигранныхъ первымъ игрокомъ партій, будетъ заключаться между предѣлами $x+l$ и $x-l$, а число выигранныхъ партій

вторымъ игрокомъ, между $x'+l$ и $x'-l$, разумѣя подъ l величину порядка, не превышающаго $\sqrt{m}$. И такъ, предѣлы числа партій, выигранныхъ 1-мъ игрокомъ, предполагаются $x-l$ и $x+l$, а промежуточное число x изображаетъ правдоподобнѣйшее ихъ число при m сыгранныхъ партіяхъ. Этимъ числамъ будутъ соотвѣтствовать слѣдующіе выигрыши, вычисленные для 1-го игрока:

Число партій, выигранныхъ 1-ымъ игрокомъ:	*Соотвѣтственные выигрыши:*
$x+l$	$(x+l)\alpha-(x'-l)\beta=x\alpha-x'\beta+l(\alpha+\beta)$
x	$x\alpha-x'\beta$
$x-l$	$(x-l)\alpha-(x'+l)\beta=x\alpha-x'\beta-l(\alpha+\beta)$.

Замѣтимъ, что въ этихъ трехъ выраженіяхъ, въ силу формулъ (22) [N° 22], можно замѣнить x и x' величинами mp и $m(1-p)$, ибо z есть правильная дробь, которую, при m весьма значительномъ, позволительно откинуть. Слѣдовательно, вѣроятность P, что дѣйствительный выигрышъ перваго игрока будетъ заключаться между предѣлами

$$m[p\alpha-(1-p)\beta]\pm l(\alpha+\beta) \tag{37}$$

выразится чрезъ

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi mp(1-p)}}e^{-t^2},$$

когда, въ формулѣ (25) [N° 22], замѣнимъ x и x' соотвѣтственно величинами mp и $m(1-p)$. Подъ t, въ слѣдствіе того же N° 22, разумѣемъ величину

$$t=\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{2xx'}}=\frac{l}{\sqrt{2mp(1-p)}}.$$

Если положимъ, что весьма малое количество $\frac{l}{m}$ постоянно, то принявъ $\frac{l}{m}=k$, получимъ

$$t=\frac{k\sqrt{m}}{\sqrt{2p(1-p)}};$$

такъ какъ эта величина возрастаетъ вмѣстѣ съ m, и пропорціонально $\sqrt{m}$, то, сообразно съ замѣчаніемъ, оканчивающимъ N° 24, можно заключить, что вѣроятность P предѣловъ (37) будетъ быстро приближаться къ единицѣ.

Если положимъ, что разность $p\alpha-(1-p)\beta$ есть величина положительная, то дѣйствительный выигрышъ перваго игрока, заключающійся между предѣлами (37), будетъ неопредѣленно возрастать съ увеличеніемъ числа сыгранныхъ партій m, и сдѣлается наконецъ болѣе всякой данной суммы. Напротивъ того, принявъ $p\alpha-(1-p)\beta$ отрицательнымъ, проигрышъ перваго же игрока, съ увеличеніемъ m, будетъ возрастать неопредѣленно. Наконецъ, если положимъ $p\alpha-(1-p)\beta=0$, то установится нѣкоторое равенство между состояніями обоихъ игроковъ; и въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ, каждый изъ нихъ, съ одинаковою вѣроятностію, можетъ проиграть или выиграть сумму, не превышающую $l(\alpha+\beta)$. Всѣ эти утвержденія основаны на томъ замѣчаніи, что вѣроятность P, съ увеличеніемъ m, быстро приближается къ единицѣ.

Сообразимъ теперь заключенія, къ которымъ привелъ насъ строгій математическій анализъ. Мы доказали, что если математическія ожиданія двухъ игроковъ не равны между собою, то можно утверждать съ вѣроятностію, весьма близкою къ достовѣрности, что одинъ изъ двухъ игроковъ выиграетъ, и что выигрышъ будетъ возрастать неопредѣленно съ числомъ сыгранныхъ партій; статочности же выигрыша останутся на сторонѣ того изъ нихъ, чьё математическое ожиданіе больше. И такъ, въ этомъ случаѣ, положеніе одного игрока выгоднѣе чѣмъ другаго, почему условіе безобидности игры не выполнено. Напротивъ того, если положимъ, что математическія ожиданія двухъ игроковъ равны между собою, то каждый изъ нихъ, съ одинаковою степенью вѣроятности, можетъ выиграть или проиграть нѣкоторую сумму, предѣлъ которой найденъ выше. Здѣсь преимущество ни на чьей сторонѣ, и слѣдовательно игру должно считать математически равною или безобидною. Невозможно постановить другаго, болѣе удовлетворительнаго равенства тамъ, гдѣ идетъ рѣчь объ однѣхъ вѣроятностяхъ. Кто рискуетъ, тотъ уже не можетъ требовать, чтобы состояніе его было совершенно одинаково съ состояніемъ человѣка, не подвергающаго себя всѣмъ послѣдствіямъ случайностей. Поэтому, найденное правило должно считать возможно-справедливымъ, то есть въ той степени, какую только допускаетъ самая сущность разсматриваемаго предмета. И такъ, должно быть

$$p\alpha-(1-p)\beta=0 \quad \text{или} \quad p\alpha=(1-p)\beta;$$

это равенство есть аналитическое выраженіе правила безобидности, и, повторяемъ, всякое другое предположеніе какъ то $p\alpha>(1-p)\beta$ или $p\alpha<(1-p)\beta$, приведетъ насъ къ слѣдствіямъ, которыя будутъ противорѣчить нашимъ понятіямъ о справедливости игры.

Когда въ игрѣ участвуетъ болѣе двухъ игроковъ, то для общей безобидности, математическое ожиданіе каждаго должно быть одинаково. И такъ, если положимъ что вѣроятности выигрыша суммъ α, β, γ... для 1-го, 2-го, 3-го... игрока будутъ соотвѣтственно p, q, r..., то должно быть

$$p\alpha=q\beta=r\gamma=\ldots$$

Иногда, въ приложеніяхъ къ частнымъ вопросамъ, вмѣсто вѣроятностей, удобнѣе вводить благопріятствующія выигрышамъ статочности a, b, c... Въ такихъ случаяхъ, стоитъ

только замѣнить соотвѣтственно p, q, $r\ldots$ величинами a, b, $c\ldots$ Дѣйствительно, такъ какъ

$$p=\frac{a}{a+b+c+\ldots},\quad q=\frac{b}{a+b+c+\ldots},\quad r=\frac{c}{a+b+c+\ldots},\ldots$$

то получимъ

$$\frac{a\alpha}{a+b+c+\ldots}=\frac{b\beta}{a+b+c+\ldots}=\frac{c\gamma}{a+b+c+\ldots}=\ldots,$$

откуда, какъ сей-часъ замѣчено,

$$a\alpha=b\beta=c\gamma=\ldots$$

32. Сказанное въ предъидущемъ N° приводитъ, самымъ естественнымъ образомъ, къ *правилу безобиднаго дѣлежа,* состоящаго въ справедливомъ раздѣлѣ между игроками полной ставки, когда они расходятся до окончанія игры. Это правило, въ историческомъ отношеніи, примѣчательно тѣмъ, что приложенія его къ нѣкоторымъ вопросамъ, предложеннымъ *Кавалеромъ Мере* знаменитому *Паскалю*, были поводомъ къ учёной перепискѣ объ этомъ предметѣ между Паскалемъ и Ферматомъ; въ этой перепискѣ усматриваются первыя начала Математической Теоріи Вѣроятностей. *Задача о безобидномъ дѣлежѣ состояла въ слѣдующемъ: Два игрока* A *и* B*, равноискусные, поставили въ игру поровну, именно по* $\frac{1}{2}$M*; тотъ изъ нихъ, кто первый выиграетъ извѣстное число, напримѣръ* n *очковъ, беретъ всю ставку* M. *Но, по какой либо причинѣ, они должны прекратить игру, когда она еще не кончена: первому игроку не достаетъ* x *очковъ до* n, *а второму,* x' *очковъ. Спрашивается, какимъ образомъ они должны раздѣлить ставку между собой.* Паскаль рѣшилъ этотъ вопросъ посредствомъ своего *ариѳметическаго треугольника*, а Ферматъ предложилъ рѣшеніе этой же задачи, основанное на теоріи соединеній. Послѣднее имѣло то̀ преимущество передъ первымъ, что распространялось на случай сколькихъ угодно игроковъ. Въ N° 38 слѣдующей статьи мы займемся полнымъ рѣшеніемъ вопроса о безобидномъ дѣлежѣ, а покамѣстъ, для ясности, предложимъ нѣкоторыя замѣчанія, и рѣшимъ одинъ частный случай.

Замѣтимъ сперва, что если бы въ общей задачѣ о безобидномъ раздѣлѣ, опредѣлили вѣроятность p, что игрокъ A выиграетъ прежде своего противника недостающія ему очки до числа n, то слѣдовало бы только раздѣлить ставку M пропорціонально вѣроятностямъ p и $1-p$ игроковъ A и B. A взялъ бы часть pM, а B, часть $(1-p)M$. Это совершенно согласуется съ предложеннымъ выше понятіемъ о безобидности игры. Дѣйствительно, если, съ общаго согласія, игра прекращается до ея окончанія, то справедливость требуетъ, чтобы тотъ игрокъ, на сторонѣ котораго бо̀льшее число статочностей для выигрыша, получилъ бы бо̀льшую часть ставки; его доля должна быть пропорціональна

числу статочностей, благопріятствующихъ его выигрышу, и какъ сумма математическихъ ожиданій $pM+(1-p)M$ равна полной ставкѣ M, то игроки A и B получатъ соотвѣтственно части pM и $(1-p)M$. Эти части изображаютъ мѣру математическаго ожиданія игроковъ A и B, соотвѣтствующую тому мгновенію, когда прекращается игра. Чтобы заключеніе наше получило возможную степень очевидности, положимъ что въ то время когда прекращается игра, A имѣетъ на своей сторонѣ a статочностей, благопріятствующихъ его выигрышу, а B, b такихъ же статочностей. Получится $\frac{a}{a+b}=p$, $\frac{b}{a+b}=1-p$. Вообразимъ теперь, что игрокъ A передалъ свою игру a игрокамъ A', A'',... $A^{(a)}$, предоставивъ имъ равныя права на игру, а B, b игрокамъ B', B'',... $B^{(b)}$ на такомъ же условіи. Такъ какъ каждый изъ игроковъ A', A'',... $A^{(a)}$, B', B'',... $B^{(b)}$ будетъ имѣть по одной благопріятствующей статочности, то нѣтъ причины, чтобы, при раздѣлѣ ставки, одинъ изъ нихъ получилъ болѣе или менѣе нежели другой; и такъ, каждый долженъ получить по $\frac{M}{a+b}$. Слѣдовательно, на долю игроковъ A', A'',... $A^{(a)}$ придется $\frac{aM}{a+b}$, а игроки B', B'',... $B^{(b)}$ получатъ вмѣстѣ $\frac{bM}{a+b}$. Отсюда заключаемъ, что игрокъ A, за котораго играли A', A'',... $A^{(a)}$, имѣетъ право на доставшуюся симъ послѣднимъ часть $\frac{aM}{a+b}=pM$, а игрокъ B на остальную, то есть на $\frac{bM}{a+b}=(1-p)M$.

Изъ этого ясно усматриваемъ, что рѣшеніе задачи о безобидномъ раздѣлѣ ставки между двумя игроками, приводится къ опредѣленію вѣроятности p, относящейся къ одному игроку; вѣроятность для другаго опредѣлится разностію $1-p$. Въ случаѣ трехъ игроковъ, вопросъ будетъ состоять въ опредѣленіи двухъ вѣроятностей: третья получится вычтя изъ единицы сумму двухъ первыхъ, предполагая, что разсматриваемая игра не допускаетъ *розыгрыша*. При четырехъ игрокахъ должно будетъ опредѣлить значеніе трехъ вѣроятностей, и такъ далѣе.

Объяснимъ сказанное примѣромъ: положимъ, что два игрока A и B положили въ игру по $\frac{1}{2}M$, и условились, что тотъ изъ нихъ, кто прежде выиграетъ 3 партіи, или, что̀ всё равно, запишетъ 3 очка, получитъ всю ставку M. Игроки расходятся сыгравъ три партіи, и не кончивъ игры: первый имѣетъ 2 очка, а второй 1 очко. Спрашивается, какъ должны они раздѣлить ставку M между собою?

Пусть будетъ p вѣроятность, что игрокъ A выиграетъ ставку M. Опредѣлимъ число статочностей, благопріятствующихъ ему, а также и совокупность всѣхъ равновозможныхъ случаевъ. Если бы игроки сыграли четвертую партію, то A могъ бы выиграть ее, и слѣдовательно получилъ бы всю ставку; если B выиграетъ эту четвертую партію, то за-

пишетъ одно очко, и будетъ имѣть 2 очка; вѣроятность той и другой случайности одинакова, и равна $\frac{1}{2}$. Пятая партія будетъ съиграна только въ томъ случаѣ, когда A не выиграетъ четвертой, то есть, когда у игрока B будетъ, какъ у перваго, 2 очка. И такъ, вѣроятность что пятая партія будетъ съиграна, равна $\frac{1}{2}$, и каждый игрокъ имѣетъ одинаковую вѣроятность, именно $\frac{1}{2}$, выиграть эту партію, а слѣдовательно и самую ставку. Изъ этого слѣдуетъ заключить, что вѣроятность p состоитъ изъ двухъ частей (N° 2) p' и p'', относящихся къ четвертой и пятой партіямъ. Вѣроятность p', что A выиграетъ четвертую партію, равна $\frac{1}{2}$; вѣроятность, что A выиграетъ пятую партію, независимо отъ четвертой, также равна $\frac{1}{2}$; но самая вѣроятность, что пятая партія будетъ состояться есть $\frac{1}{2}$; слѣдовательно вѣроятность p'' разсматриваемаго сложнаго событія равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. И такъ $p=p'+p''=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, откуда $1-p=\frac{1}{4}$. Поэтому A получитъ $\frac{3}{4}M$, а B, $\frac{1}{4}M$; то есть, первый игрокъ долженъ взять втрое болѣе противъ втораго.

Для рѣшенія этой весьма простой задачи, Паскаль разсуждалъ слѣдующимъ образомъ: Если бы игроки съиграли еще одну, то есть четвертую партію, то A или выигралъ бы всю ставку, или B имѣлъ бы, какъ и A, 2 очка. Но если они рѣшаются не рисковать этой партіи, то игрокъ A можетъ сказать своему противнику B: половина ставки принадлежитъ мнѣ безспорно, потому что если бы я даже проигралъ четвертую партію, то и въ такомъ случаѣ мы имѣли бы равное право на ставку, ибо у каждаго было бы по 2 очка. Что касается до другой половины ставки, то неизвѣстно еще, кто изъ насъ получитъ ее; и такъ какъ выигрышъ или проигрышъ въ равной степени для насъ возможенъ, то раздѣлимъ эту половину по-поламъ. Поэтому на мою долю придется половина ставки, да еще половина другой половины, всего три четверти полной ставки.

Это рѣшеніе остроумно, но не можетъ быть примѣнено къ болѣе сложнымъ случаямъ, для которыхъ необходимо прибѣгнуть къ аналитическимъ формуламъ, заключающимся въ слѣдующей статьѣ.

33. Есть нѣкотораго рода игры, для которыхъ нельзя опредѣлить напередъ срока окончанія; онѣ могутъ длиться неопредѣленно, почему и необходимо имѣть правило для безобиднаго раздѣла ставки до окончанія игры. Положимъ, напримѣръ, что два игрока играютъ на томъ условіи, что тотъ изъ нихъ, кто запишетъ извѣстное число очковъ, напримѣръ два, три... лишнихъ противъ другаго, выиграетъ ставку. Въ этомъ случаѣ, срокъ окончанія игры вовсе не зависитъ отъ числа съигранныхъ партій, но единственно отъ *избытка* выигранныхъ однимъ игрокомъ у другаго, почему игра можетъ продолжиться неопредѣленно. Это самое побудитъ игроковъ прекратить игру, и раздѣлить между собою

ставку. Раздѣлъ, для обоюдной безобидности, какъ и въ предъидущей задачѣ, долженъ быть произведенъ пропорціонально числу благопріятствующихъ игрокамъ статочностей, или, что всё равно, пропорціонально вѣроятностямъ выигрыша. Опредѣленіе же этихъ статочностей или вѣроятностей, представляетъ вообще болѣе затрудненій, нежели въ вопросѣ, которымъ занимались въ 32 нумерѣ. Въ N° 40 будутъ предложены общія формулы для рѣшенія подобныхъ задачъ; покамѣстъ ограничимся рѣшеніемъ одного частнаго случая.

Положимъ, что два равноискустные игрока A и B положили въ игру каждый по $\frac{1}{2}M$; ставка M должна достаться тому изъ нихъ, у кого прежде будетъ два очка лишнихъ. Съигравъ нѣсколько партій не рѣшившихъ игры, оказывается, что у игрока A одно очко лишнее; спрашивается, какія части ставки M должны получить игроки, согласившіеся въ то время прекратить игру.

Если условимся изображать выигранныя очки игроками A и B тѣми же буквами A и B, то, по свойству игры, всѣ соединенія, въ которыхъ одна и та же буква будетъ занимать два первыя мѣста, должны быть откинуты, потому что такое соединеніе соотвѣтствуетъ игрѣ уже конченной. Также должно откинуть соединенія, въ которыхъ одна и та же буква, послѣ перваго мѣста, повторяется три раза или болѣе. Поэтому соединенія $BAAAB$, $BAAAA$ невозможны; и дѣйствительно, они происходятъ отъ соединенія $BAAA$, при которомъ игрокъ A, имѣя уже два очка лишнихъ противъ B, выигралъ ставку. Равнымъ образомъ, послѣ втораго мѣста, одна и та же буква не можетъ повториться болѣе четырехъ разъ, и такъ далѣе.

На такомъ основаніи, разсматриваемая игра представитъ слѣдующія равновозможныя событія:

	1-ая партія:	*2-ая партія:*	*3-ья партія:*	*4-ая партія:*	и проч.
	A	AA	ABA	$ABAA$	
или	B	AB	ABB	$ABAB$	
		BA	BAA	$ABBA$	
		BB	BAB	$ABBB$	
				$BAAA$	
				$BAAB$	
				$BABA$	
				$BABB$	

Прежде всего замѣтимъ, что игра можетъ быть окончена только по съиграніи чётнаго числа партій, потому что при нечётномъ числѣ, одинъ изъ игроковъ выиграетъ чётное, а другой нечётное число очковъ, разность которыхъ не можетъ равняться двумъ единицамъ.

И такъ, разсмотримъ 2-ую, 4-ую, 6-ую... партіи. Вѣроятность каждой случайности 2-ой партіи есть $\frac{1}{4}$; 3-ей, $\frac{1}{8}$, 4-ой, $\frac{1}{16}$; 5-ой, $\frac{1}{32}$; 6-ой, $\frac{1}{64}$; и такъ далѣе, а числа статочностей, благопріятствующихъ выигрышу одного изъ игроковъ, будутъ

2 *для* 2-ой *партіи, именно: AA, BB*
4 « 4-ой « « *ABAA, ABBB, BAAA, BABB*
8 « 6-ой « « *ABABAA, ABABBB, ABBAAA, ABBABB*;
BAABAA, BAABBB, BABAAA, BABABB

....

Поэтому получатся слѣдующія вѣроятности, что игра окончится именно

на 2-*ой партіи:* *на* 4-*ой партіи:* *на* 6-*ой партіи:* и проч.

$$2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \qquad 4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4} \qquad 8\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{8}.$$

Вѣроятности, что игра продолжится не болѣе какъ до 2-ой, 4-ой, 6-ой... партіи включительно, будутъ соотвѣтственно: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$,...

Обратимся теперь къ нашему вопросу. Положимъ, что игроки A и B соглашаются раздѣлить ставку сообразуясь съ случайностями слѣдующей партіи, которой они не намѣрены съиграть. Игрокъ A, какъ въ предъидущемъ нумерѣ, можетъ сказать игроку B: если съиграемъ слѣдующую партію, то равновѣроятно что я выиграю всю ставку M, или что мы будемъ имѣть одинаковое число очковъ. Въ послѣднемъ, неблагопріятномъ для меня случаѣ, я имѣю право взять назадъ мою ставку $\frac{1}{2}M$. Что касается до другой половины, то права наши на нее одинаковы, почему и раздѣлимъ ее по-ровну; каждому достанется часть $\frac{1}{4}M$. И такъ, A долженъ получить $\frac{1}{2}M+\frac{1}{4}M=\frac{3}{4}M$, а B только $\frac{1}{4}M$.

Когда, для окончанія игры, избытокъ очковъ одного игрока передъ другимъ превышаетъ 2, то задача дѣлается болѣе сложною, и рѣшается, какъ уже сказано выше, посредствомъ формулъ N° 40.

34. Въ предъидущихъ нумерахъ мы разсматривали только два возможныя событія при каждомъ испытаніи. Положимъ теперь, что два игрока A и B играютъ въ такую игру, которая допускаетъ какое угодно число событій, распредѣленныхъ на два ряда A', A'', A'''..., B', B'', B'''.... Съ появленіемъ событій A', A'', A'''... первый игрокъ выигрываетъ суммы a', a'', a'''...; пусть будутъ p', p'', p'''... соотвѣтственныя вѣроятности этихъ выигрышей. Съ появленіемъ событій B', B'', B'''... второй игрокъ выигрываетъ суммы b', b'', b'''...; вѣроятности этихъ выигрышей изобразимъ чрезъ q', q'', q'''.... Математическое ожиданіе игрока A будетъ

$$p'a'+p''a''+p'''a'''+\ldots,$$

а игрока B,

$$q'b'+q''b''+q'''b'''+\ldots.$$

Для безобидности игры должно быть

$$p'a'+p''a''+p'''a'''+\ldots=q'b'+q''b''+q'''b'''+\ldots$$

гдѣ

$$p'+p''+p'''+\ldots+q'+q''+q'''+\ldots=1.$$

Положимъ, напримѣръ, что игроки A и B играютъ на слѣдующемъ условіи: бросаютъ игральную кость, и если она вскроется на нумерахъ 1, 2, 3, 4, то B платитъ игроку A 1 рубль, 2 р., 3 р., 4 р.; если же кость выпадетъ на очкахъ 5, 6, то A платитъ 4 рубля, 6 р. игроку B. Спрашивается, безобидна ли эта игра?

Такъ какъ вѣроятность появленія каждаго изъ 6 нумеровъ одинакова, и равна дроби $\frac{1}{6}$, то математическое ожиданіе игрока A будетъ

$$\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot2+\frac{1}{6}\cdot3+\frac{1}{6}\cdot4=\frac{5}{3},$$

а игрока B,

$$\frac{1}{6}\cdot4+\frac{1}{6}\cdot6=\frac{5}{3};$$

И такъ, математическое ожиданіе для обоихъ игроковъ одинаково; слѣдовательно игра безобидна. Очевидно, что по даннымъ вѣроятностямъ p', p''...q', q''... уравненіе

$$p'a'+p''a''+\ldots=q'b'+q''b''+\ldots$$

можетъ служить для опредѣленія одной изъ величинъ a', a''... b', b''... когда остальныя извѣстны.

Положимъ еще, что игрокъ B обязывается платить игроку A столько рублей, сколько вскроется очковъ при бросаніи кости. Спрашивается, сколько A долженъ платить B за каждый пріёмъ. Математическое ожиданіе игрока A будетъ

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)^{руб.}=3^{руб.}\frac{1}{2};$$

слѣдовательно A обязанъ платить игроку B по $3^{р.}\frac{1}{2}$ за каждый пріёмъ. Если бы условились напередъ съиграть m партій, то игроку B надлежало бы получить отъ A m разъ $3^{р.}\frac{1}{2}$, то есть $\frac{m}{2}\cdot7^{р.}$. Легко видѣть, что, при такомъ условіи соотвѣтственные выигрыши и проигрыши должны болѣе и болѣе уравновѣшиваться между собою по мѣрѣ увеличенія числа партій. Дѣйствительно, игрокъ A проиграетъ на нумерахъ

$$1,\ 2,\ 3 \quad \text{по} \quad 2^{р.}\frac{1}{2},\quad 1^{р.}\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\,р.,$$

и, напротивъ того, выиграетъ на слѣдующихъ:

4, 5, 6 по $\frac{1}{2}p$, $1^{p}.\frac{1}{2}$, $2^{p}.\frac{1}{2}$;

но какъ въ силу Бернулліевой теоремы, при значительномъ числѣ бросаній, отношеніе числа появленій какого ни есть нумера къ числу появленій другаго, весьма близко къ единицѣ, то изъ этого слѣдуетъ, что проигрышъ на какой либо нумеръ, напримѣръ на n° 1, чувствительнымъ образомъ вознаградится выигрышемъ на n° 6; тò же самое должно разумѣть о n°n° 2 и 5; n°n° 3 и 4.

Послѣ этихъ предварительныхъ объясненій, мы можемъ перейти къ приложеніямъ изложенныхъ здѣсь правилъ къ задачамъ, требующимъ болѣе трудныхъ аналитическихъ пріёмовъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ ПРЕДЪИДУЩИХЪ ПРАВИЛЪ КЪ РѢШЕНІЮ РАЗНЫХЪ ВОПРОСОВЪ, ОТНОСЯЩИХСЯ КЪ ИГРѢ ВЪ КОСТИ, КЪ ЛОТЕРЕЯМЪ, ЗАКЛАДАМЪ И КЪ БЕЗОБИДНОМУ РАЗДѢЛУ СТАВКИ МЕЖДУ ИГРОКАМИ ДО ОКОНЧАНІЯ ИГРЫ.

35. Для упражненія въ аналитическихъ пріёмахъ, употребляемыхъ въ Теоріи Вѣроятностей, и для поясненія правилъ, относящихся къ математическому ожиданію, предлагаемъ здѣсь разные вопросы съ подробными ихъ рѣшеніями.

Дано извѣстное число n *одинаковыхъ костей; каждая изъ нихъ имѣетъ* m *граней, на которыхъ написаны нумера* 1, 2, 3... *до* m. *Спрашивается, въ какомъ отношеніи должны быть ставки двухъ игроковъ* A *и* B, *играющихъ на слѣдующемъ условіи: всѣ кости бросаютъ разомъ; если сумма вскрывшихся нумеровъ равна опредѣленному числу* s+1, *то выигрываетъ всю ставку игрокъ* A, *а если эта сумма не равна* s+1, *то ставка принадлежитъ игроку* B.

Означимъ чрезъ p вѣроятность, что игрокъ A выиграетъ ставку, то есть, что сумма выпавшихъ очковъ при совокупномъ бросаніи всѣхъ n костей, будетъ равна числу $s+1$. Противная вѣроятность, то есть вѣроятность что B выиграетъ ставку, выразится разностію $1-p$. Слѣдовательно, если изобразимъ чрезъ M полную ставку, а чрезъ M' и M'' части, внесенныя игроками A и B, то въ силу № 31 получимъ

$$\frac{M'}{M''}=\frac{p}{1-p},$$

и какъ сверхъ того имѣемъ

$$M'+M''=M,$$

то и найдется

$$M'=pM, \qquad M''=(1-p)M. \tag{38}$$

И такъ, рѣшаемый вопросъ приводится къ опредѣленію вѣроятности p, что бросивъ всѣ n костей разомъ, сумма вскрывшихся очковъ будетъ равняться назначенному напередъ числу $s+1$.

Означимъ чрезъ y число случаевъ, при которыхъ сумма выпавшихъ очковъ на разсматриваемыхъ n костяхъ равна $s+1$, а чрезъ z число всѣхъ возможныхъ соединеній нумеровъ при совокупномъ бросаніи костей; получимъ $p=\frac{y}{z}$. Знаменатель этой дроби опредѣляется непосредственно: такъ какъ онъ изображаетъ число сочетаній съ повтореніями m буквъ или нумеровъ, совокупляемыхъ по-n, то и будетъ равенъ m^n; слѣдовательно

$$p=\frac{y}{m^n}. \tag{39}$$

Для опредѣленія величины y надобно найти совокупность всѣхъ возможныхъ соединеній n чиселъ, взятыхъ въ ряду

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots m$$

съ тѣмъ условіемъ, чтобы сумма ихъ равнялась числу $s+1$. Для достиженія этой цѣли, разсмотримъ степенное количество

$$(x^1+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n.$$

Возвышая въ степень окажется, что каждый членъ разложенія будетъ вида

$$A.x^\alpha.x^\beta.x^\gamma\ldots x^\nu=A.x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu},$$

гдѣ число показателей α, β, $\gamma\ldots\nu$, по свойству производимаго дѣйствія, будетъ равно n. Если примемъ теперь

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu=s+1,$$

то коэффиціентъ A очевидно изобразитъ число совокупленій n чиселъ, взятыхъ въ ряду 1, 2, 3... до m, и сумма которыхъ равна $s+1$; слѣдовательно, въ настоящемъ предположеніи, A будетъ равняться y. И такъ, y есть коэффиціентъ $(s+1)^{\text{ой}}$ степени перемѣнной x въ разложеніи $(x^1+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n$. Опредѣленіе этого коэффиціента весьма просто: дѣйствительно, принявъ въ соображеніе что

$$(x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n=x^n(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})^n$$
$$=x^n\left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n=x^n(1-x^m)^n(1-x)^{-n},$$

и разложивъ потомъ $(1-x^m)^n$ и $(1-x)^{-n}$, получимъ

$$(1-x^m)^n=1-nx^m+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{2m}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{3m}+\cdots$$

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{1.2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots s}{1.2.3\ldots(s-n+1)}x^{s-n+1}+\cdots$$

Но, очевидно, коэффиціентъ $(s+1)^{\text{ой}}$ степени x въ выраженіи

$$(x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n = x^n(1-x^m)^n(1-x)^{-n}$$

будетъ одинаковъ съ коэффиціентомъ $(s+1-n)^{\text{ой}}$ степени въ произведеніи приведенныхъ сей-часъ двухъ разложеній $(1-x^m)^n$ и $(1-x)^{-n}$. И такъ, удержавъ въ упоминаемомъ произведеніи только тѣ члены, въ которые входитъ степѣнь x^{s+1-n}, получимъ безъ малѣйшаго затрудненія

$$y = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots s}{1.2.3\ldots(s-n+1)} - n\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(s-m)}{1.2.3\ldots(s-n+1-m)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(s-2m)}{1.2.3\ldots(s-n+1-2m)} - \text{ и проч.}$$

Если положимъ

$$s-m=s', \quad s-2m=s'', \quad s-3m=s''', \ldots$$

то предъидущая формула приметъ слѣдующій симетрическій видъ, болѣе удобный для численныхъ приложеній:

$$\left.\begin{aligned} y = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} &- n\cdot\frac{s'(s'-1)(s'-2)\ldots(s'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{s''(s''-1)(s''-2)\ldots(s''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} - \text{ и проч.} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Ясно, что этотъ рядъ прекращается на томъ членѣ, въ которомъ обозначенное произведеніе будетъ заключать множитель равный нулю или величинѣ отрицательной. Раздѣливъ на m^n найденное значеніе для y, получимъ искомую вѣроятность p, послѣ чего, въ силу уравненія (38), опредѣлятся и соотвѣтственныя ставки игроковъ A и B.

Положимъ, напримѣръ, что имѣемъ въ виду опредѣлить отношеніе ставокъ игроковъ A и B при слѣдующихъ обстоятельствахъ: бросаютъ четыре обыкновенныя шестигранныя кости, и игрокъ A выигрываетъ при вскрытіи 16 очковъ. Въ этомъ случаѣ имѣемъ $n=4$, $m=6$, $s+1=16$, $s'=9$, $s''=3$, и слѣдовательно, въ силу формулы (40),

$$y = \frac{15.14.13}{1.2.3} - 4\cdot\frac{9.8.7}{1.2.3} + \frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{3.2.1}{1.2.3} = 125.$$

Поставивъ эту величину въ формулу (39), получимъ

$$p = \frac{125}{6^4} = \frac{125}{1296},$$

а на основаніи уравненія (38) опредѣлимъ соотвѣтственныя ставки игроковъ A и B, которыя будутъ

$$M' = \frac{125}{1296}M \quad \text{и} \quad M'' = \frac{1171}{1296}M.$$

Приложимъ еще формулу (40) къ совокупному бросанію трехъ обыкновенныхъ костей. Положимъ, что игрокъ A платитъ условленную сумму игроку B, если число вскрывшихся очковъ превышаетъ 10, и, напротивъ того, получаетъ отъ B ту же самую сумму, когда

число выпавшихъ очковъ меньше 11. Спрашивается, удовлетворяетъ ли эта игра*) условію математическаго равенства?

Пусть будетъ p вѣроятность, что сумма вскрывшихся очковъ меньше 11. Такъ какъ $m=6$, $n=3$, то получимъ

$$p = \frac{y}{6^3},$$

гдѣ y изображаетъ совокупность случаевъ, при которыхъ сумма вскрывшихся нумеровъ меньше 11. И такъ, полагая послѣдовательно въ уравненіи (40) $s+1=3$, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10, и сложивъ найденные результаты, получимъ

$$y = 1+3+6+10+15+21+25+27 = 108,$$

откуда, въ силу формулы (39),

$$p = \frac{108}{6^3} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 1-p = \frac{1}{2};$$

слѣдовательно, вѣроятности выигрыша для обоихъ игроковъ одинаковы, и поэтому разсматриваемая игра безобидна.

36. Займемся теперь приложеніемъ Исчисленія Вѣроятностей къ лотереямъ. Прежде всего предложимъ себѣ слѣдующій общій вопросъ, рѣшеніе котораго непосредственно приведетъ насъ къ условію безобидности этой игры:

Лотерея состоитъ изъ s различныхъ нумеровъ, изъ числа которыхъ n выходятъ при каждомъ ея розыгрышѣ. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что изъ m выбранныхъ нумеровъ выйдетъ, при первомъ розыгрышѣ лотереи, l нумеровъ въ какомъ ни есть, не опредѣленномъ напередъ порядкѣ.

Замѣтимъ, что s буквъ или нумеровъ, соединяемые по-n, доставляютъ

$$\frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{1.2.3\ldots n} = C_{s,n}$$

различныхъ соединеній, предполагая, что не принимаемъ въ соображеніе порядка послѣдованія нумеровъ. Равнымъ образомъ, формула

$$C_{m,l} = \frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.2.3\ldots l}$$

изобразитъ число всѣхъ возможныхъ соединеній m назначенныхъ напередъ нумеровъ, соединяемыхъ по-l. Если теперь, изъ числа s нумеровъ, составляющихъ лотерею, откинемъ выбранные игрокомъ m нумеровъ, и остальные $s-m$ совокупимъ между собою по $n-l$, то получимъ

$$C_{s-m,\,n-l} = \frac{(s-m)(s-m-1)\ldots(s-m-n+l+1)}{1.2.3\ldots(n-l)}.$$

*) Эта игра извѣстна у Французовъ подъ названіемъ *passe-dix*.

Но, очевидно, что каждое изъ этихъ послѣднихъ соединеній совокупляясь съ каждымъ изъ $C_{m,l}$, доставитъ $C_{m,l}.C_{s-m,n-l}$ новыхъ соединеній всѣхъ нумеровъ s, взятыхъ по-n, и въ каждое изъ нихъ войдетъ l нумеровъ изъ числа выбранныхъ m. И такъ, совокупность случаевъ вскрытія l нумеровъ изъ числа выбранныхъ m, выражается произведеніемъ

$$C_{m,l}.C_{s-m,n-l}.$$

Сверхъ того, всѣхъ возможныхъ соединеній s нумеровъ, взятыхъ по-n, будетъ $C_{s,n}$; поэтому отношеніе

$$\frac{C_{m,l}.C_{s-m,n-l}}{C_{s,n}}$$

изобразитъ искомую вѣроятность. Означивъ ее чрезъ p, и подставивъ на мѣсто $C_{m,l}$, $C_{s-m,n-l}$ и $C_{s,n}$ равныя имъ величины, получимъ формулу

$$p=\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.2.3\ldots l}.\frac{(s-m)(s-m-1)\ldots(s-m-n+l+1)}{1.2.3\ldots(n-l)}.\frac{1.2.3\ldots n}{s(s-1)\ldots(s-n+1)}, \quad (41)$$

которая, по сокращеніи, приметъ видъ:

$$p=\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1).n(n-1)\ldots(n-l+1).(s-m)(s-m-1)\ldots(s-m-n+l+1)}{1.2.3\ldots l.s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}. \quad (42)$$

Если бы требовалось опредѣлить вѣроятность, что изъ m выбранныхъ нумеровъ выйдетъ *не менѣе* l нумеровъ, то для этого стоило бы только вычислить значенія p, по формулѣ (42), подставляя въ нее послѣдовательно на мѣсто l числа l, $l+1$, $l+2$,... до n когда $m>n$, и только до m, когда $m<n$. Въ случаѣ $m=n$, рядъ l, $l+1$, $l+2$,... долженъ быть продолженъ включительно до m или n, чтó всё равно. Сумма полученныхъ такимъ образомъ частныхъ вѣроятностей, изобразитъ очевидно искомую вѣроятность. Подобнымъ образомъ, если бы желали опредѣлить вѣроятность, что изъ числа m выбранныхъ нумеровъ, выдернется *не болѣе* l и *не менѣе* l' нумеровъ, то на мѣсто l слѣдовало бы подставить послѣдовательно въ ту же формулу (42) числа: l, $l-1$, $l-2$,... до l'. Сумма полученныхъ такимъ образомъ дробей, изобразитъ искомую вѣроятность.

Должно замѣтить, что когда при подстановленіи на мѣсто l чиселъ l, $l+1$, $l+2$... въ формулу (41), дойдемъ до числа n, то послѣдній множитель $s-m-n+l+1$ выраженія

$$C_{s-m,n-l}=\frac{(s-m)(s-m-1)\ldots(s-m-n+l+1)}{1.2.3\ldots(n-l)}$$

обратится въ $s-m+1$, то есть, въ число бóльшее нежели первый множитель $s-m$; знаменатель, въ томъ же предположеніи, обращается въ нуль, и разсматриваемое выраженіе не будетъ имѣть никакого опредѣленнаго значенія. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ, выраженіе $C_{s-m,n-l}$ должно быть замѣнено *единицею*. И дѣйствительно, такъ какъ въ настоящемъ предположеніи $n=l$, то для опредѣленія вѣроятности слѣдуетъ найти число

соединеній m выбранныхъ буквъ, совокупляемыхъ по-l, и это число раздѣлить на совокупность всѣхъ возможныхъ соединеній изъ s буквъ, взятыхъ также по-l. И такъ, при $l=n$, будетъ

$$p=\frac{C_{m,l}}{C_{s,l}},$$

или

$$p=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-l+1)}{s(s-1)(s-2)\ldots(s-l+1)}. \quad (43)$$

Когда принимаютъ въ расчётъ самый порядокъ послѣдованія нумеровъ, или, иначе, когда назначаютъ напередъ мѣсто каждаго нумера при розыгрышѣ лотереи, то вѣроятность выигрыша значительно уменьшается. Дѣйствительно, положимъ, для простоты, что разсматривается тотъ случай, когда $m=l$; формула (42) приметъ видъ

$$p=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)}{s(s-1)(s-2)\ldots(s-l+1)}. \quad (44)$$

Это значеніе p изображаетъ вѣроятность, что при s нумерахъ, составляющихъ лотерею, изъ числа которыхъ выходитъ каждый разъ по n нумеровъ, l назначенныхъ напередъ нумеровъ выйдутъ въ какомъ ни есть порядкѣ при первомъ ея розыгрышѣ. Но если бы желали опредѣлить вѣроятность, что эти самые l нумеровъ выйдутъ на опредѣленныхъ напередъ мѣстахъ, то слѣдовало бы раздѣлить найденную величину p на совокупность всѣхъ возможныхъ переложеній n нумеровъ, взятыхъ по-l, то есть на произведеніе $n(n-1)\ldots(n-l+1)$, ибо, изъ всѣхъ переложеній, одно только удовлетворяетъ требованію настоящей задачи. И такъ, въ этомъ случаѣ получимъ

$$p=\frac{1}{s(s-1)(s-2)\ldots(s-l+1)}. \quad (45)$$

На основаніи изложеннаго здѣсь рѣшенія задачи о лотереяхъ, нетрудно будетъ вывести и условіе ихъ безобидности. Дѣйствительно, положимъ что игрокъ A взялъ билетъ на одинъ или нѣсколько нумеровъ; пусть будетъ M плата за этотъ билетъ, а x сумма, рискуемая содержателемъ лотереи въ отношеніи къ игроку A. Сверхъ того, означимъ чрезъ p вѣроятность, что A выиграетъ означенную сумму x. Произведеніе px изобразитъ математическое ожиданіе игрока A [N° 31], а $1.M$ математическую выгоду содержателя лотереи, чтó очевидно, ибо онъ получилъ ставку M, которая и принадлежитъ ему безвозвратно; поэтому можно сказать, что для него вѣроятность полученія суммы M равна единицѣ или достовѣрности. И такъ, для математическаго равенства лотереи, должно быть

$$px=M \quad \text{или} \quad x=\frac{M}{p}. \quad (46)$$

Отсюда слѣдуетъ, что сумма, рискуемая лотереею въ отношеніи къ лицу, взявшему би-

летъ, равняется платѣ за билетъ, раздѣленной на вѣроятность выигрыша. Что же касается до вѣроятности, то она опредѣляется по предъидущимъ формуламъ.

Прежде нежели приведемъ нѣкоторыя численныя приложенія объясненныхъ выше правилъ, изложимъ еще рѣшеніе одной любопытной задачи, которая относится къ занимающему насъ предмету.

Лотерея состоитъ изъ s *нумеровъ; при каждомъ ея розыгрышѣ выходитъ по* n *нумеровъ. Спрашивается, какъ велика вѣроятность* p, *что въ* m *розыгрышей лотереи, всѣ эти* s *нумеровъ выйдутъ.*

*Эйлеръ**) и *Лапласъ***) рѣшили этотъ вопросъ различными путями. Предлагаемъ здѣсь способъ Эйлера, и вмѣстѣ съ тѣмъ отсылаемъ читателей къ ПРИМѢЧАНІЮ VI, въ которомъ они найдутъ какъ формулу Лапласа, такъ и доказательство тожества обоихъ рѣшеній. Положимъ, что имѣемъ s буквъ a, b, c, d.. или нумеровъ 1, 2, 3, 4..., и соединяемъ ихъ по-n. Если изобразимъ число всѣхъ такихъ соединеній чрезъ P_s, то получимъ

$$P_s = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Равнымъ образомъ, означимъ чрезъ P_{s-1}, P_{s-2}... совокупность подобныхъ же соединеній, соотвѣтствующихъ числамъ $s-1$, $s-2$.... буквъ или нумеровъ. Допустимъ теперь, что произведено m розыгрышей лотереи, и что полученныя m соединеній по-n буквъ совокуплены въ одну сложность, которая очевидно будетъ заключать въ себѣ mn буквъ съ повтореніемъ и безъ повторенія. Число всѣхъ возможныхъ такого рода сложностей изобразится степенью P^m_s. Дѣйствительно, при двухъ розыгрышахъ лотереи, каждое изъ P_s возможныхъ соединеній перваго розыгрыша совокупится съ каждымъ изъ P_s соединеній втораго розыгрыша, что̀ и составитъ P^2_s сложностей. При третьемъ розыгрышѣ, каждая изъ P^2_s сложностей совокупится съ каждымъ изъ P_s прежнихъ соединеній, и составитъ всего P^3_s сложностей, и такъ далѣе. Но ясно, что изъ этого числа P^m_s сложностей, нѣкоторыя будутъ содержать всѣ s буквъ, а другія не всѣ, и вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы найти число тѣхъ сложностей, которыя заключаютъ въ себѣ всѣ буквы. Пусть будетъ y это число; искомая вѣроятность получится раздѣливъ y на совокупность всѣхъ возможныхъ случаевъ, то есть на P^m_s. И такъ

$$p = \frac{y}{P^m_s}. \qquad (47)$$

*) *Opuscula analytica*; Томъ II стр. 333.

**) *Théorie analytique des Probabilités*,

Для опредѣленія числителя y, должно изъ величины P^m_s исключить всѣ тѣ сложности или сочетанія, которыя не содержатъ въ себѣ буквы a, потомъ буквы b, буквы c и такъ далѣе. Число всѣхъ возможныхъ сочетаній, въ которыя не входитъ одна буква, напримѣръ a, при m-кратномъ розыгрышѣ лотереи, заключающей $s-1$ нумеровъ, будетъ P^m_{s-1}, а какъ число исключаемыхъ послѣдовательно буквъ a, b, c... равно s, то и найдется sP^m_{s-1} сочетаній, которыя слѣдуетъ исключить изъ P^m_s. И такъ, послѣ перваго дѣйствія, найдется разность

$$P^m_s - sP^m_{s-1}.$$

Но, отнявъ sP^m_{s-1} отъ P^m_s, мы исключили сперва всѣ сочетанія, заключающія букву a, слѣдовательно и тѣ, въ которыя первоначально не входили буквы b и a; потомъ, исключивъ сочетанія, заключающія въ себѣ букву b, вмѣстѣ съ тѣмъ исключили и тѣ, въ ко̀торыя не входили буквы a и b. Поэтому, соединеніе ab было устранено два раза, а не одинъ разъ, какъ слѣдовало. То̀ же самое должно разумѣть о двойныхъ соединеніяхъ ac, ad,... bc, bd,... cd,.. , число которыхъ, включая сюда соединеніе ab, равно $\frac{s(s-1)}{1.2}$. И такъ, число сочетаній $\frac{s(s-1)}{1.2}.P^m_{s-2}$ исключено два раза, тогда какъ слѣдовало исключить его только одинъ разъ, почему, для вѣрности вывода, должно прибавить этотъ членъ къ предъидущей разности. Въ силу этого замѣчанія, получимъ выраженіе

$$P^m_s - sP^m_{s-1} + \frac{s(s-1)}{1.2}.P^m_{s-2}.$$

Далѣе, сочетанія, въ которыхъ недостаетъ трехъ буквъ, напримѣръ a, b, c, были исключены три раза, а именно: въ первый разъ при исключеніи a, во второй, при исключеніи b, и въ третій разъ при исключеніи c. Но, съ другой стороны, это самое число сочетаній было введено втройнѣ присовокупленіемъ члена $\frac{s(s-1)}{1.2}.P^m_{s-2}$, именно съ сочетаніями, не заключающими сперва a и b, потомъ a и c, потомъ b и c. Такъ какъ сочетанія, о которыхъ идетъ рѣчь, были и прибавлены и исключены три раза, то придется отнять ихъ только одинъ разъ; но ихъ совокупность изображается чрезъ $\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}.P^m_{s-3}$; слѣдовательно получимъ

$$P^m_s - sP^m_{s-1} + \frac{s(s-1)}{1.2}.P^m_{s-2} - \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}.P^m_{s-3}.$$

Исключая точно такимъ образомъ сочетанія, заключающія четыре буквы, найдется

$$P^m_s - sP^m_{s-1} + \frac{s(s-1)}{1.2}.P^m_{s-2} - \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}.P^m_{s-3} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}.P^m_{s-4}.$$

Въ этомъ выраженіи послѣдовательные члены составляются по весьма простому закону, который прямо обнаруживается. Чтобъ удостовѣриться въ справедливости аналогіи, положимъ, что въ предъидущей формулѣ дошли до члена

$$\frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-k+2)}{1.2.3\ldots(k-1)}.P^m_{s-k+1},$$

и желаемъ составить членъ, непосредственно слѣдующій за нимъ, то есть членъ, выражающій совокупность исключаемыхъ или прибавляемыхъ сочетаній, въ которыхъ недостаетъ k буквъ. Для этого замѣтимъ, что каждое изъ P^m_{s-k} сочетаній исключено k разъ изъ сочетаній P^m_{s-1}, прибавлено $\frac{k(k-1)}{1.2}$ разъ къ сочетаніямъ P^m_{s-2}, исключено $\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}$ разъ изъ сочетаній P^m_{s-3}, и такъ далѣе; наконецъ, исключено $\frac{k(k-1)(k-2)\ldots2}{1.2.3\ldots(k-1)}=k$ разъ изъ сочетаній P^m_{s-k+1}, или прибавлено къ нимъ смотря по тому, будетъ ли $(k-1)$ число нечётное или чётное. Но какъ полное число сложностей, въ которыхъ недостаетъ k буквъ, будетъ

$$\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{1.2.3\ldots k}.P^m_{s-k},$$

то и получимъ

$$\left[-k+\frac{k(k-1)}{1.2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}+\cdots+(-1)^{k-1}k\right].\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{1.2.3\ldots k}.P^m_{s-k} \qquad (48)$$

для числа сочетаній, безъ k буквъ, и которыя заключаются въ выраженіи

$$P^m_s-sP^m_{s-1}+\cdots+(-1)^{k-1}.\frac{s(s-1)\ldots(s-k+2)}{1.2.3\ldots(k-1)}.P^m_{s-k+1} \qquad (49)$$

въ излишествѣ или въ недостаткѣ. Съ другой же стороны,

$$(1-1)^k=1-k+\frac{k(k-1)}{1.2}-\cdots+(-1)^{k-1}k+(-1)^k=0,$$

почему рядъ

$$-k+\frac{k(k-1)}{1.2}-\cdots+(-1)^{k-1}k$$

равенъ 0 или -2, смотря по тому, будетъ ли k число нечётное или чётное. Слѣдовательно, выраженіе (48) обратится въ 0 для k нечётнаго, а въ $-2.\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{1.2.3\ldots k}.P^m_{s-k}$ для k чётнаго. Въ первомъ случаѣ надобно вычесть изъ выраженія (49) членъ

$$\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{1.2.3\ldots k}.P^m_{s-k},$$

а во второмъ, придать его. И такъ, искомая величина y опредѣлится разложеніемъ

$$P^m_s-sP^m_{s-1}+\frac{s(s-1)}{1.2}.P^m_{s-2}-\cdots+(-1)^k.\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{1.2.3\ldots k}.P^m_{s-k},$$

въ которомъ послѣдній членъ очевидно будетъ соотвѣтствовать предположенію $k=s-n$. Слѣдовательно

$$y=P^m_s-s.P^m_{s-1}+\frac{s(s-1)}{1.2}.P^m_{s-2}-\cdots+(-1)^{s-n}.\frac{s(s-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(s-n)}.P^m_n. \qquad (50)$$

Сверхъ того можно замѣтить, что, по свойству вопроса, величина m непремѣнно должна быть не менѣе отношенія $\frac{s}{n}$, или, что всё равно, произведеніе $mn>s$ или $=s$. Дѣй-

ствительно, еслибы имѣли $mn<s$, то каждое изъ сочетаній, состоящее только изъ mn буквъ, не могло бы заключать въ себѣ всѣхъ s буквъ. И такъ, вторая часть формулы (50), при $m<\frac{s}{n}$, обращается въ нуль, что впрочемъ можно доказать и непосредственно [ПРИМѢЧАНІЕ VI].

Если бы, при каждомъ розыгрышѣ лотереи, выходило только по одному нумеру, то имѣли бы $n=1$, и слѣдовательно величину P^m_s надлежало бы замѣнить степенью s^m. Тогда формула (50) приняла бы видъ

$$y=s^m-s(s-1)^m+\frac{s(s-1)}{1.2}(s-2)^m-\cdots+(-1)^{s-1}.s.1^m,$$

а вѣроятность p, въ этомъ случаѣ, изобразилась бы чрезъ

$$p=1-s\left(\frac{s-1}{s}\right)^m+\frac{(s-1)}{1.2}\left(\frac{s-2}{s}\right)^m-\cdots+(-1)^{s-1}.s.\left(\frac{1}{s}\right)^m. \qquad (51)$$

Легко доказать, что если въ этомъ ряду дойдемъ до такого члена, который будетъ менѣе предъидущаго, то, начиная съ этого члена, рядъ становится убывающимъ, и слѣдовательно сходящимся. Пусть будутъ

$$A=\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{1.2.3\ldots k}.\left(\frac{s-k}{s}\right)^m \quad \text{и} \quad B=\frac{s(s-1)\ldots(s-k)}{1.2.3\ldots(k+1)}.\left(\frac{s-k-1}{s}\right)^m$$

эти два смежные члена, и, по предположенію, отношеніе втораго изъ нихъ къ первому менѣе единицы. Слѣдовательно имѣемъ

$$\frac{B}{A}=\frac{s-k}{k+1}\left(\frac{s-k-1}{s-k}\right)^m<1, \quad \text{откуда} \quad \left(\frac{s-k-1}{s-k}\right)^m<\frac{k+1}{s-k}.$$

При разсматриваніи отношенія дальнѣйшаго члена къ предшествующему, число k будетъ больше. Положимъ, напримѣръ, что k обратилось въ $k+k'$. Очевидно, что первая часть неравенства, равная въ этомъ случаѣ

$$\left(\frac{s-k-k'-1}{s-k-k'}\right)^m,$$

будетъ менѣе $\left(\frac{s-k-1}{s-k}\right)^m$, ибо

$$\frac{s-k-k'-1}{s-k-k'}<\frac{s-k-1}{s-k},$$

въ чемъ легко удостовѣриться чрезъ уничтоженіе знаменателей $s-k-k'$ и $s-k$; съ другой стороны, вторая часть неравенства увеличится чрезъ подстановленіе $k+k'$ на мѣсто k, потому что мы увеличиваемъ числитель, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, уменьшаемъ знаменатель. Слѣдовательно неравенство

$$\left(\frac{s-k-1}{s-k}\right)^m<\frac{k+1}{s-k},$$

для дальнѣйшихъ членовъ, то есть для возрастающихъ значеній k, нетолько не нарушится, но тѣмъ съ бо́льшею причиною будетъ имѣть мѣсто. Отсюда непосредственно заключаемъ о справедливости свойства относительно сходимости ряда (51).

Когда числа s и m значительны, то вычисленіе величины y, а слѣдовательно и искомой вѣроятности p посредствомъ формулъ (50) и (51), дѣлается, по продолжительности своей, почти невозможнымъ. Для устраненія такого неудобства, Эйлеръ предложилъ способъ, который изложимъ здѣсь съ надлежащими подробностями.

Положимъ для краткости

$$sP^m{}_{s-1} = A,\quad \frac{s(s-1)}{1.2}\cdot P^m{}_{s-2} = B,\quad \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\cdot P^m{}_{s-3} = C,\quad \text{и проч.}$$

Вѣроятность p, въ силу формулъ (50) и (47), будетъ

$$p = 1 - \frac{A}{P^m{}_s} + \frac{B}{P^m{}_s} - \frac{C}{P^m{}_s} + \cdots \tag{52}$$

Опредѣлимъ теперь отношеніе каждаго члена этого ряда къ своему предъидущему независимо отъ знака. Получимъ

$$\frac{A}{P^m{}_s} = s\cdot\frac{P^m{}_{s-1}}{P^m{}_s},\quad \frac{B}{A} = \frac{s-1}{2}\cdot\frac{P^m{}_{s-2}}{P^m{}_{s-1}},\quad \frac{C}{B} = \frac{s-2}{3}\cdot\frac{P^m{}_{s-3}}{P^m{}_{s-2}},\ldots\ldots;$$

подставляя же на мѣсто $P^m{}_s, P^m{}_{s-1}, P^m{}_{s-2}\ldots$ равныя имъ величины, найдется по сокращеніи

$$\frac{P^m{}_{s-1}}{P^m{}_s} = \left(\frac{s-n}{s}\right)^m,\quad \frac{P^m{}_{s-2}}{P^m{}_{s-1}} = \left(\frac{s-n-1}{s-1}\right)^m,\quad \frac{P^m{}_{s-3}}{P^m{}_{s-2}} = \left(\frac{s-n-2}{s-2}\right)^m,\ldots\ldots,$$

откуда заключаемъ

$$\frac{A}{P^m{}_s} = s\left(\frac{s-n}{s}\right)^m,\quad \frac{B}{A} = \frac{s-1}{2}\left(\frac{s-n-1}{s-1}\right)^m,\quad \frac{C}{B} = \frac{s-2}{3}\left(\frac{s-n-2}{s-2}\right)^m,\ldots\ldots$$

Взявъ логариѳмы этихъ отношеній, получимъ

$$\log.\frac{A}{P^m{}_s} = \log.s - m\log.\left(\frac{s}{s-n}\right)$$
$$\log.\frac{B}{A} = \log.\left(\frac{s-1}{2}\right) - m\log.\left(\frac{s-1}{s-n-1}\right)$$
$$\log.\frac{C}{B} = \log.\left(\frac{s-2}{3}\right) - m\log.\left(\frac{s-2}{s-n-2}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Теперь легко найти логариѳмы послѣдовательныхъ членовъ ряда (52), а слѣдовательно и самые эти члены. Дѣйствительно, будетъ

$$\log.\frac{A}{P^m{}_s} = \log.s - m\log.\left(\frac{s}{s-n}\right)$$
$$\log.\frac{B}{P^m{}_s} = \log.\frac{A}{P^m{}_s} + \log.\frac{B}{A}$$
$$\log.\frac{C}{P^m{}_s} = \log.\frac{B}{P^m{}_s} + \log.\frac{C}{B}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Эти формулы въ совокупности съ предъидущими, послужатъ, при пособіи логариѳмическихъ таблицъ, для опредѣленія послѣдовательныхъ членовъ ряда (52), тѣмъ быстрѣе сходящагося, чѣмъ число m будетъ больше.

На основаніи выведенныхъ въ этомъ N° формулъ, предложимъ рѣшеніе нѣкоторыхъ численныхъ вопросовъ о лотереяхъ. Разсмотримъ въ подробности лотерею, которая разъигрывалась во Франціи и во многихъ Германскихъ областяхъ. Она состояла изъ 90 нумеровъ, и при каждомъ ея розъигрышѣ, выходило по 5 нумеровъ. По условію лотереи, можно было ставить произвольную сумму на *одинъ* опредѣленный напередъ нумеръ, или разомъ на *два* опредѣленные нумера, на *три*, на *четыре*, и наконецъ на *пять*, что̀ и составляетъ по порядку *простую одиночку*, *амбу*, *тернъ*, *кватернъ* и *кинъ*. Когда въ числѣ вышедшихъ пяти нумеровъ находился тотъ нумеръ, или совокупность тѣхъ нумеровъ, на которые были выданы билеты, то предъявители сихъ билетовъ получали отъ Дирекціи условленныя суммы, соразмѣрныя съ ихъ ставками. Но, при этой выдачѣ, Французская лотерея руководствовалась правилами, противными всякой справедливости. Вычислимъ предварительно каковы должны быть эти выдачи за *простую одиночку*, за *амбу*, *тернъ*, *кватернъ* и *кинъ*, чтобы математическое равенство лотереи не было нарушено. Сравнивая настоящій вопросъ съ общимъ, который рѣшенъ въ началѣ этого нумера, находимъ

$$s = 90,\quad n = 5,\quad m = l;$$

и такъ, формула (44) приметъ видъ

$$p = \frac{5.4\ldots(6-l)}{90.89\ldots(91-l)}.$$

Слѣдовательно, по формулѣ (46),

$$x = \frac{90.89\ldots(91-l)}{5.4\ldots(6-l)}.M,$$

гдѣ M изображаетъ ставку взявшаго билетъ, а x сумму, которую онъ долженъ получить отъ Дирекціи въ случаѣ выигрыша. Полагая послѣдовательно $l = 1$, 2, 3, 4 и 5, найдется

За *простую одиночку*..............$x = 18.M$
За *амбу*..............................$x = 400\frac{1}{2}.M$
За *тернъ*............................$x = 11748.M$
За *кватернъ*........................$x = 511038.M$
За *кинъ*.............................$x = 43949268.M.$

Принявъ въ формулѣ (45) $s = 90$, получимъ

$$p = \frac{1}{90.89\ldots(91-l)},$$

и слѣдовательно

$$x = 90.89\ldots(91-l).M.$$

Полагая послѣдовательно $l = 1, 2, 3$ и проч., найдется

За *опредѣленную одиночку*........................$x = 90.M$

За *опредѣленную амбу*........................$x = 8010.M$

За *опредѣленный тернъ*........................$x = 704880.M$

и проч. и проч.

За выходъ *простой одиночки* платили только 15 ставокъ, хотя по расчёту слѣдовало выдавать 18. И такъ выгода Дирекціи лотереи равнялась въ этомъ случаѣ $\frac{18-15}{18}\cdot M = \frac{1}{6}\cdot M$.

За выходъ *опредѣленной одиночки*, то есть, за выходъ опредѣленнаго нумера на означенномъ напередъ мѣстѣ, изъ числа пяти, напримѣръ на первомъ, выдавали 70 ставокъ вмѣсто 90. Выгода содержателей лотереи равнялась $\frac{90-70}{90}\cdot M = \frac{2}{9}\cdot M$.

За *амбу* платили 270 ставокъ; между тѣмъ слѣдовало выдать $400\frac{1}{2}$ ставокъ. И такъ, выгода содержателя лотереи была въ этомъ случаѣ $\frac{400\frac{1}{2}-270}{400\frac{1}{2}}\cdot M = \frac{29}{89}\cdot M$.

Опредѣленная амба, то есть совокупный выходъ двухъ опредѣленныхъ нумеровъ, на мѣстахъ напередъ назначенныхъ, получала 5100 ставокъ, вмѣсто 8010. Выгода лотереи равнялась $\frac{8010-5100}{8010}\cdot M = \frac{97}{267}.M$.

Тернъ доставлялъ только 5500 вмѣсто 11748 ставокъ. Выгода Дирекціи равнялась $\frac{11748-5500}{11748}\cdot M = \frac{142}{267}\cdot M$.

За *кватернъ* выдавали только 75000 ставокъ вмѣсто 511038. Выгода лотереи равнялась $\frac{511038-75000}{511038}\cdot M = \frac{72673}{85173}\cdot M$.

Наконецъ, за *кинъ* или за совокупный выходъ назначенныхъ напередъ пяти нумеровъ, вмѣсто 43949268 ставокъ, платили только 1000000. Въ этомъ случаѣ выгода Дирекціи простиралась до $\frac{43949268-1000000}{43949268}\cdot M = \frac{10737317}{10987317}\cdot M$.

Впрочемъ, въ послѣдствіи, по причинѣ слишкомъ очевидной невѣроятности выхода пяти опредѣленныхъ нумеровъ, *кинъ* былъ отмѣненъ, а остались только *одиночки*, *амбы*, *терны* и *кватерны*.

Таковы были основанія одной изъ главныхъ лотерей; изъ предъидущаго мы видимъ, до какой степени нарушалось въ ней условіе математическаго равенства въ пользу Дирекціи и къ явной невыгодѣ лицъ, покупающихъ билеты. Нѣтъ сомнѣнія, что безъ нарушенія этого равенства ни одна лотерея не можетъ существовать. Издержки по учрежденію конторъ для выдачи билетовъ, жалованье Директорамъ, Сборщикамъ и другимъ служащимъ,

суммы, назначаемыя обыкновенно въ пользу бѣдныхъ, однимъ словомъ всѣ расходы по содержанію лотерей, должны быть покрыты сборомъ за билеты, и слѣдовательно выручка необходимо должна превышать итогъ разъигрываемыхъ капиталовъ или цѣнность вещей. Всё это, даже умалчивая объ соображеніяхъ, основанныхъ на разсматриваніи *нравственнаго ожиданія*, составляющаго предметъ слѣдующей Главы, обнаруживаетъ съ очевидностію невыгоду подвергаться случайностямъ лотерей. Французская лотерея по справедливости вооружившая противъ себя всѣхъ людей здравомыслящихъ, отмѣнена нынѣшнимъ Французскимъ Правительствомъ, убѣдившимся наконецъ въ безправственности подобнаго учрежденія.

Приведемъ еще численныя приложенія формулъ (50) и (51). Руководствуясь показаннымъ выше способомъ Эйлера для вычисленія этихъ рядовъ посредствомъ логариѳмовъ, найдутся слѣдующіе результаты: Положимъ, ищется вѣроятность p, что во 100 розъигрышей Французской лотереи, выйдутъ всѣ 90 нумеровъ. Въ настоящемъ случаѣ будетъ $s=90$, $n=5$, $m=100$. Вычисляя первые шесть членовъ формулы (50), Англійскій математикъ *Тремблей* (*Trembley*, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1794 и 1795 г. стр. 76) нашелъ $p=0{,}7410\ldots$ Такъ какъ эта дробь равна почти $\frac{3}{4}$, то можно сказать, что выходъ всѣхъ 90 нумеровъ, въ 100 розъигрышей, довольно вѣроятенъ. При 200 розъигрышахъ эта самая вѣроятность обращается въ дробь $0{,}9990\ldots$, весьма мало разнствующую отъ единицы, то есть, отъ мѣры достовѣрности. Вычисляя величину p, соотвѣтствующую числу розъигрышей $m=85$ и $m=86$, увидимъ, что она, въ этомъ предположеніи, переходитъ чрезъ $0{,}5=\frac{1}{2}$. Отсюда слѣдуетъ, что тотъ, кто будетъ держать закладъ, поставивъ равную сумму противъ равной, что всѣ нумера выйдутъ въ 85 розъигрышей, имѣетъ небольшую невыгоду въ отношеніи къ противнику, и, напротивъ того, нѣкоторую выгоду, если назначитъ 86 розъигрышей.

Лапласъ ищетъ прямо формулу для опредѣленія числа розъигрышей, при которыхъ вѣроятность выхода всѣхъ нумеровъ лотереи равна опредѣленной дроби. Мы выпускаемъ его рѣшеніе, которое требовало бы довольно подробнаго изложенія, а приводимъ только численный результатъ, относящійся къ случаю, о которомъ сей-часъ упомянули. Предложивъ себѣ найти число m розъигрышей Французской лотереи, при которомъ вѣроятность выхода всѣхъ 90 нумеровъ равнялась бы $\frac{1}{2}$, *Лапласъ* нашелъ $m=85{,}53$*).

*) *Théorie analytique des Probabilités*, стр. 194.

Для приложенія формулы (51), положимъ, что лотерея состоитъ изъ 100 нумеровъ, и что при каждомъ ея розъигрышѣ, выходитъ по одному нумеру. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что всѣ нумера выйдутъ въ 1000 розъигрышей лотереи.

Здѣсь имѣемъ $s=100$, $m=1000$, и формула (51) приметъ видъ

$$p=1-100\left(\frac{99}{100}\right)^{1000}+\frac{100.99}{1.2}\left(\frac{98}{100}\right)^{1000}-\ldots\ldots$$

Вычисляя по логариѳмамъ второй членъ этой формулы, и опуская слѣдующіе за нимъ члены по причинѣ ихъ малости, найдемъ

$$100\left(\frac{99}{100}\right)^{1000}=\frac{100}{23164}=0{,}0043\ldots, \quad \text{и слѣдовательно} \quad p=0{,}9957\ldots.$$

Изъ этого усматриваемъ, что выходъ всѣхъ ста нумеровъ при тысячѣ розъигрышей лотереи, можно считать весьма вѣроятною случайностію.

37. Рѣшимъ теперь задачу объ игрѣ, извѣстной подъ названіемъ *чётъ или нечётъ*. Давно еще, когда не было никакой математической теоріи Вѣроятностей, искустные игроки замѣтили выгоду держать закладъ за появленіе *нечётнаго* числа. Настоящая же мѣра этой выгоды могла быть опредѣлена только посредствомъ вычисленія. Въ Запискахъ Парижской Академіи*) находимъ рѣшеніе упоминаемой задачи, предложенное *Мэраномъ (Mairan)*; но оно ошибочно, какъ мы то̀ покажемъ ниже. Вопросъ, о которомъ говоримъ, рѣшается весьма просто; онъ можетъ быть предложенъ въ слѣдующемъ видѣ:

Изъ опредѣленнаго числа m монетъ, вынимаютъ нѣсколько на-удачу. Игрокъ A держитъ закладъ, что число вынутыхъ монетъ нечётное, а B, напротивъ того, что это число чётное. Спрашивается, въ какомъ отношеніи должны быть ставки игроковъ A и B для безобидности заклада?

Пусть будетъ p вѣроятность появленія *нечётнаго* числа монетъ $1-p$ изобразитъ вѣроятность ихъ появленія въ чётномъ числѣ. Въ силу № 31 искомое отношеніе соотвѣтственныхъ ставокъ игроковъ A и B изобразится дробью $\frac{p}{1-p}$. Слѣдовательно, вопросъ приводится къ опредѣленію вѣроятности p, что вынутое число монетъ будетъ *нечётное*.

Для удобности называемъ монеты буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots\mu$; ихъ число будетъ m. Очевидно, что монеты соединяются между собою въ нечётномъ числѣ по *одиначкѣ*, по *три*, по *пяти* и проч., а въ чётномъ, по *двѣ*, по *четыре*, по *шести* и проч. Слѣдовательно, нечётныя соединенія будутъ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ldots.\ \alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta\delta,\ \alpha\gamma\delta,\ \beta\gamma\delta,\ldots,$$

а чётныя

$$\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \alpha\delta,\ldots\ \beta\gamma,\ \beta\delta,\ldots\ \gamma\delta,\ldots.\ \alpha\beta\gamma\delta,\ldots.$$

*) *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, за 1728 годъ.

Изобразимъ число нечётныхъ соединеній, соотвѣтствующее m монетамъ или m буквамъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta,\ldots\mu$ чрезъ y_m, а чрезъ z_m число чётныхъ соединеній. Дроби

$$\frac{y_m}{y_m+z_m} \quad \text{и} \quad \frac{z_m}{y_m+z_m}$$

соотвѣтсвенно изобразятъ вѣроятности выхода нечётнаго и чётнаго числа монетъ. Если теперь, къ разсматриваемымъ m монетамъ присовокупимъ еще одну, которую означимъ буквою ν, то величины y_m и z_m обратятся въ y_{m+1} и z_{m+1}. Но, съ другой стороны, если къ прежнимъ m монетамъ прибавимъ еще одну, или, что̀ всё равно, введемъ лишнюю букву ν въ соединенія чётныя

$$\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \alpha\delta,\ldots\ \alpha\beta\gamma\delta,\ldots,$$

то всѣ члены этого ряда доставятъ нечётныя соединенія; сверхъ того, получится еще одинъ новый случай, именно, когда монета ν выдернется одна. И такъ, при числѣ $m+1$ монетъ, кромѣ нечётныхъ соединеній

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ldots\ \alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta\delta,\ \alpha\gamma\delta,\ \beta\gamma\delta,\ldots$$

имѣемъ еще z_m+1 новыхъ, именно:

$$\nu,\ \alpha\beta\nu,\ \alpha\gamma\nu,\ \alpha\delta\nu,\ \beta\gamma\nu,\ \beta\delta\nu,\ \gamma\delta\nu,\ldots\ \alpha\beta\gamma\delta\nu,\ldots$$

Слѣдовательно

$$y_{m+1}=y_m+z_m+1.$$

Что касается до новыхъ чётныхъ соединеній, происходящихъ отъ присовокупленія новой монеты, то ихъ очевидно будетъ y_m, ибо они получатся чрезъ введеніе буквы ν въ прежнія нечётныя соединенія, чрезъ что̀ найдется

$$\alpha\nu,\ \beta\nu,\ \gamma\nu,\ \delta\nu\ldots\ \alpha\beta\gamma\nu,\ \alpha\beta\delta\nu,\ \alpha\gamma\delta\nu,\ \beta\gamma\delta\nu,\ldots$$

И такъ

$$z_{m+1}=z_m+y_m;$$

слѣдовательно, на основаніи выведеннаго выше уравненія,

$$y_{m+1}=z_{m+1}+1.$$

Если уменьшимъ единицею указателей подъ y и z, то получимъ уравненіе

$$y_m=z_m+1$$

въ силу котораго равенство

$$y_{m+1}=y_m+z_m+1$$

приметъ слѣдующій, весьма простой видъ:

$$y_{m+1}=2y_m.$$

Вотъ разностное уравненіе перваго порядка, отъ интегрированія котораго зависитъ рѣшеніе занимающаго насъ вопроса. Весьма легко вывести непосредственно интегралъ этого уравненія. Дѣйствительно, измѣняя въ немъ послѣдовательно m въ $m-1$, $m-2$, $m-3,\ldots 1$, получимъ

$$
\begin{aligned}
y_m &= 2y_{m-1}\\
y_{m-1} &= 2y_{m-2}\\
y_{m-2} &= 2y_{m-3}\\
\ldots &\ldots\ldots\\
y_3 &= 2y_2\\
y_2 &= 2y_1.
\end{aligned}
$$

Перемноживъ между собою всѣ эти равенства, и сокративъ на $y_{m-1}\cdot y_{m-2}\cdot y_{m-3}\cdot\ldots\cdot y_2$, получимъ

$$y_m = 2^{m-1}\cdot y_1.$$

Но очевидно, что когда имѣемъ одну монету, то есть, когда $m=1$, то будетъ только одно соединеніе нечётное, а именно *одиночка;* слѣдовательно $y_1=1$, а поэтому

$$y_m = 2^{m-1}, \qquad z_m = 2^{m-1}-1.$$

Подставивъ эти величины въ выраженія для вѣроятностей закладчиковъ A и B, найдется

$$p = \frac{2^{m-1}}{2^m-1}, \qquad 1-p = \frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}.$$

И такъ, соотвѣтственныя ставки игроковъ A и B, для безобидности заклада, должны относиться между собой какъ 2^{m-1} къ $2^{m-1}-1$; отсюда заключаемъ, что при равныхъ закладахъ, выгода будетъ на сторонѣ того игрока, кто̀ утверждаетъ появленія *нечётнаго* числа монетъ, и что эта выгода будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ менѣе монетъ въ игрѣ.

Ошибка Мэрана, о которой мы упомянули въ началѣ этого N°, состояла въ томъ, что онъ принималъ равновозможными всѣ соединенія чётныя и нечётныя. И такъ, въ случаѣ 5 монетъ, онъ разсуждалъ слѣдующимъ образомъ: изъ 5 монетъ можетъ выдернуться *одна*, или *три*, или *пять* монетъ, что̀ и составитъ три случая для нечётныхъ соединеній. Чётныхъ же будетъ только *два*, именно: могутъ выдернуться *двѣ* или *четыре* монеты. Слѣдовательно, по Мэрану, въ этомъ случаѣ, вѣроятность появленія *нечётнаго* числа монетъ равна $\frac{3}{5}$, между тѣмъ какъ на самомъ дѣлѣ эта вѣроятность равна $\frac{2^4}{2^5-1}=\frac{16}{31}$. Изъ приведеннаго нами рѣшенія усматриваемъ, что въ настоящемъ примѣрѣ, вмѣсто трехъ случаевъ нечётныхъ соединеній, которые не равновозможны, должно разсматривать 16 равновозможныхъ, именно: 5 случаевъ появленія монетъ *по-одиначкѣ*, 10 случаевъ появленія ихъ *по-три*, и 1, когда выдернутся всѣ *пять* монетъ. Разсуждая такимъ же образомъ увидимъ, что два неравновозможные случая появленія чётнаго числа монетъ должно замѣнить 15-ю равновозможными. Когда число всѣхъ монетъ *чётное*, то, по Мэрану, выходъ чётнаго или нечётнаго числа монетъ равновѣроятенъ, что̀ безъ сомнѣнія ошибочно.

Если бы число монетъ было неизвѣстно, а знали бы только что оно не превосходитъ n, и можетъ равняться съ одинаковою вѣроятностію всѣмъ возможнымъ числамъ, не пре-

восходящимъ n, то для опредѣленія вѣроятности p появленія нечётнаго числа монетъ, слѣдовало бы взять сумму всѣхъ возможныхъ значеній степени 2^{m-1} отъ $m=1$ до $m=n$, и раздѣлить эту сумму на совокупность всѣхъ статочностей. И такъ, число нечётныхъ соединеній въ этомъ случаѣ будетъ

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1,$$

а чётныхъ

$$(2^0-1)+(2^1-1)+(2^2-1)+\ldots+(2^{n-1}-1)=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}-n=2^n-n-1;$$

совокупность же всѣхъ возможныхъ статочностей выразится суммою

$$(2^n-1)+(2^n-n-1) = 2^{n+1}-n-2.$$

Слѣдовательно, вѣроятность появленія нечётнаго числа монетъ опредѣлится формулою

$$p=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-n-2}, \quad \text{а чётнаго,} \quad 1-p=\frac{2^n-n-1}{2^{n+1}-n-2}.$$

Положимъ еще, что *изъ опредѣленнаго числа* 2m *монетъ,* m *серебреныхъ и* m *золотыхъ, вынимаютъ нѣсколько на-удачу. Спрашивается, какъ велика вѣроятность* p, *что вынувъ чётное число монетъ, будетъ столько серебреныхъ сколько и золотыхъ*

Такъ какъ каждая изъ m серебреныхъ монетъ можетъ выдернуться съ каждою изъ m золотыхъ, то число случаевъ появленія двухъ монетъ, одной серебреной и одной золотой, изобразится произведеніемъ $m.m=m^2$. Число соединеній двухъ монетъ, какъ серебреныхъ такъ и золотыхъ, очевидно равно $\frac{m(m-1)}{1.2}$; слѣдовательно, число случаевъ совокупнаго появленія двухъ серебреныхъ и двухъ золотыхъ монетъ равно $\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{m(m-1)}{1.2}=\left(\frac{m(m-1)}{1.2}\right)^2$. Точно такимъ образомъ найдется, что число случаевъ выхода трехъ серебреныхъ и трехъ золотыхъ монетъ изобразится чрезъ $\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\right)^2$, и такъ далѣе. Слѣдовательно, означивъ чрезъ y число статочностей, благопріятствующихъ ожидаемому событію, получимъ

$$y=m^2+\left(\frac{m(m-1)}{1.2}\right)^2+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\right)^2+\cdots+m^2+1.$$

Сверхъ того, если изобразимъ чрезъ z число всѣхъ возможныхъ соединеній $2m$ монетъ, совокупляемыхъ въ чётномъ числѣ, то искомая вѣроятность будетъ $p=\frac{y}{z}$. Для опредѣленія y въ конечномъ видѣ, стоитъ только замѣтить, что рядъ $m^2+\left(\frac{m(m-1)}{1.2}\right)^2+\cdots+m^2+1$ есть не иное что̀, какъ сумма квадратовъ членовъ разложенія $(1+1)^m$ безъ единицы. Легко видѣть, что эта сумма равна члену разложенія $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^m$, независящему отъ x. Такъ какъ

$$(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^m=\frac{(1+x)^{2m}}{x^m},$$

то членъ, о которомъ идетъ рѣчь, будетъ очевидно средній членъ разложенія $(1+x)^{2m}$, раздѣленный на x^m, то есть

$$\frac{1.2.3\ldots(2m)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots m}=\frac{1.2.3\ldots(2m)}{(1.2.3\ldots m)^2}.$$

И такъ, получимъ

$$y=\frac{1.2.3\ldots(2m)}{(1.2.3\ldots m)^2}-1.$$

Число соединеній $2m$ буквъ, соединяемыхъ по-2, по-4, по-6,... по-$2m$, опредѣляющее величину z, будетъ

$$\frac{2m(2m-1)}{1.2}+\frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1.2.3.4}+\cdots+\frac{2m(2m-1)}{1.2}+1.$$

Но эта сумма очевидно равна

$$\frac{(1+1)^{2m}+(1-1)^{2m}}{2}-1=2^{2m-1}-1;$$

слѣдовательно

$$p=\frac{\frac{1.2.3\ldots(2m)}{(1.2.3\ldots m)^2}-1}{2^{2m-1}-1}.$$

Когда число $2m$ монетъ значительно, то вычисленіе вѣроятности p, по этой формулѣ, дѣлается весьма сложнымъ. Но, въ такомъ случаѣ, величину p можно опредѣлить очень просто по приближенію. Дѣйствительно, въ силу Стирлинговой формулы получимъ [N° 21 форм. (18)]

$$1.2.3\ldots(2m)=\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}\sqrt{4\pi m}$$

$$1.2.3\ldots m=\left(\frac{m}{e}\right)^m\sqrt{2\pi m}.$$

Слѣдовательно

$$p=\frac{\frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}-1}{2^{2m-1}-1},$$

или, откинувъ отрицательную единицу по причинѣ значительности величинъ, изъ которыхъ она вычитается какъ въ числителѣ такъ и въ знаменателѣ, получимъ окончательно

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi m}}.$$

38. Исчисленіе конечныхъ разностей, и преимущественно интегрированіе уравненій въ частныхъ разностяхъ, служитъ весьма важнымъ пособіемъ при рѣшеніи сложнѣйшихъ вопросовъ изъ Анализа Вѣроятностей. Въ предъидущемъ N° мы уже показали, на весьма простомъ вопросѣ, употребленіе этого способа; теперь приступимъ къ болѣе сложнымъ приложеніямъ, и начнемъ съ задачи о *безобидномъ дѣлежѣ*, предметъ которой изложенъ

съ возможною подробностію въ N° 32, и гдѣ задача пояснена численнымъ примѣромъ. Здѣсь предлагается она въ общемъ ея видѣ:

Два игрока A и B, равноискустные, поставили въ игру по-ровну; тотъ изъ нихъ, кто первый выиграетъ извѣстное число, напримѣръ n очковъ, беретъ всю ставку. Но, по какой либо причинѣ, они должны прекратить игру, когда она еще не кончена: первому игроку не достаетъ x очковъ до n, а второму x' очковъ. Спрашивается, какъ раздѣлить ставку между игроками?

Прежде нежели приступимъ къ рѣшенію этой задачи, изложимъ правило, на основаніи котораго подобнаго рода вопросы приводятся къ уравненію. Условимся принимать ожидаемую игрокомъ сумму за единицу, и, въ этомъ предположеніи, назовемъ, по примѣру Якова Бернулли, *судьбою* игрока (sort du joueur) его математическое ожиданіе, очевидно равное самой вѣроятности что онъ выиграетъ. Положимъ теперь, что игра состоитъ изъ нѣсколькихъ пріёмовъ, при извѣстномъ совокупленіи которыхъ она оканчивается въ пользу игрока A. Остановимся на одномъ изъ этихъ пріёмовъ, когда игра еще не кончена, и разсмотримъ въ то время судьбу игрока A. Пріёмъ, на которомъ остановились, можетъ привести, по условіямъ игры, къ разнымъ предположеніямъ или возможнымъ случаямъ; для каждаго изъ сихъ послѣднихъ опредѣляемъ судьбу или вѣроятность, что игрокъ A выиграетъ, и помножаемъ ее на вѣроятность соотвѣтственнаго предположенія. Сумма подобныхъ произведеній относительно всѣхъ возможныхъ предположеній, будетъ равняться, при разсматриваемомъ состояніи игры, искомой судьбѣ игрока A.

Легко удостовѣриться въ справедливости этого правила основываясь на опредѣленіи вѣроятностей сложныхъ событій при неравновозможныхъ статочностяхъ. Дѣйствительно положимъ, что прекратили игру на извѣстномъ пріёмѣ, и пусть будетъ въ это время P вѣроятность что игрокъ A выиграетъ, или, иначе, его судьба. Допустимъ, что въ разсматриваемое мгновеніе, расположеніе игры таково, что оно приводитъ къ одному изъ предположеній $L, M, N,\ldots$, вѣроятности которыхъ пусть будутъ по порядку $q, r, s,\ldots$ Сверхъ того, означимъ чрезъ $Q, R, S,\ldots$ вѣроятности выигрыша для игрока A при появленіи случаевъ $L, M, N,\ldots$, независимо отъ самыхъ возможностей сихъ послѣднихъ. Произведенія $qQ, rR, sS,\ldots$, на основаніи N° 4, изобразятъ частныя вѣроятности выигрыша для игрока A, соотвѣтствующія тѣмъ же предположеніямъ $L, M, N,\ldots$, но до появленія этихъ случайностей, такъ что qQ будетъ означать вѣроятность, что игрокъ A выиграетъ именно чрезъ появленіе случая L. Сверхъ того, такъ какъ сумма сложныхъ

вѣроятностей qQ, rR, sS,..., въ силу N° 2, равняется полной вѣроятности, или судьбѣ игрока A, то и получимъ

$$P = qQ+rR+sS+\dots$$

сообразно съ тѣмъ, что́ имѣли въ виду показать.

Обратимся теперь къ рѣшенію занимающей насъ задачи. Мы уже видѣли въ N° 32, что ставка должна быть раздѣлена между игроками A и B пропорціонально соотвѣтственнымъ вѣроятностямъ выигрыша въ то̀ время, когда прекращается игра. Слѣдовательно, рѣшеніе вопроса приводится къ опредѣленію вѣроятности, что который нибудь игрокъ, напримѣръ A, выиграетъ; очевидно, что судьба слѣдимаго игрока зависитъ отъ числа недостающихъ очковъ x и x' до n. Изобразимъ чрезъ $y_{x,x'}$ вѣроятность выигрыша для игрока A или его судьбу. Если вообразимъ, что сънграна слѣдующая партія, то въ отношеніи къ ней можно будетъ сдѣлать слѣдующія два равновозможныя предположенія: или игрокъ A выиграетъ эту партію, и тогда судьба его обратится въ $y_{x-1,x'}$; или онъ проиграетъ ее, и судьба его получитъ значеніе $y_{x,x'-1}$. Такъ какъ, по предположенію, игроки равноискустные, то каждое изъ этихъ двухъ событій равно вѣроятно; съ другой стороны, возможныхъ случаевъ только два, почему вѣроятность каждаго изъ событій равна $\frac{1}{2}$. На такомъ основаніи, соображаясь съ изложеннымъ предъ симъ правиломъ, получимъ

$$y_{x,x'} = \frac{1}{2}y_{x-1,x'}+\frac{1}{2}y_{x,x'-1}. \tag{53}$$

Вотъ частное разностное уравненіе 1-го порядка, опредѣляющее вѣроятность $y_{x,x'}$. Сверхъ того очевидно по смыслу задачи, что игрокъ A выигрываетъ когда $x=0$, а проигрываетъ когда $x'=0$; слѣдовательно, выраженіе $y_{0,s}$, для всѣхъ положительныхъ значеній цѣлаго числа s, будетъ равняться единицѣ; напротивъ того, выраженіе $y_{s,0}$, для цѣлыхъ же положительныхъ значеній s, будетъ постоянно равняться нулю. При такихъ условіяхъ приступимъ къ интегрированію уравненія (53). Сообразно съ способомъ, изложеннымъ въ ПРИМѢЧАНІИ VII (§ 4), полагаемъ $y_{x,x'}=a\alpha^x\beta^{x'}$, или, проще, $y_{x,x'}=\alpha^x\beta^{x'}$; получится

$$y_{x-1,x'}=\alpha^{x-1}\beta^{x'} \quad \text{и} \quad y_{x,x'-1}=\alpha^x\beta^{x'-1}.$$

Слѣдовательно

$$\alpha^x\beta^{x'}=\frac{1}{2}\alpha^{x-1}\beta^{x'}+\frac{1}{2}\alpha^x\beta^{x'-1},$$

откуда

$$2\alpha\beta=\alpha+\beta \quad \text{или} \quad \alpha=\frac{\beta}{2\beta-1}.$$

Ежели подставимъ эту величину въ выраженіе для $y_{x,x'}$, то получимъ

$$y_{x,x'}=\alpha^x\beta^{x'}=\left(\frac{\beta}{2\beta-1}\right)^x\beta^{x'}=\beta^{x+x'}(2\beta-1)^{-x}=\frac{1}{2^x}\cdot\beta^{x+x'}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^{-x}.$$

Разлагая потомъ $\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^{-x}$ въ безконечный рядъ, найдется

$$y_{x,x'}=\frac{1}{2^x}\left\{\beta^{x'}+x.\beta^{x'-1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x(x+1)}{1.2}\cdot\beta^{x'-2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\cdot\beta^{x'-3}\cdot\frac{1}{2^3}+\dots\right\},$$

и какъ вообще

$$\beta^{x'-s}=\alpha^0.\beta^{x'-s}=y_{0,x'-s},$$

то и будетъ

$$y_{x,x'}=\frac{1}{2^x}\left\{y_{0,x'}+x.y_{0,x'-1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x(x+1)}{1.2}\cdot y_{0,x'-2}\cdot\frac{1}{2^2}+\dots\right\}.$$

Вторая часть этой формулы изображаетъ рядъ безконечный; но, легко видѣть, что въ силу приведеннаго выше условія $y_{s,0}=0$, имѣющаго мѣсто для всѣхъ положительныхъ значеній цѣлаго числа s, этотъ рядъ оканчивается на членѣ, въ который входитъ $y_{0,1}$, потому что дальнѣйшіе, какъ заключающіе $y_{0,0}$, $y_{0,-1}$, $y_{0,-2}$ и проч. всѣ обращаются въ нуль. Дѣйствительно, положивъ $x'=0$, получимъ уравненіе

$$0=y_{0,0}+\frac{1}{2}x.y_{0,-1}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{x(x+1)}{1.2}\cdot y_{0,-2}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\cdot y_{0,-3}+\dots,$$

имѣющее мѣсто при всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ x, и слѣдовательно доставляющее безконечное число уравненій первой степени для опредѣленія количествъ

$$y_{0,0},\quad y_{0,-1},\quad y_{0,-2},\quad y_{0,-3}\dots$$

По виду этихъ уравненій, заключающихъ во всѣхъ своихъ членахъ неизвѣстныя величины, легко видѣть, что всѣ сіи послѣднія равны нулю; и какъ сверхъ того $y_{0,s}$, для s цѣлаго положительнаго, обращается въ единицу, то судьба игрока A, или искомая вѣроятность $y_{x,x'}$, окончательно опредѣлится формулою:

$$y_{x,x'}=\frac{1}{2^x}\left\{1+x.\frac{1}{2}+\frac{x(x+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{x(x+1)\dots(x+x'-2)}{1.2.3\dots(x'-1)}\cdot\frac{1}{2^{x'-1}}\right\}.$$

Очевидно, что судьба игрока B получится измѣнивъ въ этой формулѣ x въ x', и на-оборотъ, или, проще, вычтя $y_{x,x'}$, изъ единицы, такъ что $y_{x',x}=1-y_{x,x'}$.

Если бы игроки A и B были неравноискустны, то изобразивъ чрезъ q и $r=1-q$ ихъ искусство въ игрѣ, или соотвѣтственныя ихъ вѣроятности выиграть одно очко когда первому не достаетъ x, а второму x' очковъ до n, получили бы, вмѣсто равенства (53), слѣдующее уравненіе:

$$y_{x,x'}=qy_{x-1,x'}+ry_{x,x'-1},$$

интегралъ котораго нашли бы точно такъ какъ и выше. Этотъ интегралъ будетъ

$$y_{x,x'}=q^x\left\{1+x.r+\frac{x(x+1)}{1.2}\cdot r^2+\dots+\frac{x(x+1)\dots(x+x'-2)}{1.2.3\dots(x'-1)}\cdot r^{x'-1}\right\}. \tag{54}$$

Рѣшимъ еще вопросъ о безобиднымъ дѣлежѣ для трехъ игроковъ. Положимъ что игроки A, B, C, искусства которыхъ изобразимъ чрезъ q, r и $s = 1 - q - r$, поставили въ игру по-ровну; тотъ изъ нихъ, кто первый выиграетъ извѣстное число, напримѣръ n партій или очковъ, беретъ всю ставку. Съ общаго согласія они прекратили игру въ то время, когда первому не доставало x партій, второму x', третьему x'' партій до условленнаго числа n. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что игрокъ A первый выиграетъ недостающія ему x очковъ.

Пусть будетъ $y_{x,x',x''}$ искомая вѣроятность. Если бы игроки съиграли слѣдующую партію, то могло бы случиться, или что A выигралъ бы её, и тогда его судьба обратилась бы въ $y_{x-1,x',x''}$. Если же выиграетъ игрокъ B или C, то судьба игрока A будетъ: въ первомъ случаѣ $y_{x,x'-1,x''}$, а во второмъ $y_{x,x',x''-1}$. Вѣроятности этихъ трехъ предположеній соотвѣтственно равны q, r, s. Слѣдовательно, на основаніи правила, изложеннаго въ началѣ этого N°, получимъ равенство

$$y_{x,x',x''} = q y_{x-1,x',x''} + r y_{x,x'-1,x''} + s y_{x,x',x''-1}. \qquad (55)$$

Для интегрированія этого уравненія положимъ

$$y_{x,x',x''} = \alpha^x \beta^{x'} \gamma^{x''};$$

найдется

$$y_{x-1,x',x''} = \alpha^{x-1}\beta^{x'}\gamma^{x''}, \quad y_{x,x'-1,x''} = \alpha^x\beta^{x'-1}\gamma^{x''}, \quad y_{x,x',x''-1} = \alpha^x\beta^{x'}\gamma^{x''-1},$$

почему и будетъ

$$\alpha^x\beta^{x'}\gamma^{x''} = q\alpha^{x-1}\beta^{x'}\gamma^{x''} + r\alpha^x\beta^{x'-1}\gamma^{x''} + s\alpha^x\beta^{x'}\gamma^{x''-1},$$

или

$$\alpha\beta\gamma = q\beta\gamma + r\alpha\gamma + s\alpha\beta,$$

откуда

$$\alpha = \frac{q\beta\gamma}{\beta\gamma - r\gamma - s\beta}.$$

И такъ

$$y_{x,x',x''} = q^x \beta^{x+x'} \gamma^{x+x''} (\beta\gamma - r\gamma - s\beta)^{-x}.$$

По разложеніи получимъ

$$y_{x,x',x''} = q^x \Big\{ \beta^{x'}\gamma^{x''} + x.\beta^{x'-1}\gamma^{x''-1}(r\gamma + s\beta) + \frac{x(x+1)}{1.2}.\beta^{x'-2}\gamma^{x''-2}(r\gamma+s\beta)^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}.\beta^{x'-3}\gamma^{x''-3}(r\gamma+s\beta)^3 + \ldots \Big\},$$

или, замѣнивъ каждое произведеніе вида $\beta^k\gamma^l = \alpha^0\beta^k\gamma^l$ выраженіемъ $y_{0,k,l}$,

$$y_{x,x',x''} = q^x \Big\{ y_{0,x',x''} + x(r y_{0,x'-1,x''} + s y_{0,x',x''-1}) + \frac{x(x+1)}{1.2}(r^2 y_{0,x'-2,x''} + 2rs y_{0,x'-1,x''-1} + s^2 y_{0,x',x''-2}) + \ldots \Big\}.$$

Но, по условіямъ вопроса, вѣроятность $y_{x,x',x''}$ обращается въ нуль когда $x' = 0$ или $x'' = 0$, почему $y_{x,0,x''} = 0$, $y_{x,x',0} = 0$. Въ силу этихъ двухъ условій получимъ уравненія

$$0 = y_{0,0,x''} + x(r y_{0,-1,x''} + s y_{0,0,x''-1}) + \frac{x(x+1)}{1.2}(r^2 y_{0,-2,x''} + 2rs y_{0,-1,x''-1} + s^2 y_{0,0,x''-2}) + \ldots$$

$$0 = y_{0,x',0} + x(r y_{0,x'-1,0} + s y_{0,x',-1}) + \frac{x(x+1)}{1.2}(r^2 y_{0,x'-2,0} + 2rs y_{0,x'-1,-1} + s^2 y_{0,x',-2}) + \ldots$$

которымъ, какъ уже замѣчено выше, нельзя удовлетворить иначе, какъ положивъ порознь

$$y_{0,0,x''} = 0, \quad r y_{0,-1,x''} + s y_{0,0,x''-1} = 0, \quad r^2 y_{0,-2,x''} + 2rs y_{0,-1,x''-1} + s^2 y_{0,0,x''-2} = 0 \text{ и проч.}$$

$$y_{0,x',0} = 0, \quad r y_{0,x'-1,0} + s y_{0,x',-1} = 0, \quad r^2 y_{0,x'-2,0} + 2rs y_{0,x'-1,-1} + s^2 y_{0,x',-2} = 0 \text{ и проч.}$$

Измѣняя, въ уравненіи $y_{0,0,x''} = 0$, x'' въ $x''-1$, $x''-2$ и проч. получимъ послѣдовательно $y_{0,0,x''-1} = 0$, $y_{0,0,x''-2} = 0, \ldots$, въ слѣдствіе чего будетъ и $y_{0,-1,x''} = 0$; замѣняя въ этомъ послѣднемъ равенствѣ x'' разностію $x''-1$, найдемъ $y_{0,-1,x''-1} = 0$, и слѣдовательно $y_{0,-2,x''} = 0$, и такъ далѣе. Подобнымъ образомъ найдется изъ второй строки

$$y_{0,x'-1,0} = 0, \quad y_{0,x',-1} = 0, \quad y_{0,x'-2,0} = 0 \text{ и проч.}$$

Изъ этого усматриваемъ, что количества вида $y_{0,k,l}$ всегда обращаются въ нуль, когда k или l равенъ нулю или отрицательной величинѣ; поэтому предъидущій рядъ будетъ состоять изъ конечнаго числа членовъ, и если замѣтимъ, что по условію вопроса, выраженіе $y_{0,x',x''}$, для цѣлыхъ положительныхъ значеній x' и x'', равно единицѣ, то увидимъ, что величина $y_{x,x',x''}$ приметъ слѣдующій видъ:

$$y_{x,x',x''} = q^x \Big\{ 1 + x(r+s) + \frac{x(x+1)}{1.2}(r^2 + 2rs + s^2) + \ldots \Big\},$$

или, что всё равно,

$$y_{x,x',x''} = q^x \Big\{ 1 + x(r+s) + \frac{x(x+1)}{1.2}(r+s)^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(r+s)^3 + \ldots \Big\}, \qquad (56)$$

съ тѣмъ условіемъ, чтобы въ этомъ выраженіи откинули члены, въ которыхъ степени количества r превышаютъ $x'-1$, а количества s, разность $x''-1$.

Положимъ, напримѣръ, что тремъ равноискусстнымъ игрокамъ A, B, C, не достаетъ соотвѣтственно 1, 2, 3 очка для окончанія игры; такъ какъ въ настоящемъ случаѣ имѣемъ $x = 1$, $x' = 2$, $x'' = 3$, $q = r = s = \frac{1}{3}$, то искомая вѣроятность для игрока A опредѣлится формулою

$$y_{1,2,3} = \frac{1}{3}\Big\{ 1 + (r+s) + (r+s)^2 + (r+s)^3 + \ldots \Big\},$$

въ которой должно удержать только первыя степени количества r, и не выше квадратовъ величины s. Такимъ образомъ получимъ

$$y_{1,2,3} = \frac{1}{3}\Big\{ 1 + (r+s) + (2rs + s^2) + 3rs^2 \Big\}.$$

Но $r=s=\frac{1}{3}$; слѣдовательно

$$y_{1,2,3}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}\right]=\frac{19}{27}.$$

Формулу (56) весьма легко распространить на какое ни есть число игроковъ. Слѣдуя изложенному выше способу найдемъ, что если 1-ому игроку не достаетъ x очковъ, 2-ому x', 3-ему x'', 4-ому $x'''\ldots$, то, означивъ ихъ искусства въ игрѣ соотвѣтственно чрезъ $q, r, s, t\ldots$, получимъ

$$y_{x,x',x'',x''',\ldots}=q^x\left\{1+x(r+s+t+\ldots)+\frac{x(x+1)}{1.2}(r+s+t+\ldots)^2+\ldots\right\}$$

съ тѣмъ условіемъ, чтобы во второй части этого уравненія откинуть степени количествъ $r, s, t\ldots$, соотвѣтственно превосходящія $x'-1$, $x''-1$, $x'''-1,\ldots$.

39. Положимъ еще, что *требуется опредѣлить судьбу игрока* A, *который держитъ закладъ, что извѣстное событіе повторится не менѣе даннаго числа разъ при опредѣленномъ числѣ испытаній.*

Изобразимъ чрезъ x число испытаній, которыя, по условію игры, можетъ произвести игрокъ A при совершеніи заклада; сверхъ того, положимъ, что для выигрыша, ему не достаетъ еще числа x' повтореній благопріятствующаго событія, простая вѣроятность котораго, при каждомъ испытаніи, пусть будетъ q. Означимъ чрезъ $y_{x,x'}$ вѣроятность, что A выиграетъ закладъ. Ясно, что если при слѣдующемъ испытаніи случится событіе, благопріятствующее игроку A, то $y_{x,x'}$ обратится въ $y_{x-1,x'-1}$, а если событіе не случится, то вѣроятность для игрока A будетъ $y_{x-1,x'}$. Вѣроятность перваго предположенія есть q, а втораго $1-q$. Слѣдовательно

$$y_{x,x'}=qy_{x-1,x'-1}+(1-q)y_{x-1,x'}.$$

Для интегрированія этого уравненія полагаемъ $y_{x,x'}=\alpha^x\beta^{x'}$, и разностное уравненіе доставитъ

$$\alpha^x\beta^{x'}=q\alpha^{x-1}\beta^{x'-1}+(1-q)\alpha^{x-1}\beta^{x'},$$

или $$\alpha\beta=q-(1-q)\beta,\quad\text{откуда}\quad\beta=\frac{q}{\alpha-(1-q)}.$$

Слѣдовательно

$$y_{x,x'}=q^{x'}\alpha^x[\alpha-(1-q)]^{-x'}=q^{x'}\left[\alpha^{x-x'}+x'\alpha^{x-x'-1}(1-q)+\frac{x'(x'+1)}{1.2}\alpha^{x-x'-2}(1-q)^2+\ldots\right].$$

Но

$$\alpha^{x-x'}=\alpha^{x-x'}\beta^0=y_{x-x',0},\quad\alpha^{x-x'-1}=\alpha^{x-x'-1}\beta^0=y_{x-x'-1,0},\ldots$$

почему

$$y_{x,x'}=q^{x'}\left\{y_{x-x',0}+x'(1-q)y_{x-x'-1,0}+\frac{x'(x'+1)}{1.2}(1-q)^2y_{x-x'-2,0}+\ldots\right\}.$$

Замѣтимъ теперь, что каждая изъ величинъ $y_{x-x',0}$, $y_{x-x'-1,0},\ldots$ когда первый указатель есть число положительное или нуль, равна единицѣ, ибо она выражаетъ вѣроятность выиграть закладъ, уже выигранный. Сверхъ того, легко видѣть, что предъидущій рядъ должно остановить на членѣ, заключающемъ величину $\alpha^{x-x'-(x-x')}=\alpha^0=y_{0,0}$, потому что дальнѣйшіе члены, имѣющіе видъ $y_{-s,0}$, всѣ равны нулю. Дѣйствительно, положивъ $x=0$ въ предъидущемъ выраженіи для $y_{x,x'}$, и замѣтивъ, что по условію вопроса величина $y_{0,x'}$, для $x'>0$, обращается въ нуль, получимъ

$$0=y_{-x',0}+x'\cdot y_{-x'-1,0}\cdot(1-q)+\frac{x'(x'+1)}{1.2}\cdot y_{-x'-2,0}\cdot(1-q)^2+\ldots$$

Уравненію такого вида, какъ мы уже замѣтили въ предъидущемъ N°, нельзя удовлетворить иначе, какъ положивъ порознь $y_{-x',0}=0$, $y_{-x'-1,0}=0$, $y_{-x'-2,0}=0$ и проч. Слѣдовательно, рядъ, выражающій искомую вѣроятность $y_{x,x'}$, будетъ

$$y_{x,x'}=q^{x'}\left\{1+x'(1-q)+\frac{x'(x'+1)}{1.2}(1-q)^2+\ldots+\frac{x'(x'+1)\ldots(x'+[x-x'-1])}{1.2.3\ldots(x-x')}(1-q)^{x-x'}\right\}.\quad(57)$$

Если бы, напримѣръ, желали найти вѣроятность, что одно изъ двухъ равновозможныхъ событій повторится не менѣе трехъ разъ въ шесть испытаній, то имѣли бы $x=6$, $x'=3$, $q=\frac{1}{2}$; слѣдовательно, по формулѣ (57) получили бы тотчасъ

$$y_{6,3}=\frac{1}{2^3}\left[1+3\cdot\frac{1}{2}+\frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{3.4.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}\right]=\frac{21}{32}.$$

Эта самая величина вѣроятности нашлась бы и посредствомъ формулы (8) [ГЛАВА I], въ которой слѣдовало бы положить $a=1$, $b=1$, $m=6$, $m-n=3$, то есть $n=3$. Дѣйствительно, формула (8) доставитъ

$$y_{6,3}=\frac{1}{2^6}+6\cdot\frac{1}{2^6}+\frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{1}{2^6}+\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{21}{32}.$$

40. Въ N° 33 предъидущей статьи мы говорили объ раздѣлѣ ставки между игроками, когда срокъ окончанія игры, по самому ея свойству, остается неопредѣленнымъ. Рѣшеніе этой задачи, въ общемъ ея видѣ, представляло не малыя затрудненія при первыхъ попыткахъ. Предметомъ этимъ занимались *Монмортъ*, *Бернулли* и *Моавръ;* но *Лапласъ* и *Лагранжъ* первые предложили полное рѣшеніе задачи, о которой говоримъ. Въ упоминаемомъ N° мы предложили вопросъ въ слѣдующемъ видѣ: два игрока положили въ игру по-ровну, и, полная ставка должна достаться тому изъ нихъ, кто выиграетъ у противника опредѣленное напередъ число лишнихъ партій. До окончанія игры игроки соглашаются разойтись; спрашивается, какую часть ставки долженъ получить каждый игрокъ, предполагая извѣстнымъ избытокъ числа выигранныхъ однимъ игрокомъ партій передъ другимъ. Тамъ же мы

видѣли, что рѣшеніе этого вопроса приводится непосредственно къ опредѣленію вѣроятности, что слѣдимый игрокъ выиграетъ всю ставку. Слѣдовательно, задача состоитъ въ опредѣленіи этой вѣроятности.

Вопросъ, при неопредѣленномъ срокѣ окончанія игры, предлагаютъ обыкновенно въ слѣдующемъ видѣ, который, въ сущности, не отличается отъ выше предложеннаго, но нѣсколько общее тѣмъ, что число партій ограничивается.

Два игрока A *и* B, *соотвѣтственныя искусства которыхъ изобразимъ чрезъ* p *и* 1—p, *имѣютъ: первый,* a *жетоновъ, а второй,* b *жетоновъ, и играютъ въ какую либо игру на слѣдующемъ условіи: когда* A *проигрываетъ партію, то даетъ одинъ жетонъ игроку* B, *который, въ свою очередь, въ случаѣ проигрыша партіи, даетъ жетонъ своему противнику* A. *Игра оканчивается тогда только, когда одинъ изъ игроковъ проиграетъ всѣ свои жетоны. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что игрокъ* A *выиграетъ всѣ жетоны у игрока* B, *предполагая что число сыгранныхъ партій не можетъ превзойти условленнаго напередъ числа* n.

Положимъ, что игра разсматривается въ то время, когда игроку A не достаетъ x жетоновъ для выигрыша, между тѣмъ какъ остается сыграть t партій до условленнаго наибольшаго числа n партій. Пусть будетъ $y_{x,t}$ судьба игрока A въ разсматриваемое время. Чтобы составить уравненіе, опредѣляющее $y_{x,t}$, положимъ что сыграна еще одна партія; если ее выиграетъ игрокъ A, то его судьба обратится въ $y_{x-1,t-1}$, а если B, то судьба игрока A будетъ $y_{x+1,t-1}$. Вѣроятность перваго предположенія равна p, а втораго, $q=1-p$. Слѣдовательно

$$y_{x,t}=py_{x-1,t-1}+qy_{x+1,t-1}. \tag{58}$$

Отъ интегрированія этого уравненія въ частныхъ разностяхъ 2-го порядка относительно x, зависитъ рѣшеніе занимающаго насъ вопроса. Сверхъ того, къ уравненію (58) должно присовокупить еще условія

$$\left.\begin{array}{lll} y_{0,t}=1 & \text{для} & t=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \text{и проч.} \\ y_{x,0}=0 & \text{для} & x=1,\ 2,\ 3,\ 4\ \text{и проч.} \end{array}\right\} \tag{59}$$

которыя суть непосредственныя слѣдствія самыхъ требованій задачи.

Для интегрированія уравненія (58) положимъ

$$y_{x,t}=\alpha^x\beta^t;$$

получимъ

$$\alpha^x\beta^t=p\alpha^{x-1}\beta^{t-1}+q\alpha^{x+1}\beta^{t-1},$$

откуда

$$\alpha\beta=p+q\alpha^2,\quad \text{или}\quad \beta=\frac{p}{\alpha}+q\alpha=p\alpha^{-1}+q\alpha.$$

Слѣдовательно

$$\beta^t=p^t\alpha^{-t}+tp^{t-1}q\alpha^{-t+2}+\frac{t(t-1)}{1.2}p^{t-2}q^2\alpha^{-t+4}+\ldots$$

и наконецъ $y_{x,t}=\alpha^x\beta^t=p^t\alpha^{x-t}+tp^{t-1}q\alpha^{x-t+2}+\frac{t(t-1)}{1.2}p^{t-2}q^2\alpha^{x-t+4}+\ldots$

Замѣняя выраженія вида $\alpha^s=\alpha^s\beta^0$ величиною $y_{s,0}$, найдется

$$y_{x,t}=p^ty_{x-t,0}+tp^{t-1}qy_{x-t+2,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}p^{t-2}q^2y_{x-t+4,0}+\ldots \tag{60}$$

Въ слѣдствіе втораго изъ условій (59) въ этомъ ряду должно будетъ откинуть всѣ члены, начиная съ того, въ которомъ указатель $x-t+2k$ выраженія $y_{x-t+2k,0}$ будетъ положительный. Слѣдовательно число членовъ въ ряду (60) будетъ ограничено. Для опредѣленія же величинъ $y_{x-t,0}$, $y_{x-t+2,0}$, ... съ отрицательными указателями, стоитъ только въ уравненіи (60) положить $x=0$; въ силу перваго изъ условій (59) получимъ $y_{0,t}=1$ для какихъ ни есть цѣлыхъ положительныхъ значеній числа t, включая сюда и значеніе $t=0$. И такъ

$$1=p^ty_{-t,0}+tp^{t-1}qy_{-t+2,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}p^{t-2}q^2y_{-t+4,0}+\ldots$$

Полагая послѣдовательно $t=1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$, и наблюдая что $y_{0,0}=1$, получимъ

$$\begin{aligned} 1&=py_{-1,0}\\ 1&=p^2y_{-2,0}+2pq\\ 1&=p^3y_{-3,0}+3p^2qy_{-1,0}=p^3y_{-3,0}+3pq\\ 1&=p^4y_{-4,0}+4p^3qy_{-2,0}+6p^2q^2=p^4y_{-4,0}+4pq-2p^2q^2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} py_{-1,0}&=1\\ p^2y_{-2,0}&=1-2pq\\ p^3y_{-3,0}&=1-3pq\\ p^4y_{-4,0}&=1-4pq+2p^2q^2\\ p^5y_{-5,0}&=1-5pq+5p^2q^2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и вообще, [ПРИМѢЧАНІЕ VIII],

$$\left.\begin{aligned} p^ty_{-t,0}=1-t.pq+\frac{t(t-3)}{1.2}\cdot p^2q^2-\frac{t(t-4)(t-5)}{1.2.3}\cdot p^3q^3+\frac{t(t-5)(t-6)(t-7)}{1.2.3.4}\cdot p^4q^4-\ldots\\ +(-1)^m\cdot\frac{t(t-m-1)(t-m-2)\ldots(t-2m+1)}{1.2.3\ldots m}\cdot p^mq^m-\ldots \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Формулы (60) и (61) заключаютъ полное рѣшеніе занимающей насъ задачи. Чтобы пояснить ихъ употребленіе, сдѣлаемъ численное приложеніе. Положимъ, что въ началѣ игры у игрока A, 2 жетона, а у B, 3 жетона; наибольшее число партій $n=7$. Искомая судьба игрока A, въ началѣ игры, очевидно выразится чрезъ $y_{5,7}$. И такъ, наблюдая что $x=3$, $t=7$, получимъ, въ силу формулы (60),

$$y_{3,7} = p^7 y_{-4,0} + 7p^6 q y_{-2,0} + 21 p^5 q^2 y_{0,0}.$$

На основаніи же формулы (61) имѣемъ

$$y_{0,0} = 1$$
$$y_{-2,0} = \frac{1-2pq}{p^2}$$
$$y_{-4,0} = \frac{1-4pq+2p^2q^2}{p^4};$$

слѣдовательно

$$y_{3,7} = p^3(1-4pq+2p^2q^2)+7p^4q(1-2pq)+21p^5q^2 = p^3+3p^4q+9p^5q^2.$$

Измѣнивъ p въ q, и на-оборотъ, найдемъ посредствомъ тѣхъ же формулъ (60) и (61) судьбу $y_{2,7}$ игрока B; она будетъ

$$y_{2,7} = q^2(1-5qp+5q^2p^2)+7q^3p(1-3qp)+21q^4p^2 = q^2+2q^3p+5q^4p^2.$$

Сумма $y_{3,7}+y_{2,7}$ найденныхъ двухъ частныхъ вѣроятностей изобразитъ вѣроятность, что разсматриваемая игра будетъ выиграна въ 7 партій. Замѣнивъ q разностію $1-p$, найдется по сокращеніи

$$y_{3,7}+y_{2,7} = 1-13p^3+31p^4-14p^5-13p^6+9p^7$$
$$= 1-13p^3(1-p)^4-21p^4(1-p)^3+p^5(1-p)^2.$$

Послѣдній членъ $p^5(1-p)^2$ изображаетъ вѣроятность, что разсматриваемая игра будетъ выиграна обоими игроками, что̀ можетъ случиться только однимъ образомъ, именно, когда игрокъ B выиграетъ первыя двѣ партіи, а игрокъ A слѣдующія пять. Слѣдовательно, количество $p^5(1-p)^2$ войдетъ вдвойнѣ въ выраженіе $y_{3,7}+y_{2,7}$. Если же условимся считать игру оконченною, когда одинъ изъ игроковъ выиграетъ, то членъ $p^5(1-p)^2$ должно будетъ откинуть, и вѣроятность, что A или B, безразлично, выиграетъ игру, опредѣлится формулою

$$1-13p^3(1-p)^4-21p^4(1-p)^3.$$

Способы, которыхъ мы придерживались въ послѣднихъ нумерахъ этой Главы для интегрированія уравненій въ конечныхъ разностяхъ, были предложены Лагранжемъ въ обширномъ Разсужденіи, изданномъ имъ подъ заглавіемъ: *Recherches sur les suites recurrentes**) и проч. Отсылаемъ нашихъ читателей къ этому Трактату; въ немъ найдутъ они подробное изложеніе какъ самой теоріи разностныхъ уравненій, такъ и приложеніе ея къ рѣшенію многихъ любопытныхъ вопросовъ изъ Анализа Вѣроятностей. Впрочемъ, нѣкоторыя подробности вообще объ интегрированіи уравненій въ конечныхъ разностяхъ, помѣщены въ концѣ этой книги въ ПРИМѢЧАНІИ VII на которое мы уже ссылались въ этой статьѣ.

*) *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres, année 1776.*

ГЛАВА IV.

О НРАВСТВЕННОМЪ ОЖИДАНІИ.

41. Въ предъидущей Главѣ мы изложили съ возможною подробностію условія математическаго равенства или безобидности всякаго рода игръ. Правило, предложенное для достиженія этого равенства, должно считать въ полной мѣрѣ точнымъ и удовлетворительнымъ, по крайней мѣрѣ въ отвлеченномъ, математическомъ смыслѣ. Но, въ примѣненіяхъ своихъ къ вопросамъ изъ общежитія, которые представляютъ обстоятельства, зависящія отъ нравственныхъ отношеній лицъ, причастныхъ къ вопросу, оно нерѣдко приводитъ къ недоумѣніямъ и, даже, къ кажущимся противорѣчіямъ. Подобныя несообразности, чаще всего, не легко могутъ быть объяснены посредствомъ соображеній, основанныхъ на разсматриваніи одного только математическаго ожиданія. Философы-математики, имѣя въ виду по возможности подчинить математическому анализу и тѣ вопросы, въ которыхъ надлежитъ принимать въ расчётъ относительное имущество лицъ и нравственныя ихъ отношенія, придумали ввести въ Исчисленіе Вѣроятностей, сверхъ математическаго ожиданія, еще другую мѣру выгоды, и назвали ее *выгодою нравственною* или *нравственнымъ ожиданіемъ*. Чтобы объяснить вразумительнѣе какимъ образомъ раждается это новое понятіе, разберемъ нѣкоторые весьма простые случаи. Играютъ въ большую игру, математически равную, напримѣръ въ вистъ. Нѣтъ никакого сомнѣнія, что благоразумный человѣкъ, имѣющій небольшое состояніе, откажется отъ этой игры, несмотря на то̀, что охотно играетъ въ умѣренную. Между тѣмъ его математическое ожиданіе точно такое же, какъ и для другихъ игроковъ, предполагая что всѣ равно искустны. Положимъ еще: богатый человѣкъ предлагаетъ бѣдному держать значительный закладъ, равный для обѣихъ сторонъ, что вынутая на-удачу карта изъ полной колоды будетъ красная. Разсудительный человѣкъ, разумѣется, откажется отъ такого заклада, хотя условіе безобидно, и слѣдовательно мате-

матическое ожиданіе обоихъ закладчиковъ одинаково. *Бюффонъ*, въ своемъ *Essai d'Arithmétique morale*, съ краснорѣчивою простотою показалъ разительное отличіе между одною и тою же выгодой, ожидаемой при различныхъ обстоятельствахъ. Мы приводимъ собственныя его слова, которыя рѣзкими чертами отдѣляютъ математическое ожиданіе отъ нравственнаго.

«Скупецъ похожъ на математика; тотъ и другой цѣнятъ деньги по внутреннему ихъ достоинству; разсудительный же человѣкъ не разбираетъ, какова ихъ условленная цѣнность, а видитъ только выгоды, которыя можетъ извлечь изъ нихъ. Онъ разсуждаетъ основательнѣе скупца, и чувствуетъ лучше математика. Ефимокъ, отложенный бѣднымъ для внесенія законной повинности, и ефимокъ, дополняющій мѣшки откупщика, въ глазахъ скупца и математика, имѣютъ одинаковую цѣнность: первый присвоитъ себѣ каждый изъ нихъ съ равнымъ наслажденіемъ, второй, будетъ считать ихъ двумя равными единицами; между тѣмъ, человѣкъ разсудительный оцѣнитъ въ золотую монету ефимокъ бѣднаго, а въ денежку, ефимокъ откупщика.»

Не подлежитъ никакому сомнѣнію, что нравственное, внутреннее довольство, доставляемое намъ какою либо математическою выгодою, не пропорціонально мѣрѣ этой выгоды, а зависитъ какъ отъ сей послѣдней, такъ и отъ множества почти неуловимыхъ обстоятельствъ и отъ нашихъ личныхъ отношеній. Дѣйствительно, нельзя не согласиться, что незначительная для богача сумма, можетъ быть сокровищемъ для нищаго; поэтому-то и необходимо отличать *безусловную* или *абсолютную* величину какого либо имущества отъ его *относительной* величины. Первая не зависитъ отъ обстоятельствъ лица, обладающаго этимъ имуществомъ или ожидающимъ его, а вторая, напротивъ, подчинена симъ обстоятельствамъ во всѣхъ отношеніяхъ. Но изъ всѣхъ данныхъ, которыя слѣдуетъ принимать въ расчётъ при опредѣленіи нравственнаго ожиданія, главная, вообще, есть математическая выгода, или, просто, *физическое имущество*.

42. Разнообразіе обстоятельствъ, которыя слѣдовало бы принимать въ расчётъ для точнаго опредѣленія нравственнаго ожиданія, дѣлаетъ это опредѣленіе совершенно невозможнымъ, по крайней мѣрѣ въ строгомъ смыслѣ. Поэтому довольствуются ипотезами, согласующимися въ главныхъ чертахъ своихъ съ опытомъ и указаніями здраваго разсудка. Знаменитый Бюффонъ, въ своемъ *Essai d'Arithmétique morale*, разсматриваетъ этотъ предметъ съ слѣдующей точки: онъ предполагаетъ, что два человѣка, имѣющіе равныя состоянія, напримѣръ, каждый по 100 тысячь рублей, играютъ въ кости на половину своего имущества, то есть на 50 тысячь рублей. Очевидно, что выигрывающій увеличитъ свое

состояніе одною третью, ибо онъ будетъ имѣть 150 т. рублей вмѣсто 100 т.; состояніе же проигравшаго уменьшится половиною, потому что у него отъ 100 т. рублей останется только 50 т. рублей. И такъ, по окончаніи игры, имущество одного изъ игроковъ увеличится *одною третью*, а другаго, напротивъ того, уменьшится *половиною*: слѣдовательно, въ этомъ смыслѣ, проигрышъ будетъ превышать выигрышъ *одною шестой*, ибо $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Изъ этого Бюффонъ заключилъ, что игра, по сущности своей, представляетъ невыгоду для игроковъ, и слѣдовательно, что она основана на ложномъ началѣ.

Еще разительнѣе примѣръ двухъ игроковъ, имѣющихъ одинаковыя состоянія, и которые играютъ на всё свое имущество. Выигравшій удвоитъ свое состояніе, а проигравшій, потеряетъ всё. Какая же тутъ соразмѣрность между проигрышемъ и выигрышемъ? Правда, выигрышъ доставитъ одному игроку средства жить въ бо̀льшемъ довольствѣ нежели прежде, но за то̀ проигрышъ сдѣлаетъ другаго нищимъ.

Бюффонъ допускаетъ, что мѣра важности какой либо суммы, присовокупляемой къ данному капиталу, или, какъ мы условимся называть, мѣра *нравственной выгоды*, опредѣляется отношеніемъ этой суммы къ самому капиталу. Пусть будетъ A капиталъ или физическое имущество, a ожидаемое приращеніе этого капитала. Нравственная выгода, относящаяся къ суммѣ a, выразится: при потерѣ ея дробью $\frac{a}{A}$, а въ случаѣ пріобрѣтенія, дробью $\frac{a}{A+a}$. Разность сихъ двухъ значеній будетъ

$$\frac{a}{A}-\frac{a}{A+a}=\frac{a^2}{A(A+a)}.$$

Въ первомъ изъ приведенныхъ сей-часъ примѣровъ имѣли $A=100$ тыс., $a=50$ тыс.; слѣдовательно разность, о которой говорится, равна $\frac{1}{6}$, какъ и было найдено выше.

43. *Даніилъ Бернулли* предложилъ другую ипотезу, которая однакожъ имѣетъ близкое сходство съ Бюффоновой. Бернулли предполагаетъ, что ожидаемое приращеніе физическаго имущества разложено на дифференціальные элементы, и допускаетъ потомъ, что безконечно малое приращеніе нравственной выгоды, соотвѣтствующее какому ни есть элементу физическаго имущества, прямо пропорціонально абсолютной величинѣ этого элемента, и обратно — первоначальному имуществу, увеличенному суммою всѣхъ элементовъ предшествовавшихъ тому, который принимается въ соображеніе. На такомъ основаніи, изобразивъ чрезъ dx безконечно малое приращеніе физическаго имущества x, а чрезъ dy соотвѣтственное приращеніе нравственной выгоды, будемъ имѣть

$$dy=\frac{kdx}{x},$$

разумѣя подъ k постоянный положительный коэффиціентъ. Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$y = k \log. x + \log. h, \tag{62}$$

гдѣ h изображаетъ постоянное количество, которое опредѣлится по извѣстной величинѣ y, соотвѣтствующей данному же значенію x.

Должно замѣтить, что на основаніи такого опредѣленія, которое безъ сомнѣнія подвержено большому произволу, величины x и y не допускаютъ значеній равныхъ нулю или отрицательныхъ; это противорѣчило бы здравому понятію о вещахъ. Дѣйствительно, если примемъ даже, что существуетъ человѣкъ, въ строгомъ смыслѣ лишенный всякаго имущества, то и ему, самое его существованіе доставляетъ уже нѣкоторое нравственное довольство, равное по крайней мѣрѣ цѣнности средствъ, необходимыхъ для поддержанія жизни. Этотъ самый человѣкъ, говоритъ Лапласъ, конечно не согласился бы взять единовременно незначительную сумму, напримѣръ сто рублей, съ условіемъ, чтобы истративъ её, рѣшительно отказаться отъ всякихъ средствъ къ пропитанію.

Формула (62) выражаетъ мѣру нравственной выгоды, предложенную Даніиломъ Бернулли; она до сихъ поръ допускается почти всѣми математиками. Несмотря на неопредѣленность постоянныхъ величинъ k и h, эта формула, въ приложеніяхъ своихъ къ различнымъ вопросамъ изъ Анализа Вѣроятностей, приводитъ къ результатамъ полезнымъ, согласующимся съ указаніями здраваго разсудка. Чтобы показать это на примѣрѣ, приложимъ формулу Бернулли къ *застрахованіямъ*. Но, прежде, покажемъ какимъ образомъ опредѣляется нравственная выгода лица, ожидающаго нѣсколькихъ событій, съ появленіемъ которыхъ сопряжены для него барыши и убытки.

Пусть будетъ a физическое имущество лица, а $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ожидаемыя имъ приращенія капитала a. Тѣ изъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, которыя соотвѣтствуютъ потерямъ, условимся принимать съ отрицательными знаками. Изобразимъ также чрезъ $p, q, r \ldots$ соотвѣтственныя вѣроятности приращеній $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, и положимъ $p+q+r+\ldots = 1$. По условіямъ вопроса, ожидаемыя или нравственныя имущества лица могутъ быть соотвѣтственно

$$k \log.(a+\alpha) + \log. h, \quad k \log.(a+\beta) + \log. h, \quad k \log.(a+\gamma) + \log. h, \ldots$$

Помноживъ эти величины по порядку на $p, q, r \ldots$, получимъ частныя нравственныя ожиданія, сумма которыхъ будетъ равна полному нравственному ожиданію. Означивъ сіе послѣднее чрезъ Y, найдется

$$Y = k[p \log.(a+\alpha) + q \log.(a+\beta) + r \log.(a+\gamma) + \ldots] + (p+q+r+\ldots) \log. h,$$

или

$$Y = k \log. \left\{ (a+\alpha)^p (a+\beta)^q (a+\gamma)^r \ldots \right\} + \log. h.$$

Изобразимъ чрезъ X физическое имущество, соотвѣтствующее нравственному Y; будетъ

$$Y = k \log. X + \log. h,$$

и слѣдовательно

$$X = (a+\alpha)^p (a+\beta)^q (a+\gamma)^r \ldots \tag{63}$$

Вычтя изъ второй части этого уравненія первоначальное имущество a, получимъ тò приращеніе физическаго имущества, непосредственное обладаніе которымъ доставило бы лицу одинаковое нравственное довольство, какъ и надежда получить выгоды $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Изъ сказаннаго въ предъидущей Главѣ слѣдуетъ, что математическая выгода, въ разсматриваемомъ случаѣ, выразится суммою

$$p\alpha + q\beta + r\gamma + \ldots.$$

Изъ формулы (63) можно извлечь примѣчательныя слѣдствія, относящіяся къ невыгодѣ игоръ, лотерей, закладовъ и другихъ оборотовъ, зависящихъ отъ случайностей, и предполагаемыхъ математически равными. Также, можно доказать, что менѣе невыгóдно подвергать имущество свое по частямъ такимъ опасностямъ, которыя не зависятъ однѣ отъ другихъ, чѣмъ въ цѣлости одной опасности. Изъ той же формулы легко заключить объ обоюдной выгодѣ застрахованій, при извѣстной, опредѣленной вычисленіемъ преміи. Мы предложимъ здѣсь доказательство только послѣдней истины, предоставляя себѣ заняться другими въ слѣдующемъ нумерѣ, и на основаніи болѣе общей формулы, которую выведемъ ниже.

Для бóльшей ясности положимъ, что лицо A застраховываетъ отъ какой либо опасности, какъ то отъ огня, града, кораблекрушенія и т. п. часть α полнаго своего имущества, которое изобразимъ чрезъ $1+\alpha$. Пусть будетъ p вѣроятность, что α уцѣлѣетъ отъ опасности, и слѣдовательно $1-p$ вѣроятность утраты α. Для математическаго равенства застрахованія, A долженъ заплатить Обществу премію, равную $(1-p)\alpha$. Теперь мы покажемъ, что заплативъ даже болѣе $(1-p)\alpha$, A можетъ еще имѣть выгоду нравственную, между тѣмъ какъ Страховое Общество получитъ тѣмъ болѣе вѣрную прибыль, чѣмъ кругъ его дѣйствій будетъ обширнѣе. Для этого замѣтимъ, что сумма

$$p[k \log.(1+\alpha) + \log. h] + (1-p)[k \log. 1 + \log. h] = pk \log.(1+\alpha) + \log. h$$

изобразитъ нравственное ожиданіе лица A до застрахованія части α, а выраженіе

$$k \log.(1+p\alpha) + \log. h$$

опредѣлитъ его нравственную выгоду въ случаѣ застрахованія. Но ясно, что

$$k \log.(1+p\alpha) + \log. h > pk \log.(1+\alpha) + \log. h,$$

ибо, по сокращеніи, получимъ неравенство

$$\log.(1+p\alpha) > p\log.(1+\alpha),$$

которое дѣлается очевиднымъ изобразивъ его въ видѣ

$$\int_0^\alpha \frac{pd\alpha}{1+p\alpha} > \int_0^\alpha \frac{pd\alpha}{1+\alpha};$$

и въ самомъ дѣлѣ, каждый изъ элементовъ дроби $\frac{p}{1+p\alpha}$ будетъ болѣе соотвѣтственныхъ элементовъ другой дроби $\frac{p}{1+\alpha}$, по причинѣ $1+\alpha > 1+p\alpha$; слѣдовательно и значеніе самаго интеграла $\int_0^\alpha \frac{pd\alpha}{1+p\alpha}$, какъ состоящаго изъ элементовъ бо́льшихъ нежели въ интегралѣ $\int_0^\alpha \frac{pd\alpha}{1+\alpha}$, превзойдетъ величину сего послѣдняго. Отсюда заключаемъ, что отдаваніе на страхъ по преміи, опредѣляемой правиломъ математическаго равенства игры, выгодно для застрахователя, потому что оно увеличиваетъ его нравственное ожиданіе. Посмотримъ еще, сколько застрахователь, сверхъ безобидной преміи $(1-p)\alpha$, можетъ заплатить Страховому Обществу при условіи, чтобъ застрахованіе не уменьшило и не увеличило нравственной его выгоды. Изобразимъ чрезъ z этотъ избытокъ. Въ такомъ случаѣ, первое изъ двухъ выраженій

$$kp\log.(1+\alpha)+\log.h, \quad k\log.(1-z+p\alpha)+\log.h$$

изобразитъ нравственное ожиданіе лица A до застрахованія части α полнаго имущества $1+\alpha$, а второе, напротивъ того, когда застрахуетъ α, заплативъ премію, равную $(1-p)\alpha+z$. Чтобы нравственная выгода лица A не измѣнилась чрезъ отдаваніе на страхъ, предъидущія два выраженія должны быть равны между собою. Отсюда

$$p\log.(1+\alpha) = \log.(1-z+p\alpha), \quad \text{или} \quad z = 1+p\alpha-(1+\alpha)^p.$$

Вотъ предѣлъ прибавочной преміи къ той, которая опредѣляется безобидностію математической. Если прибавочная премія, платимая Страховому Обществу, то есть величина z, будетъ менѣе найденнаго количества $1+p\alpha-(1+\alpha)^p$, то, при многочисленныхъ оборотахъ, Общество будетъ имѣть вѣрные барыши, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, застрахователи выиграютъ со стороны нравственной выгоды. Эта истина, о которой будетъ подробнѣе изложено въ Главѣ IX, обнаруживаетъ несомнѣнную пользу Страховыхъ Учрежденій.

44. Въ предъидущемъ N° мы упомянули объ одной формулѣ, выражающей мѣру нравственнаго ожиданія, и болѣе удовлетворительной со стороны своей всеобщности, когда не принимаемъ въ соображеніе тѣхъ многоразличныхъ обстоятельствъ, которыя могутъ встрѣтиться при сравненіи нравственнаго положенія лицъ, ожидающихъ какой либо выгоды. Условимся принимать за мѣру нравственной выгоды произвольную функцію φ физическаго имущества x, ограничивая произвольность этой функціи $\varphi(x)$ тремя только

условіями: 1° чтобы эта функція $\varphi(x)$ была непрерывна между предѣлами, заключающими разсматриваемыя значенія физическаго имущества x; 2° чтобы, между тѣми же предѣлами, съ возрастаніемъ физическаго имущества x, нравственная выгода $\varphi(x)$ также получала приращеніе, и 3° чтобы это приращеніе уменьшалось по мѣрѣ увеличенія физическаго имущества. Весьма естественно допустить непрерывность функціи $\varphi(x)$ когда примемъ въ соображеніе, что въ мірѣ нравственномъ, какъ и въ физическомъ, всё подчинено закону постепенности. Что же касается до остальныхъ двухъ условій, то они совершенно согласуются съ нашими понятіями объ разсматриваемомъ предметѣ, и подтверждаются ежедневнымъ опытомъ. Весьма простой примѣръ объяснитъ это съ возможною очевидностію. Положимъ что человѣкъ, имущество котораго можетъ быть оцѣнено въ 10 тысячь рублей, пріобрѣтаетъ сверхъ того одну тысячу; нѣтъ сомнѣнія, что нравственная его выгода увеличится чрезъ это пріобрѣтеніе. Но если, въ послѣдствіи, состояніе этого самаго человѣка сдѣлается значительнѣе, и будетъ, напримѣръ, простираться до 100 тысячь рублей, то вторичное пріобрѣтеніе одной тысячи хотя и увеличитъ его нравственное довольство, но уже не въ той степени какъ въ первый разъ, когда всё имущество его состояло только изъ 10 тысячь рублей.

На такомъ основаніи легко видѣть, что первая производная $\varphi'(x)$ нравственнаго ожиданія $\varphi(x)$ будетъ величина положительная, а вторая, $\varphi''(x)$, величина отрицательная. Дѣйствительно, означивъ чрезъ h приращеніе физическаго имущества x, получимъ, въ силу втораго изъ приведенныхъ выше условій,

$$\varphi(x+h) > \varphi(x).$$

Но, по извѣстной теоремѣ,

$$\varphi(x+h) = \varphi(x)+h\varphi'(x+\lambda h),$$

гдѣ $\lambda > 0$ и < 1; слѣдовательно

$$\varphi(x)+h\varphi'(x+\lambda h) > \varphi(x) \quad \text{или} \quad \varphi'(x+\lambda h) > 0.$$

Такъ какъ приращеніе h можетъ быть уменьшено по произволенію, то найдется $\varphi'(x)>0$. Съ другой стороны, написавъ вмѣсто $\varphi(x+h)$ разложеніе

$$\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h),$$

гдѣ $\theta>0$ и <1, окажется, что увеличеніе нравственной выгоды, соотвѣтствующее приращенію h физическаго имущества, будетъ

$$h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h).$$

Но мы сказали, что это увеличеніе дѣлается менѣе и менѣе по мѣрѣ возрастанія имущества x; слѣдовательно, предъидущая сумма должна уменьшаться съ увеличеніемъ при-

ращенія h, а для этого необходимо чтобы второй членъ $\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h)$ былъ отрицательный, ибо первый, именно $h\varphi'(x)$, какъ доказано выше, есть величина положительная. Поэтому $\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h)<0$, или $\varphi''(x+\theta h)<0$. Но уже замѣчено, что h есть количество, которое можно уменьшать по произволенію; слѣдовательно $\varphi''(x)<0$.

И такъ, единственныя условія, которымъ подчинена разсматриваемая нами непрерывная функція $\varphi(x)$, изображающая мѣру нравственной выгоды, соотвѣтствующей физическому имуществу x, заключается въ томъ, чтобы $\varphi'(x)>0$, а $\varphi''(x)<0$. Эти два условія суть строгія математическія слѣдствія указанія здраваго разсудка.

Легко видѣть, что функція $k\log.x+\log.h$, принятая Даніиломъ Бернулли, удовлетворяетъ предписаннымъ выше требованіямъ. Дѣйствительно, первая ея производная $\frac{k}{x}$ есть величина положительная, а вторая, $-\frac{k}{x^2}$, величина отрицательная; сверхъ того, функція $k\log.x+\log.h$ непрерывна для всѣхъ положительныхъ значеній физическаго имущества x.

Покажемъ теперь какимъ образомъ, несмотря на неопредѣленность функціи φ, можно, основываясь на ея свойствахъ, вывести разныя примѣчательныя истины. Такъ, напримѣръ, легко доказать, что всякія игры и заклады, даже при математическомъ ихъ равенствѣ, невыгодны для игроковъ въ томъ отношеніи, что уменьшаютъ нравственную ихъ выгоду.

Дѣйствительно, положимъ что игрокъ или закладчикъ, имущество котораго изобразимъ чрезъ $a+x$, рискуетъ сумму x противъ ожидаемаго имъ выигрыша y. Пусть будетъ p вѣроятность выигрыша, и слѣдовательно $1-p=q$ вѣроятность проигрыша. Нравственная выгода игрока, передъ началомъ игры или заклада, будетъ $\varphi(a+x)$; если же онъ станетъ играть или держать закладъ, то эта выгода выразится очевидно суммою

$$p\varphi(a+x+y)+q\varphi(a).$$

Написавъ $\varphi(a)$ въ видѣ $\varphi(a+x-x)$, и разложивъ двѣ функціи $\varphi(a+x+y)$, $\varphi(a+x-x)$, получимъ

$$p\varphi(a+x+y)+q\varphi(a)=$$

$$p\left[\varphi(a+x)+y\varphi'(a+x)+\frac{y^2}{1.2}\varphi''(a+x+\lambda y)\right]+q\left[\varphi(a+x)-x\varphi'(a+x)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(a+x-\lambda' x)\right]$$

$$=(p+q)\varphi(a+x)+(py-qx)\varphi'(a+x)+\frac{py^2}{1.2}\varphi''(a+x+\lambda y)+\frac{qx^2}{1.2}\varphi''(a+x-\lambda' x),$$

разумѣя подъ λ и λ' правильныя положительныя дроби. Но $p+q=1$, и сверхъ того

предполагается что игра математически равна, то есть, что $py=qx$. Въ слѣдствіе этихъ двухъ условій предъидущее выраженіе приметъ видъ

$$\varphi(a+x)+\frac{py^2}{1.2}\varphi''(a+x+\lambda y)+\frac{qx^2}{1.2}\varphi''(a+x-\lambda' x).$$

Такъ какъ послѣдніе два члена этой формулы, по причинѣ заключающихся въ нихъ вторыхъ производныхъ функцій φ'', суть величины отрицательныя, то сумма трехъ членовъ будетъ менѣе перваго $\varphi(a+x)$, изображающаго нравственную выгоду игрока передъ началомъ игры. Но изъ того что нравственное ожиданіе человѣка, обладающаго какимъ ни есть имуществомъ, уменьшается когда онъ вступаетъ въ игру или держитъ закладъ, должно естественно заключить, что игра или заклады *вообще невыгодны.*

Подобнымъ образомъ можно доказать невыгоду лотерей при совершенной ихъ безобидности. Пусть будетъ $a+x$ имущество какого либо лица; $\varphi(a+x)$ изобразитъ его нравственную выгоду. Положимъ, что этотъ человѣкъ беретъ билетъ на лотерею, и платитъ за него сумму x. Означимъ чрезъ y ту сумму, которую онъ надѣется выиграть, а чрезъ p вѣроятность этого выигрыша. Очевидно что y будетъ болѣе x, а условіе матетатическаго равенства или безобидности лотереи [формула (46) N° 36], выразится уравненіемъ $x=py$.

Пока не взятъ билетъ, нравственная выгода человѣка, о которомъ говоримъ, есть $\varphi(a+x)$; когда же онъ возметъ билетъ, заплативъ за него сумму x, то нравственное ожиданіе выразится или чрезъ $\varphi(a)$, или чрезъ $\varphi(a+y)$, смотря по тому, окажется ли билетъ невыигрышнымъ, или выиграетъ ожидаемую сумму y. Вѣроятность перваго предположенія есть $1-p=q$, а втораго p. Слѣдовательно, нравственная выгода лица, взявшаго уже билетъ, будетъ

$$q\varphi(a)+p\varphi(a+y)=q\varphi(a)+p\varphi(a)+p[\varphi(a+y)-\varphi(a)],$$

и какъ $p+q=1$, то это выраженіе приметъ видъ

$$\varphi(a)+p[\varphi(a+y)-\varphi(a)].$$

Теперь надобно доказать, что

$$\varphi(a)+p[\varphi(a+y)-\varphi(a)]<\varphi(a+x);$$

для этого вычтемъ сперва $\varphi(a)$ изъ обѣихъ частей неравенства, и замѣнивъ x произведеніемъ py, получимъ

$$p[\varphi(a+y)-\varphi(a)]<\varphi(a+py)-\varphi(a).$$

Но легко видѣть, что

$$p[\varphi(a+y)-\varphi(a)]=p\int_0^y\varphi'(a+z)dz \quad \text{и} \quad \varphi(a+py)-\varphi(a)=p\int_0^y\varphi'(a+pz)dz,$$

въ слѣдствіе чего предъидущее неравенство приведется къ виду

$$\int_0^y\varphi'(a+z)dz<\int_0^y\varphi'(a+pz)dz.$$

Въ справедливости этого условія весьма легко удостовѣриться: и дѣйствительно, такъ какъ предѣлы интеграловъ одинаковы, то стоитъ только доказать, что

$$\varphi'(a+pz) > \varphi'(a+z),$$

а это очевидно слѣдуетъ изъ свойства функціи φ, производная которой, какъ мы видѣли выше, уменьшается съ увеличеніемъ перемѣннаго количества. Слѣдовательно, по причинѣ $p<1$, будетъ $\varphi'(a+z)<\varphi'(a+pz)$.

И такъ, взявшій билетъ на лотерею, тѣмъ самымъ уменьшаетъ свое правственное ожиданіе, изъ чего должно заключить о невыгодѣ этого рода оборотовъ.

Для послѣдняго приложенія докажемъ аналитически еще одну истину изъ общежитія, справедливость которой подтверждается общимъ мнѣніемъ. Эта истина состоитъ въ томъ, что когда предстоитъ надобность подвергать свое имущество какимъ либо опасностямъ, то выгоднѣе раздроблять его на части, чѣмъ въ цѣлости подвергать одной случайности. И такъ когда купецъ не застраховываетъ своихъ товаровъ, то долженъ стараться отправлять ихъ не на одномъ, а на нѣсколькихъ корабляхъ. Равнымъ образомъ, человѣкъ, желающій отдать въ ростъ свой капиталъ, долженъ, для бо́льшей безопасности, отдавать его въ разныя руки, а не въ однѣ, если только ни одинъ изъ заёмщиковъ не заслуживаетъ, по надёжности своей, особеннаго довѣрія передъ другими.

Для бо́льшей ясности, положимъ, что разсматривается тотъ случай, когда купецъ отправляетъ моремъ какую нибудь часть своего имущества. Спрашивается, что́ будетъ выгоднѣе, отправить эту часть на одномъ кораблѣ, или на нѣсколькихъ, напримѣръ на двухъ, для упрощенія доказательства.

Положимъ сперва, что купецъ, обладающій имуществомъ $a+2x$, отправляетъ на одномъ кораблѣ часть $2x$ своего имущества. Пусть будетъ q вѣроятность, что корабль погибнетъ; $1-q=p$ изобразитъ вѣроятность, что корабль достигнетъ мѣста назначенія. Слѣдовательно, правственная выгода купца будетъ въ этомъ случаѣ

$$p\varphi(a+2x)+q\varphi(a).$$

Но ежели купецъ отправитъ часть $2x$ своего имущества на двухъ корабляхъ по̀-ровну, то его правственная выгода будетъ

$$p^2\varphi(a+2x)+2pq\varphi(a+x)+q^2\varphi(a).$$

Дѣйствительно, въ разсматриваемомъ случаѣ можно сдѣлать слѣдующія четыре предположенія: 1° Оба корабля, которые назовемъ буквами A и B, достигнутъ мѣста назначенія. 2° Корабль A достигнетъ, а B погибнетъ. 3° Корабль B достигнетъ, а A погибнетъ. 4° Оба корабля погибнутъ. Вѣроятность перваго предположенія есть p^2, и слѣдовательно

соотвѣтствующая правственная выгода равна $p^2\varphi(a+2x)$; вѣроятность втораго изобразится чрезъ pq, а правственная выгода чрезъ $pq\varphi(a+x)$; то̀ же самое найдется и въ третьемъ предположеніи. Наконецъ, вѣроятность четвертаго предположенія есть q^2, а правственная выгода, соотвѣтствующая этому случаю, $q^2\varphi(a)$. Сумма найденныхъ четырехъ выраженій, какъ сказано выше, будетъ

$$p^2\varphi(a+2x)+2pq\varphi(a+x)+q^2\varphi(a).$$

Легко доказать, что эта сумма болѣе суммы $p\varphi(a+2x)+q\varphi(a)$, которая соотвѣтствуетъ предположенію, что имущество $2x$ отправляютъ на одномъ кораблѣ. Дѣйствительно, такъ какъ $p+q=1$, то и найдемъ послѣдовательно:

$$p\varphi(a+2x)+q\varphi(a) = (p+q)[p\varphi(a+2x)+q\varphi(a)]$$
$$= p^2\varphi(a+2x)+pq\varphi(a+2x)+pq\varphi(a)+q^2\varphi(a).$$

Уничтожимъ члены $p^2\varphi(a+2x)$ и $q^2\varphi(a)$, общіе выраженіямъ правственной выгоды въ обоихъ случаяхъ; для доказательства истины, о которой говоримъ, останется только показать, что

$$2pq\varphi(a+x) > pq\varphi(a+2x)+pq\varphi(a), \quad \text{или} \quad \varphi(a+x)-\varphi(a) > \varphi(a+2x)-\varphi(a+x).$$

Справедливость этого неравенства очевидна, и слѣдуетъ изъ извѣстнаго свойства функціи φ, по которому она увеличивается менѣе и менѣе по мѣрѣ возрастанія перемѣнной величины.

Разсматриваніе одного математическаго ожиданія приводитъ къ заключенію о безразличіи подвергать одинаковымъ опасностямъ какое либо имущество по частямъ или въ цѣлости. Въ этомъ легко удостовѣриться слѣдующимъ образомъ: означимъ чрезъ $A+a$ физическое имущество купца, отправляющаго часть a моремъ. Положимъ сперва, что онъ отправляетъ a на одномъ кораблѣ; пусть будетъ p вѣроятность благополучнаго прибытія этого корабля, и слѣдовательно $1-p$ вѣроятность его погибели. При такомъ предположеніи $A+pa$ изобразитъ математическое ожиданіе купца. Если же онъ отправитъ имущество a на m корабляхъ, по̀-ровну, то послѣдовательные члены разложенія

$$[p+(1-p)]^m = p^m + mp^{m-1}(1-p) + \frac{m(m-1)}{1.2}p^{m-2}(1-p)^2 + \ldots + mp(1-p)^{m-1} + (1-p)^m$$

изобразятъ вѣроятности всѣхъ возможныхъ случаевъ, которые могутъ представиться. И такъ, первый членъ p^m изобразитъ вѣроятность прибытія всѣхъ m кораблей; второй $mp^{m-1}(1-p)$ вѣроятность прибытія $m-1$ корабля и погибели одного корабля, и проч. до послѣдняго члена $(1-p)^m$, изображающаго вѣроятность погибели всѣхъ m кораблей. Въ первомъ случаѣ имущество a останется во всей цѣлости; при погибели одного корабля, оно будетъ $\frac{(m-1)a}{m}$, при погибели двухъ кораблей, $\frac{(m-2)a}{m}$, и проч. Помножая

эти суммы на соотвѣтственныя вѣроятности, и придавъ къ результату нерискуемое имущество A, получимъ математическое ожиданіе купца, подвергающаго опасностямъ капиталъ a по частямъ. Это ожиданіе будетъ

$$A+p^m a+\frac{m(m-1)}{m}p^{m-1}(1-p)a+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.m}p^{m-2}(1-p)^2a+\cdots+\frac{m}{m}p(1-p)^{m-1}a$$
$$=A+pa[p^{m-1}+(m-1)p^{m-2}(1-p)+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}p^{m-3}(1-p)^2+\cdots+(1-p)^{m-1}].$$

Но величина, заключающаяся подъ квадратными скобками, есть не иное что̀, какъ разложеніе степени $[p+(1-p)]^{m-1}=1$; слѣдовательно получимъ для математическаго ожиданія ту же сумму $A+pa$, какъ и выше.

45. Мы окончимъ Главу подробнымъ изложеніемъ одной задачи, возбудившей сомнѣнія на счётъ всеобщности правила, относящагося къ математическому равенству игоръ. Эта задача первоначально была предложена *Монморту**) *Николаемъ Бернулли*, а *Даніилъ Бернулли*, по ея поводу, предложилъ ввести въ Анализъ Вѣроятностей новую мѣру выгоды, выражаемую формулою (62). Онъ помѣстилъ свои изслѣдованія по этому предмету въ Запискахъ Петербургской Академіи Наукъ**), и вотъ вѣроятная причина, по которой упоминаемая задача получила наименованіе *Петербургской*. Вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Два игрока A *и* B *играютъ въ извѣстную игру* орелъ или рѣшетка *на слѣдующихъ условіяхъ:* 1° *игра продолжается до тѣхъ поръ, пока не вскроется орелъ, и* 2° *игрокъ* B *платитъ* 2 *червонца игроку* A, *если* орелъ *вскроется при первомъ бросаніи монеты,* 4 *червонца, если при второмъ,* 8 *червонцевъ, если при третьемъ, и такъ далѣе до* n-го *бросанія, удваивая платимую сумму при каждомъ бросаніи. Спрашивается, сколько игрокъ* A, *при вступленіи въ игру, обязанъ заплатить игроку* B *для обоюдной безобидности.*

Для опредѣленія математической выгоды игрока A замѣчаемъ, что вѣроятности, соотвѣтствующія его выигрышамъ

$$2,\quad 4,\quad 8\ldots\ldots\ldots\ldots 2^n \text{ червонцамъ},$$

изобразятся по порядку дробями

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2^n};$$

слѣдовательно, въ силу N°N° 2, 3 и 34, математическая выгода игрока A будетъ

$$2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+\cdots\cdots+2^n\cdot\frac{1}{2^n}=n.$$

*) *Analyse des jeux de hasard*, стр. 402, Задача 8-ая.

**) *Commentarii Academiae Petropolitanae, T. V.*

Изъ этого оказывается, что A, вступая въ игру, долженъ заплатить n червонцевъ игроку B для безобидности игры. Но какъ не существуетъ никакого условія, ограничивающаго величины числа n, именно, числа бросаній монеты, то и слѣдуетъ положить n безконечнымъ; это самое приводитъ къ заключенію, что для математическаго равенства игры, ставка игрока A, равная n червонцамъ, должна быть безконечно большая. Такое слѣдствіе вычисленія, основаннаго на началѣ математическаго равенства игры, повидимому прямо противорѣчитъ указаніямъ здраваго разсудка. И дѣйствительно, найдется ли человѣкъ разсудительный, который согласился бы заступить мѣсто игрока A, и рисковалъ въ эту игру, не говоримъ уже сумму безконечную, что̀ невозможно, но даже сумму нѣсколько значительную? Не предпочтетъ ли всякій поставить себя на мѣсто игрока B, довольствуясь, при вступленіи въ игру, полученіемъ ставки даже посредственной величины. Откуда же происходитъ такое явное противорѣчіе между результатомъ вычисленія и здравымъ понятіемъ объ одномъ и томъ же вопросѣ? Математики прошлаго столѣтія старались объяснить этотъ парадоксъ. На сей конецъ, Даніилъ Бернулли, какъ уже сказано выше, замѣнилъ въ вопросахъ подобнаго рода математическую выгоду, выгодою нравственною; при такомъ измѣненіи дѣйствительно парадоксъ исчезаетъ. Кондорсетъ, въ Методической Энциклопедіи*), предлагаетъ по этому же предмету нѣкоторыя мысли, и, не принимая новой мѣры для ожидаемой выгоды, объясняетъ, кажется довольно удовлетворительнымъ образомъ то̀ противорѣчіе, о которомъ говоримъ. Приведемъ въ короткихъ словахъ сущность главныхъ его замѣчаній. Во первыхъ, если положимъ, что число бросаній монеты не ограничивается никакимъ условіемъ, или $n=\infty$, то въ слѣдствіе извѣстной теоремы Якова Бернулли (Глава II), должно будетъ заключить, что возможное равенство между состояніями обоихъ игроковъ A и B, то есть, уравновѣшеніе безконечной ставки игрока A съ послѣдовательными его выигрышами, можетъ имѣть мѣсто только при безконечномъ повтореніи партій. Но какъ, на самомъ дѣлѣ, невозможно допустить ни безконечнаго числа бросаній монеты, ни безконечнаго повторенія съигранныхъ партій, что̀ приводитъ очевидно къ безконечности втораго порядка, то и слѣдуетъ заключить, что такого рода игра совершенно выходитъ изъ круга дѣйствительныхъ, а поэтому и всякое сужденіе объ ней должно быть неосновательно. Вслѣдъ за этимъ, Кондорсетъ разсматриваетъ подробно тотъ случай, когда ограничиваютъ число бросаній монеты. Замѣчено, что и въ этомъ предположеніи, по общему воззрѣнію на предметъ, игрокъ A никакъ не согласился бы

*) *Encyclopédie méthodique*, article *Probabilité*, стр. 684.

поставить ставку, опредѣляемую правиломъ математическаго равенства игры, въ особенности же когда условленное наибольшее число бросаній монеты нѣсколько значительно. Нѣтъ сомнѣнія, что при одной партіи, по причинѣ слабой вѣроятности для игрока A выиграть сумму, соразмѣрную съ его ставкой, ему невыгодно будетъ согласиться на условія игры. Но, по мѣрѣ повторенія числа партій, возстановится нѣкоторое равенство между положеніями обоихъ игроковъ A и B, состоящее въ томъ, 1° что соотвѣтственныя вѣроятности выигрыша для A и B будутъ стремиться къ равенству, и 2° что вѣроятность, какъ для A такъ и для B, проиграть сумму, соразмѣрную съ ставкою столько разъ повторенною, сколько съиграно партій, будетъ болѣе и болѣе приближаться къ достовѣрности. Кондорсетъ присовокупляетъ къ своимъ замѣчаніямъ численный примѣръ, подтверждающій весьма удовлетворительнымъ образомъ приведенное выше объясненіе, и окончательно приводитъ два весьма простые случая, которые, повидимому, также противорѣчатъ понятію о математическомъ равенствѣ игоръ. Вотъ эти два случая:

Повседневный опытъ показываетъ намъ, что человѣкъ разсудительный A не согласится жертвовать суммою M имѣя вѣроятность p выиграть сумму $C > \frac{M}{p}$, и что тотъ же человѣкъ готовъ рисковать сумму M', имѣя вѣроятность p' выиграть сумму $C' < \frac{M'}{p'}$.

Первый случай относится къ тому предположенію, когда сумма M довольно значительна въ отношеніи къ имуществу лица A, а вѣроятность p выигрыша весьма слабая. Второй случай, напротивъ того, имѣетъ мѣсто, когда сумма M' весьма незначительна въ сравненіи съ имуществомъ того же лица, а p' также весьма малая вѣроятность.

Въ первомъ случаѣ, хотя при значительномъ числѣ испытаній условіе игры и выгодно для A, но онъ не согласится играть 1° потому что не можетъ повторить игру достаточное число разъ, и 2° потому что при одномъ или маломъ числѣ испытаній или партій, вѣроятность проигрыша ставки M весьма значительна, а этотъ проигрышъ, по предположенію, будетъ ощутителенъ при его состояніи.

Во второмъ случаѣ, A соглашается играть потому что ставка M' есть сумма маловажная по его состоянію, и онъ готовъ жертвовать ею, даже теряя со стороны математической выгоды съ тѣмъ, чтобы въ замѣнъ пріобрѣсти надежду выиграть сумму значительную C'. Къ этому случаю относятся лотереи, когда плата за билетъ незначительная.

Обратимся теперь къ аналитическому рѣшенію *Петербургской задачи*. Мы сказали выше, что замѣнивъ математическую выгоду нравственною, парадоксъ уже не имѣетъ мѣста. Покажемъ это на самомъ дѣлѣ, и вычислимъ ставку игрока A, придерживаясь

пріёмовъ Лапласа. Пусть будетъ a полное имущество A при вступленіи въ игру, а x его ставка, предполагая что наибольшее число бросаній монеты равно n. Въ силу формулы (62), выражающей ипотезу Даніила Бернулли, нравственныя выгоды игрока A, соотвѣтствующія вскрытію *орла* при первомъ, второмъ, третьемъ... n-омъ бросаніи, будутъ

$$k\log.(a-x+2)+\log.h,\quad k\log.(a-x+2^2)+\log.h,$$
$$k\log.(a-x+2^3)+\log.h,\ldots k\log.(a-x+2^n)+\log.h.$$

Сверхъ того, если въ первыя n бросаній орелъ не вскроется, то нравственное ожиданіе игрока A изобразится чрезъ

$$k\log.(a-x)+\log.h.$$

Вѣроятности, соотвѣтствующія этимъ нравственнымъ ожиданіямъ, будутъ по порядку

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2^3},\ldots\ldots\frac{1}{2^n}\quad \text{и}\quad \frac{1}{2^n}.$$

Слѣдовательно, въ силу условій игры, сумма

$$k\left[\frac{1}{2}\log.(a-x+2)+\frac{1}{2^2}\log.(a-x+2^2)+\cdots+\frac{1}{2^n}\log.(a-x+2^n)+\frac{1}{2^n}\log.(a-x)\right]$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)\log.h=$$
$$k\log.\left\{(a-x+2)^{\frac{1}{2}}(a-x+2^2)^{\frac{1}{4}}(a-x+2^3)^{\frac{1}{8}}\ldots(a-x+2^n)^{\frac{1}{2^n}}(a-x)^{\frac{1}{2^n}}\right\}+\log.h,$$

изобразитъ нравственную выгоду игрока A. Но, съ другой стороны, его же нравственная выгода, передъ вступленіемъ въ игру, была $k\log.a+\log.h$; поэтому, уравнивая послѣднее выраженіе предъидущему, съ цѣлію не измѣнить нравственнаго состоянія игрока A, и перейдя отъ логариѳмовъ къ числамъ, получимъ

$$a=(a-x+2)^{\frac{1}{2}}(a-x+2^2)^{\frac{1}{4}}(a-x+2^3)^{\frac{1}{8}}\ldots(a-x+2^n)^{\frac{1}{2^n}}(a-x)^{\frac{1}{2^n}}.\qquad(64)$$

Если положимъ $a-x=a'$ и $\frac{1}{a'}=\alpha$, то послѣднее выраженіе, по раздѣленіи его на $a-x$, приметъ видъ

$$1+\alpha x=(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1+2^2.\alpha)^{\frac{1}{4}}(1+2^3.\alpha)^{\frac{1}{8}}\ldots(1+2^n.\alpha)^{\frac{1}{2^n}}.\qquad(65)$$

Легко видѣть, что множители, входящіе во вторую часть этого уравненія, постепенно уменьшаются, и предѣлъ ихъ равенъ единицѣ. Дѣйствительно, пусть будутъ два смежные множителя

$$(1+2^i\alpha)^{\frac{1}{2^i}}\quad \text{и}\quad (1+2^{i+1}.\alpha)^{\frac{1}{2^{i+1}}};$$

возвышая каждый изъ нихъ въ степень 2^{i+1}, получимъ

$$1+2^{i+1}.\alpha+2^{2i}.\alpha^2\quad \text{и}\quad 1+2^{i+1}.\alpha;$$

такъ какъ первое изъ этихъ количествъ больше втораго, то заключаемъ что и

$$(1+2^i.\alpha)^{\frac{1}{2^i}} > (1+2^{i+1}.\alpha)^{\frac{1}{2^{i+1}}}.$$

Равнымъ образомъ, давъ множителю

$$(1+2^i.\alpha)^{\frac{1}{2^i}} \quad \text{видъ} \quad 2^{\frac{i}{2^i}}\left(\alpha+\frac{1}{2^i}\right)^{\frac{1}{2^i}},$$

легко усмотрѣть, что при $i=\infty$, онъ обратится въ единицу.

Если въ уравненіи (65) примемъ $n=\infty$, то тѣмъ самымъ выразимъ, что партіи не полагаемъ никакого предѣла: такое предположеніе есть самое выгодное для игрока A. Далѣе, положивъ въ уравненіи (64) $a-x=0$, и отбросивъ послѣдній множитель $(a-x)^{\frac{1}{2^n}}$, лишній въ разсматриваемомъ случаѣ, получимъ

$$a = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{2}{4}}.2^{\frac{3}{8}}.2^{\frac{4}{16}}\ldots = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots},$$

гдѣ рядъ множителей будетъ безконечный. Но какъ

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots=\frac{1}{2}\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}=2,$$

то и найдется $a=4$. Это значитъ, что если бы всё имущество игрока A состояло изъ 4 червонцевъ, то онъ, поставивъ ихъ въ игру, не измѣнилъ бы своего нравственнаго состоянія.

Для вычисленія ставки x при всякомъ другомъ значеніи разности $a-x$, можно употреблять формулу (65) поступая слѣдующимъ образомъ: должно взять сумму табличныхъ логариѳмовъ довольно значительнаго числа $i-1$ первыхъ множителей второй ея части; число i опредѣлится условіемъ, чтобы, для достиженія достаточной степени точности, произведеніе $2^i.\alpha$ равнялось по крайней мѣрѣ десяти. Сумма логариѳмовъ остальныхъ множителей, число которыхъ будетъ безконечное, выразится приблизительно формулою

$$\frac{\text{Log}.\alpha}{2^{i-1}}+\frac{(i+1)\text{Log}.2}{2^{i-1}}+\frac{0{,}4342944819\ldots}{3\alpha.2^{2i-2}}, \tag{66}$$

которую мы сей-часъ докажемъ. Сложивъ эти двѣ суммы, получимъ табличный логариѳмъ числа $1+\alpha x=1+\frac{x}{a'}$. Отсюда уже, по извѣстному значенію a', найдется и величина ставки x, которую игрокъ A, обладающій физическимъ имуществомъ a, долженъ дать игроку B, для сохраненія нравственнаго состоянія, одинаковаго съ первоначальнымъ.

Чтобы вывести выраженіе (66), возьмемъ сумму табличныхъ логариѳмовъ всѣхъ множителей второй части уравненія (65), начиная съ $(1+2^i\,\alpha)^{\frac{1}{2^i}}$. Эта сумма будетъ

$$\frac{1}{2^i}\text{Log}.(2^i.\alpha+1)+\frac{1}{2^{i+1}}\text{Log}.(2^{i+1}.\alpha+1)+\frac{1}{2^{i+2}}\text{Log}.(2^{i+2}.\alpha+1)+\ldots \tag{67}$$

Но извѣстно, что

$$\text{Log}.(z+1)=\text{Log}.z+M\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\cdots\right],$$

разумѣя подъ M *модуль* Бригговой системы, то есть число 0,4342944819.... Если разложимъ логариѳмы, входящіе въ выраженіе (67) по этой послѣдней формулѣ, и замѣтимъ, что члены $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^i.\alpha}\right)^2$, $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{i+1}.\alpha}\right)^2\cdots$, по причинѣ ихъ малости могутъ быть откинуты, то получимъ просто

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2^i}\left[\text{Log}.(2^i.\alpha)+M\cdot\frac{1}{2^i.\alpha}\right]+\frac{1}{2^{i+1}}\left[\text{Log}.(2^{i+1}.\alpha)+M\cdot\frac{1}{2^{i+1}.\alpha}\right]\\&\qquad+\frac{1}{2^{i+2}}\left[\text{Log}.(2^{i+2}.\alpha)+M\cdot\frac{1}{2^{i+2}.\alpha}\right]+\cdots\cdots\\&=\left(\frac{i}{2^i}+\frac{i+1}{2^{i+1}}+\frac{i+2}{2^{i+2}}+\cdots\right)\text{Log}.2+\left(\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^{i+2}}+\cdots\right)\text{Log}.\alpha\\&\qquad+M\left\{\frac{1}{2^{2i}.\alpha}+\frac{1}{2^{2i+2}.\alpha}+\frac{1}{2^{2i+4}.\alpha}+\cdots\right\}\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Но

$$\frac{i}{2^i}+\frac{i+1}{2^{i+1}}+\frac{i+2}{2^{i+2}}+\cdots=\frac{i}{2^i}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{2^{i+1}}\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{2i}{2^i}+\frac{1}{2^{i+1}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{i+1}{2^{i-1}},$$

$$\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^{i+2}}+\cdots=\frac{1}{2^{i-1}}, \quad \frac{1}{2^{2i}.\alpha}+\frac{1}{2^{2i+2}.\alpha}+\frac{1}{2^{2i+4}.\alpha}+\cdots=\frac{1}{3.2^{2i-2}.\alpha}.$$

Подставляя эти значенія въ формулу (68), найдется выраженіе (66) которое и надлежало доказать.

Для приложенія найденныхъ нами формулъ, положимъ напримѣръ $a'=100$; получимъ $\alpha=\frac{1}{100}$, и чтобы произведеніе $2^i.\alpha$ было не менѣе 10, достаточно положить $i=10$, откуда $2^i.\alpha=10{,}24$. Взявъ сумму табличныхъ логариѳмовъ девяти первыхъ множителей второй части уравненія (65), получится число 0,03037694. Къ этому числу надобно еще придать выраженіе (66), вычисленное для $\alpha=\frac{1}{100}$ и $i=10$, что доставитъ новое число 0,00264402. Сумма

$$0{,}03037694+0{,}00264402=0{,}03302096$$

этихъ двухъ результатовъ изобразитъ приближенный логариѳмъ числа $1+\alpha x=1+\frac{x}{100}$; перейдя отъ логариѳмовъ къ числамъ, найдемъ непосредственно $1+\frac{x}{100}=1{,}0789$, или $a=107{,}89$, откуда $x=7{,}89$. И такъ, если, при вступленіи въ игру, имущество игрока A равняется 107,89 червонцамъ, то онъ, слѣдуя правилу Даніила Бернулли, и поступая съ благоразуміемъ, можетъ поставить въ игру 7,89 черв., вмѣсто безконечной

суммы, которую получаемъ руководствуясь правиломъ математической выгоды*). Найдя x для $a' = 100$, легко уже найти величину ставки и для $a' = 200$. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, въ силу формулы (64), получимъ

$$a = (200+2)^{\frac{1}{2}}(200+2^2)^{\frac{1}{4}}(200+2^3)^{\frac{1}{8}}\ldots = 2(100+1)^{\frac{1}{2}}(100+2)^{\frac{1}{4}}(100+2^2)^{\frac{1}{8}}\ldots.$$

Но мы сей-часъ нашли

$$(100+2)^{\frac{1}{4}}(100+4)^{\frac{1}{8}}\ldots = (107{,}89)^{\frac{1}{2}};$$

слѣдовательно

$$a = 2\sqrt{101\times 107{,}89} = 208{,}78.$$

И такъ, если бы полное имущество игрока A состояло первоначально изъ 208,78 червонцевъ, то благоразуміе требовало бы, чтобъ онъ въ эту игру не рисковалъ болѣе 8,78 червонцевъ.

*Пуассонъ***) основываетъ рѣшеніе *Петербургской задачи* на математической выгодѣ, ограничивая величину той суммы, которую игрокъ B въ состояніи уплатить своему противнику A. Этотъ способъ воззрѣнія былъ уже предложенъ и прежде, что̀ можно видѣть въ *Encyclopédie méthodique*, въ статьѣ *Probabilité* (стр. 655), о которой мы упомянули выше.

Имущество игрока B, какъ бы не предполагалось значительнымъ, будетъ однако же ограниченное; допустимъ, напримѣръ, что оно равно b червонцамъ. И такъ, игрокъ A не можетъ получить отъ B болѣе b червонцевъ. Слѣдовательно, положивъ что высшая степень числа 2, заключающаяся въ b, есть β, получимъ

$$b = 2^\beta(1+h),$$

разумѣя подъ h величину положительную, меньшую 1. Если партія продолжится включительно до m-*го* бросанія монеты, то ясно, что при $\beta > m$, или даже $\beta = m$, игрокъ B, въ случаѣ проигрыша, будетъ въ состояніи удовлетворить игрока A. Но ежели *орелъ*

---

*) Лакроа, въ своемъ *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités* находитъ, что игрокъ, обладающій первоначально имуществомъ 104,38 черв. можетъ рисковать 4,38 черв. вмѣсто найденныхъ выше 7,89 при имуществѣ, равномъ 107,89. Кажущаяся разность въ двухъ рѣшеніяхъ происходитъ отъ того, что у Лакроа игрокъ A получаетъ 1 черв. а не 2, когда вскроется *орелъ* при первомъ бросаніи, 2 черв. а не 4, когда вскроется *орелъ* при второмъ бросаніи монеты, и такъ далѣе. Введя это условіе, и положивъ $a-x=100$, формула (64) доставитъ

$$a = (100+1)^{\frac{1}{2}}(100+2)^{\frac{1}{4}}(100+2^2)^{\frac{1}{8}}\ldots.$$

Если возвысимъ въ квадратъ обѣ части этого уравненія, и замѣтимъ, что въ силу доказаннаго выше, произведеніе

$$(100+2)^{\frac{1}{2}}(100+2^2)^{\frac{1}{4}}(100+2^3)^{\frac{1}{8}}\ldots = 107{,}89,$$

то получимъ $a^2 = 101\times 107{,}89$, откуда $a = \sqrt{101\times 107{,}89} = 104{,}38$, согласно съ результатомъ Лакроа.

**) *Recherches sur la probabilité des jugements*, стр. 73.

не вскроется въ первыя β бросаній монеты, а вскроется послѣ, то игрокъ B не будетъ имѣть возможности вполнѣ удовлетворить своего противника A, а можетъ только выдать ему сумму b. Слѣдовательно, математическая выгода игрока A будетъ равна числу β для первыхъ β бросаній, а въ отношеніи къ остальнымъ $m-\beta$, она выразится постояннымъ числомъ b или $2^\beta(1+h)$, помноженнымъ на сумму соотвѣтственныхъ симъ $m-\beta$ бросаніямъ вѣроятностей, начиная отъ $\frac{1}{2^{\beta+1}}$ до $\frac{1}{2^m}$. Поэтому, изобразивъ чрезъ ε полную математическую выгоду игрока A, то есть сумму, которую онъ долженъ дать игроку B для обоюдной безобидности, получимъ

$$\varepsilon = \beta + \frac{1}{2}(1+h)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{m-\beta-1}}\right),$$

то есть

$$\varepsilon = \beta + (1+h)\left(1-\frac{1}{2^{m-\beta}}\right).$$

Замѣтимъ, что найденное значеніе математической выгоды игрока A уже не возрастаетъ съ числомъ бросаній m; оно, съ увеличеніемъ этого числа дѣлается почти независимымъ отъ него, такъ что для значенія m нѣсколько значительнаго, сумма ε весьма мало разствуетъ отъ посредственной величины $\beta+1+h$, заключающейся между предѣлами $\beta+1$ и $\beta+2$.

Если бы положили напримѣръ, что рискуемое игрокомъ B имущество равно 100000 червонцамъ, то получили бы $\beta = 16$, ибо $2^{16} = 65536$, а $2^{17} = 131072$. И такъ, въ настоящемъ предположеніи, игрокъ A могъ бы дать за право вступленія въ игру 16 червонцевъ съ выгодою для себя, а 17, съ невыгодою. Разсматривая вопросъ съ этой точки, мы видимъ, что математическое ожиданіе игрока A зависитъ отъ имущества лица B, между тѣмъ какъ употребляя нравственное ожиданіе, величина ставки дѣлается зависимою отъ имущества лица A.

46. Соображая сказанное нами о выгодахъ математической и нравственной, раждается вопросъ, которая изъ нихъ должна быть употребляема при рѣшеніи различныхъ задачъ изъ Анализа Вѣроятностей. Нѣтъ никакого сомнѣнія, и мы объ этомъ говорили подробно въ Главѣ III, что если разсматривать игроковъ независимо отъ нравственнаго ихъ положенія, то есть, не полагать никакого различія между ними, то правило математическаго равенства игры одно только удовлетворитъ условію строгой справедливости. Напротивъ того, основывая рѣшеніе вопросовъ на правилѣ нравственнаго равенства игры, мы склоняемъ выгоду на сторону игрока, менѣе достаточнаго, и слѣдовательно поступаемъ несправедливо въ отношеніи къ противникамъ его, правда болѣе обезпеченнымъ со стороны ихъ состоя-

нія. Можно ли въ этомъ случаѣ назвать игру безобидною, и сдѣланное предположеніе не будетъ ли противно существеннымъ условіямъ игры? Такъ думали Николай Бернулли, племянникъ Ивана Бернулли, послѣ него Кондорсетъ*), и, въ наше время, знаменитый Фурье. Повидимому и Поассонъ раздѣляетъ это мнѣніе. Самъ Даніилъ Бернулли, предложившій мѣру нравственной выгоды, говоритъ, что строгая справедливость требуетъ, чтобы два игрока были поставлены въ такое положеніе, при которомъ ни тотъ ни другой не имѣлъ бы выгоды предъ своимъ противникомъ, а этого достигаемъ не иначе, какъ распредѣляя ставки по правилу математическаго равенства игры.

Сообразивъ приведенныя здѣсь замѣчанія, можно кажется заключить съ Николаемъ Бернулли, что къ мѣрѣ нравственной выгоды должно прибѣгать только какъ къ благоразумнымъ наставленіямъ человѣку, который занимается оборотами, зависящими отъ случайностей, а отнюдь не принимать этой мѣры за непреложное правило безобиднаго раздѣла между игроками.

---

*) *Commentarii Academiae Petropolitanae*, T. V. стр. 175 и слѣдующія.

ГЛАВА V.

О ВЛІЯНІИ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИСЧИСЛЕНІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ НЕРАВНОВОЗМОЖНЫХЪ СТАТОЧНОСТЕЙ, ПРИНИМАЕМЫХЪ ЗА РАВНОВОЗМОЖНЫЯ, И ИЗСЛѢДОВАНІЕ ОСОБАГО РОДА СОЕДИНЕНІЙ, ПРИВОДЯЩИХЪ КЪ РАЗСМАТРИВАНІЮ БЕЗКОНЕЧНАГО ЧИСЛА СТАТОЧНОСТЕЙ.

47. При рѣшеніи многихъ задачъ изъ Анализа Вѣроятностей, мы, нерѣдко, по невѣдѣнію нашему, должны допускать равновозможность такихъ случаевъ, которые, на самомъ дѣлѣ, не удовлетворяютъ этому условію. Такъ, напримѣръ, рѣшая какой нибудь вопросъ, относящійся къ игрѣ въ кости, мы предполагаемъ, что вскрытіе того или другаго нумера равновозможно; между тѣмъ, нѣтъ сомнѣнія, это предположеніе справедливо только при такомъ совершенствѣ въ отдѣлкѣ кости, какого искусство никогда достигнуть не можетъ. Дѣйствительно, при всей тщательности и точности, съ какими будетъ сдѣлана игральная кость, нельзя надѣяться чтобы вся масса ея была въ строгомъ смыслѣ однородная, чтобы форма кости, съ математическою точностію, была кубическая, и чтобы наконецъ очки, намѣченныя въ неравномъ числѣ на шести граняхъ, не нарушали однородности этой кости. Никто не усумнится въ невозможности удовлетворенія всѣмъ этимъ требованіямъ. Кость будетъ имѣть неизвѣстную намъ, но тѣмъ не менѣе дѣйствительную наклонность падать чаще на однѣ грани, чѣмъ на другія. Въ Главѣ VII и въ слѣдующихъ за нею мы увидимъ, какимъ образомъ наблюденія, обнаруживая подобную наклонность, могутъ вмѣстѣ съ тѣмъ служить и для опредѣленія ея мѣры. Здѣсь, допустивъ неравновозможность статочностей, благопріятствующихъ какому либо событію, опредѣлимъ вліяніе ихъ на величину вѣроятности.

Для большей ясности, примемъ сперва въ разсмотрѣніе весьма простую игру *орелъ* или *рѣшетка.* Нѣтъ сомнѣнія, что монета, какъ бы не казалась правильною, будетъ однако жъ имѣть нѣкоторую, вообще весьма слабую наклонность вскрываться одной стороной преимущественно предъ другой; хотя мы напередъ и не знаемъ, которая именно изъ двухъ сторонъ, *орелъ* или *рѣшетка,* можетъ легче выпасть, тѣмъ не менѣе достовѣрно, что при многократномъ бросаніи монеты, болѣе частое вскрытіе одной и той же стороны, вѣроятнѣе чѣмъ противное событіе. И въ самомъ дѣлѣ, изобразимъ чрезъ $\frac{1}{2}(1+\varepsilon)$ вѣроятность вскрытія той неизвѣстной стороны, которой благопріятствуетъ физическое устройство монеты; подъ ε мы разумѣемъ вообще весьма малую положительную дробь, въ слѣдствіе чего будетъ $\frac{1}{2}(1+\varepsilon) > \frac{1}{2}$. Ясно, что $1-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)=\frac{1}{2}(1-\varepsilon)$ изобразитъ вѣроятность вскрытія другой стороны монеты. При первомъ бросаніи, вѣроятность вскрытія орла или рѣшетки, безразлично, будетъ равна $\frac{1}{2}$, потому что мы находимся въ совершенной неизвѣстности на счётъ стороны, благопріятствуемой устройствомъ монеты. Но, при двукратномъ бросаніи, выгоднѣе держать закладъ, что орелъ или рѣшетка выпадетъ два раза. И въ самомъ дѣлѣ, возможныхъ случаевъ будетъ четыре, именно:

орелъ-орелъ, *рѣшетка-рѣшетка,*

орелъ-рѣшетка, *рѣшетка-орелъ;*

вѣроятности, соотвѣтствующія повторенію событій, опредѣлятся выраженіями

$$\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}(1+\varepsilon)=\frac{1}{4}(1+\varepsilon)^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}(1-\varepsilon)=\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2,$$

а вѣроятности неповторенія

$$\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}(1-\varepsilon)=\frac{1}{4}(1-\varepsilon^2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}(1+\varepsilon)=\frac{1}{4}(1-\varepsilon^2).$$

Сумма $\frac{1}{4}(1+\varepsilon)^2+\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2=\frac{1}{2}(1+\varepsilon^2)$, въ силу N° 2, изобразитъ вѣроятность появленія одной и той же стороны монеты, не опредѣляя напередъ которой именно, а сумма $\frac{1}{4}(1-\varepsilon^2)+\frac{1}{4}(1-\varepsilon^2)=\frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)$ вѣроятность появленія двухъ разныхъ сторонъ монеты при двукратномъ ея бросаніи.

Отсюда видимъ, что первое предположеніе вѣроятнѣе втораго въ отношеніи $1+\varepsilon^2$ къ $1-\varepsilon^2$.

Это самое сужденіе можно примѣнить къ двумъ лицамъ, играющимъ въ такую игру, въ которой выигрышъ партіи отчасти зависитъ отъ искусства. И дѣйствительно, можно утвердительно сказать, что одинъ изъ игроковъ будетъ, хотя въ слабой степени, искуснѣе другаго. Предъидущее вычисленіе доказываетъ выгоду держать закладъ, что первыя двѣ

партіи будутъ выиграны однимъ игрокомъ, но не назначая напередъ которымъ именно. Если бы знали даже, который изъ двухъ игроковъ искуснѣе, то и въ этомъ предположеніи держать закладъ, что именно онъ выиграетъ первыя двѣ партіи, могло бы быть невыгоднымъ для насъ, потому что на нашей сторонѣ только одна статочность выигрыша, правда болѣе вѣроятная, но за тó, противъ насъ, три статочности.

Показанное здѣсь на частномъ примѣрѣ, легко распространить на какія ни есть событія. Положимъ, что производится рядъ испытаній, изъ которыхъ каждое приводитъ къ одному простому событію E или E'; пусть будетъ p и $1-p=q$ соотвѣтственныя имъ вѣроятности. Изобразимъ чрезъ P вѣроятность какого ни есть опредѣленнаго совокупленія сихъ двухъ событій. Очевидно, что P будетъ нѣкоторою функціею простой вѣроятности p; и такъ $P=\varphi(p)$. Но ежели предположимъ, что извѣстная или неизвѣстная намъ причина увеличиваетъ вѣроятность одного изъ двухъ событій E или E', и въ тó же время уменьшаетъ вѣроятность другаго одною и тою же дробью ε, то, по невѣдѣнію благопріятствуемаго событія, можно будетъ сдѣлать два предположенія на счётъ простыхъ вѣроятностей событій E и E':

	Вѣроятность событія E:	*Вѣроятность событія E':*
	$p+\varepsilon$	$q-\varepsilon$
или	$p-\varepsilon$	$q+\varepsilon$.

Поэтому величина P, которую въ настоящемъ случаѣ изобразимъ чрезъ P', будетъ равна или $\varphi(p+\varepsilon)$, или $\varphi(p-\varepsilon)$. Такъ какъ мы не знаемъ для котораго изъ двухъ событій вѣроятность получила приращеніе ε, то оба значенія $\varphi(p+\varepsilon)$ и $\varphi(p-\varepsilon)$ величины P' будутъ для насъ равновѣроятны; слѣдовательно, вѣроятность каждаго изъ нихъ будетъ равняться $\frac{1}{2}$. Взявъ сумму $\frac{1}{2}\varphi(p+\varepsilon)+\frac{1}{2}\varphi(p-\varepsilon)$ получимъ, въ силу N°N° 2 и 3, искомую вѣроятность P'. И такъ, найдется

$$P'=\frac{1}{2}\Big[\varphi(p+\varepsilon)+\varphi(p-\varepsilon)\Big]=\varphi(p)+\varphi''(p)\frac{\varepsilon^2}{1.2}+\varphi^{IV}(p)\frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

или

$$P'=P+\frac{d^2P}{dp^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{1.2}+\frac{d^4P}{dp^4}\cdot\frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4}+\cdots.$$

Если положимъ $P=p^m+(1-p)^m$, то есть будемъ искать вѣроятность m-кратнаго повторенія, въ m испытаній, того или другаго изъ событій E и E', не назначая напередъ котораго именно, то получимъ

$$P'=p^m+(1-p)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}\Big[p^{m-2}+(1-p)^{m-2}\Big]\cdot\varepsilon^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\Big[p^{m-4}+(1-p)^{m-4}\Big]\cdot\varepsilon^4+\cdots$$

и слѣдовательно

$$P' > P.$$

Это показываетъ, что неравенство, существующее въ статочностяхъ, предполагаемыхъ равными, всегда увеличиваетъ вѣроятность повторенія однихъ и тѣхъ же событій.

Приложимъ выведенную сей-часъ общую формулу къ рѣшенію слѣдующаго весьма простаго вопроса: *Два игрока* A *и* B *согласились сыграть 3 партіи; спрашивается, которой изъ двухъ случаевъ будетъ вѣроятнѣйшій: 1° что одинъ игрокъ выиграетъ всѣ три партіи, или 2° что одну партію выиграетъ одинъ игрокъ, а двѣ остальныя, другой, не назначая напередъ который именно.*

Въ первомъ изъ двухъ случаевъ должно положить $P = p^3 + (1-p)^3$, гдѣ $p = \frac{1}{2}$, и если означимъ чрезъ ε избытокъ искусства одного игрока передъ другимъ, то вѣроятность, что первыя три партіи выиграетъ одинъ игрокъ, не назначая который именно, въ силу послѣдней формулы, будетъ

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + 3\varepsilon^2 = \frac{1}{4} + 3\varepsilon^2.$$

Противная вѣроятность очевидно получится положивъ въ общей формулѣ

$$P = 3p^2(1-p) + 3p(1-p)^2 = 3p(1-p), \quad \text{откуда } \frac{d^2P}{dp^2} = -6,$$

и слѣдовательно

$$P' = 3p(1-p) - 3\varepsilon^2;$$

такъ какъ въ этомъ выраженіи должно положить $p = \frac{1}{2}$, то вѣроятность выигрыша двухъ партій однимъ игрокомъ, и одной партіи другимъ, обратится въ $\frac{3}{4} - 3\varepsilon^2$. Это самое значеніе можно найти простѣйшимъ образомъ, вычтя изъ единицы найденную выше вѣроятность $\frac{1}{4} + 3\varepsilon^2$, относящуюся къ предположенію, что одинъ игрокъ выиграетъ всѣ три партіи; дѣйствительно $1 - \left(\frac{1}{4} + 3\varepsilon^2\right) = \frac{3}{4} - 3\varepsilon^2$. Теперь остается узнать, которая изъ двухъ вѣроятностей $\frac{1}{4} + 3\varepsilon^2$ и $\frac{3}{4} - 3\varepsilon^2$ будетъ болѣе, что̀ очевидно зависитъ отъ частнаго значенія ε. Если положимъ $\frac{3}{4} - 3\varepsilon^2 > \frac{1}{4} + 3\varepsilon^2$, то найдемъ $\varepsilon < \frac{1}{2\sqrt{3}}$. При $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, разсматриваемыя событія становятся равновѣроятными, а при $\varepsilon > \frac{1}{2\sqrt{3}}$, первое дѣлается болѣе вѣроятнымъ, чѣмъ второе. На такомъ основаніи, и наблюдая при томъ, что величина ε непремѣнно должна заключаться между предѣлами 0 и $\frac{1}{2}$, мы можемъ вывести слѣдующія заключенія:

Отъ $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, правдоподобнѣйшая случайность будетъ та̀, что̀ одинъ игрокъ, не назначая напередъ который именно, выиграетъ одну партію, а другой, двѣ остальныя.

При $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, равновѣроятно что всѣ три партіи будутъ выиграны однимъ игрокомъ, или двѣ однимъ, а третья, его противникомъ. Наконецъ, отъ $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ до $\varepsilon = \frac{1}{2}$, вѣроятнѣйшее событіе состоитъ въ выигрышѣ всѣхъ трехъ партій однимъ и тѣмъ же игрокомъ.

48. Всѣ задачи, рѣшеніемъ которыхъ мы до сихъ поръ занимались, приводили насъ къ конечному числу статочностей. Но иногда встрѣчаются такіе случаи, въ которыхъ число благопріятствующихъ событію статочностей, а равно и всѣхъ возможныхъ, бываетъ безконечное. Искомая вѣроятность опредѣлится тогда отношеніемъ этихъ двухъ безконечныхъ чиселъ, и вообще, по условіямъ вопроса, будетъ числомъ конечнымъ и совершенно опредѣленнымъ. Заимствуемъ весьма простой примѣръ подобнаго случая изъ *Théorie analytique des Probabilités.* Лапласъ предполагаетъ, что *опредѣленная или неопредѣленная плоскость раздѣлена равноотстоящими параллельными линіями, и что на нее бросаютъ, на-удачу, весьма тонкій цилиндръ, данной длины, не превосходящей общаго разстоянія между параллельными линіями. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что цилиндръ, падая на плоскость, встрѣтитъ одно изъ ея дѣленій.*

Замѣтимъ, что искомая вѣроятность для цѣлой системы параллельныхъ линій, будетъ одна и та же какъ и для двухъ параллельныхъ линій. Изобразимъ чрезъ AB и $A'B'$ (чертежъ 1) эти двѣ прямыя, и чрезъ $MN = a$ взаимное ихъ разстояніе. Сверхъ того, означимъ чрезъ $2r$ длину даннаго цилиндра. Мы уже сказали, что $2r$ предполагается $< a$. Положимъ теперь, что центръ O цилиндра совпадаетъ съ точкою P перпендикуляра MN, на разстояніи y отъ M. Цилиндръ, совершивъ полный оборотъ около точки P, коснется каждымъ концомъ своимъ два раза линіи AB въ точкахъ Q и Q'. Такимъ образомъ цилиндръ, описывая полную окружность или 360°, въ пространствѣ угла QPQ' будетъ постоянно встрѣчать линію AB обѣими половинами своими OL и OK; очевидно, что внѣ этого угла, не произойдетъ встрѣчи. Изобразимъ чрезъ 2φ уголъ QPQ', или чрезъ φ половину его, то есть уголъ $QPM = Q'PM$. И такъ, въ разсматриваемомъ положеніи центра цилиндра, безконечное число всѣхъ возможныхъ его положеній бу́детъ пропорціонально 360° или 2π, а число тѣхъ положеній, при которыхъ онъ встрѣчаетъ прямую AB, также безконечное, пропорціонально 4φ; поэтому вѣроятность, что цилиндръ встрѣтитъ линію AB, когда центръ его находится въ P, выразится отношеніемъ $\frac{4\varphi}{2\pi}$. Ясно, что въ этомъ выраженіи, φ зависитъ отъ перемѣнной y, и эта зависимость опредѣляется уравненіемъ $y = r\cos.\varphi$, откуда $\varphi = \text{arc}\cos.\frac{y}{r}$. Если для каждаго y опредѣлимъ φ, и возь-

мемъ потомъ сумму всѣхъ найденныхъ значеній числителя 4φ, то получимъ число тѣхъ положеній, при которыхъ цилиндръ встрѣтитъ линію AB. Но, по правиламъ Интегральнаго Исчисленія, для опредѣленія этой суммы, состоящей изъ безконечнаго числа членовъ, надобно помножить 4φ на dy, и опредѣлить интегралъ между надлежащими предѣлами. Эти предѣлы будутъ очевидно o и r; и такъ сумма, о которой говоримъ, опредѣлится слѣдующимъ интеграломъ:

$$4\int_0^r \text{arc cos.}\frac{y}{r}\cdot dy.$$

Интегрируя по частямъ, получимъ

$$4\int_0^r \text{arc cos.}\frac{y}{r}\cdot dy = 4\left(y.\text{arc cos.}\frac{y}{r}\right)_0^r + 4\int_0^r \frac{ydy}{\sqrt{r^2-y^2}}.$$

Но

$$\left(y.\text{arc cos.}\frac{y}{r}\right)_0^r = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^r \frac{ydy}{\sqrt{r^2-y^2}} = \left(-\sqrt{r^2-y^2}\right)_0^r = r;$$

слѣдовательно

$$4\int_0^r \text{arc cos.}\frac{y}{r}\cdot dy = 4r.$$

Когда центръ цилиндра приблизится ко второй линіи $A'B'$ на разстояніе, мéньшее r, то, при обращеніи своемъ, цилиндръ будетъ пересѣкать эту прямую $A'B'$. Число положеній, при которыхъ произойдетъ встрѣча, очевидно опредѣлится какъ и выше, и будетъ равно $4r$. Слѣдовательно, совокупность всѣхъ случаевъ встрѣчи, при движеніи центра по перпендикуляру MN, изобразится чрезъ $8r$. При томъ же самомъ движеніи, число всѣхъ возможныхъ случаевъ, то есть совокупность окружностей, описываемыхъ цилиндромъ въ тó время, когда центръ его пробѣгаетъ перпендикуляръ MN, равный a, изобразится чрезъ $2a\pi$. Но, легко видѣть, что отношеніе двухъ найденныхъ чиселъ будетъ одинаково для всѣхъ перпендикуляровъ, подобныхъ MN, и поэтому опредѣлитъ искомую вѣроятность. И такъ, если означимъ ее чрезъ p, то получимъ

$$p = \frac{8r}{2a\pi} = \frac{4r}{a\pi}.$$

На основаніи теоремы Якова Бернулли, распространенной на вѣроятности, опредѣляемыя *a posteriori* [ГЛАВА VII, N° 56], можно заключить, что если возьмемъ весьма тонкій цилиндръ, длина котораго равна $2r$, и будемъ бросать его на-удачу значительное число разъ на плоскость, раздѣленную параллельными линіями, на разстояніи a одна отъ другой, то, сосчитавъ сколько разъ цилиндръ падалъ на которое нибудь изъ дѣленій, это число встрѣчъ, раздѣленное на полное число бросаній, будетъ весьма приблизительно изображать вѣроятность $\frac{4r}{a\pi}$, найденную *a priori*, и тѣмъ съ бóльшею точностію, чѣмъ число бросаній было значительнѣе. Отсюда уже прямо выводимъ по приближенію величину трансцендентнаго числа π. Въ силу же N° 25 не трудно найти и вѣроятность, что погрѣшность этого опредѣленія заключается между данными предѣлами.

Положимъ теперь, что та же плоскость раздѣлена еще другою системою параллельныхъ линій, перпендикулярныхъ къ первымъ, и отстоящихъ одна отъ другой на разстояніи b, не мéньшемъ длины $2r$ прежняго цилиндра. Такимъ образомъ данная плоскость покроется сѣтью равныхъ, соприкосновенныхъ между собою прямоугольниковъ; b изобразитъ длину, а a высоту каждаго изъ нихъ. Пусть будетъ $MNN'M'$ или Ω (чертежъ 2) одинъ изъ этихъ прямоугольниковъ, а $MN = a$, $MM' = b$. Внутри его, на разстояніи r отъ четырехъ сторонъ MN, NN', $N'M'$, $M'M$, и параллельно имъ, проведемъ линіи ef, gh, ci, dj. При такомъ построеніи образуются: 1° внутренній прямоугольникъ ω, длина котораго будетъ $b-2r$, а высота $a-2r$; 2° два равные прямоугольника μ; общая длина ихъ $b-2r$, а высота r; 3° еще два равные прямоугольника ν, имѣющіе высоту r, а длину $a-2r$; наконецъ 4° четыре равные квадрата λ, общая сторона которыхъ будетъ r.

Ясно, что когда центръ цилиндра будетъ находиться внутри прямоугольника ω, то, при обращеніи своемъ, цилиндръ никогда не встрѣтитъ сторонъ большаго прямоугольника Ω. Когда центръ цилиндра будетъ находиться внутри одного изъ прямоугольниковъ μ, то, въ слѣдствіе доказаннаго предъ симъ, $4r$ изобразитъ совокупность случаевъ встрѣчи цилиндра съ одною изъ сторонъ MM' или NN' большаго прямоугольника, предполагая что центръ цилиндра пробѣгаетъ перпендикуляръ, равный высотѣ прямоугольника μ. Произведеніе найденной величины $4r$ на длину $b-2r$ прямоугольника μ, очевидно изобразитъ совокупность всѣхъ случаевъ встрѣчи цилиндра, когда центръ его будетъ находиться внутри μ. И такъ, число случаевъ встрѣчи въ отношеніи къ обоимъ прямоугольникамъ μ, будетъ $8r(b-2r)$. Подобнымъ образомъ $8r(a-2r)$ изобразитъ совокупность случаевъ встрѣчи въ томъ предположеніи, что центръ цилиндра находится внутри прямоугольниковъ ν. Наконецъ, остается опредѣлить число случаевъ встрѣчи для тѣхъ положеній цилиндра, когда центръ его находится внутри одного изъ квадратовъ. Пусть будетъ (чертежъ 3) $klmn$, въ увеличенномъ размѣрѣ, одинъ изъ этихъ квадратовъ, въ которомъ стороны km и mn предполагаются общими съ сторонами большаго прямоугольника $MNN'M'$. Изъ точки m, общей квадрату λ и прямоугольнику Ω, описываемъ радіусомъ r четверть окружности ksn. Очевидно, что при всѣхъ положеніяхъ центра цилиндра внутри четверти круга $mksnm$, цилиндръ, совершая полный оборотъ, всегда будетъ встрѣчать прямыя km и mn, или по-одиначкѣ, или вмѣстѣ, а слѣдовательно также и стороны прямоугольника Ω.

Число этихъ случаевъ очевидно изобразится произведеніемъ 2π на площадь четверти круга, и поэтому будетъ $\frac{\pi^2r^2}{2}$. Но когда центръ цилиндра будетъ находиться внѣ этой четверти, а въ пространствѣ $klnsk$, то цилиндръ уже не можетъ встрѣчать въ одно время обѣихъ сторонъ km и mn, а встрѣтитъ только одну, продолженную если нужно, или не встрѣтитъ ни одной. Чтобы опредѣлить въ такомъ предположеніи число случаевъ встрѣчи, возставляемъ, на разстояніи $mP = x$ отъ точки m, перпендикуляръ $PQ = y$ такъ, чтобы точка Q находилась внѣ четверти круга. Изъ точки Q проводимъ четыре прямыя Qr, Qr', Qt, Qt', равныя r, изъ которыхъ первыя двѣ примыкаютъ къ сторонѣ mn или къ ея продолженію, а вторыя двѣ, къ сторонѣ mk квадрата. Пусть будетъ 2φ уголъ rQr', а $2\varphi'$ уголъ tQt'. Ясно, что цилиндръ, обращаясь около своего центра Q, будетъ постоянно пересѣкать сторону mn или ея продолженіе, пока тà или другая половина его не выйдетъ изъ пространства угла $rQr' = 2\varphi$, а другую сторону mk, пока будетъ описывать, тѣмъ или другимъ концомъ своимъ, уголъ $tQt' = 2\varphi'$. Слѣдовательно, полное число случаевъ встрѣчи цилиндра съ одною изъ этихъ сторонъ, въ тò время когда центръ его находится въ Q, будетъ $4(\varphi+\varphi')$. Чтобы распространить эту величину на всѣ точки площади $klnsk$, слѣдуетъ помножить ее на элементъ $dxdy$ этой самой площади, и взять сумму подобныхъ произведеній между приличными предѣлами. Но замѣтивъ, что

$$x = r\cos.\varphi', \qquad y = r\cos.\varphi,$$

и слѣдовательно

$$dx = -r\sin.\varphi'.d\varphi', \qquad dy = -r\sin.\varphi.d\varphi,$$

искомая сумма изобразится интеграломъ

$$4r^2\int\int(\varphi+\varphi')\sin.\varphi.\sin.\varphi'.d\varphi\, d\varphi'.$$

Легко видѣть, что этотъ интегралъ, въ отношеніи къ φ', долженъ быть взятъ отъ $\varphi' = 0$ до $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$; и дѣйствительно, наибольшая величина суммы $\varphi + \varphi'$ будетъ $\frac{\pi}{2}$, и очевидно соотвѣтствуетъ тому предположенію, когда центръ цилиндра находится на четверти окружности nsk. Предѣлы же относительно φ будутъ 0 и $\frac{\pi}{2}$. И такъ, искомая величина изобразится интеграломъ

$$4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}(\varphi+\varphi')\sin.\varphi.\sin.\varphi'.d\varphi\, d\varphi'.$$

Но

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\sin.\varphi'.d\varphi' = \Big(-\cos.\varphi'\Big)_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} = 1-\sin.\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\varphi'.\sin.\varphi'.d\varphi' = \Big(-\varphi'\cos.\varphi'\Big)_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} + \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\cos.\varphi'.d\varphi' = -\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)\sin.\varphi+\cos.\varphi;$$

поэтому предъидущій двойной интегралъ обратится въ слѣдующій простой:

$$4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\varphi\sin.\varphi - \frac{\pi}{2}\sin.^2\varphi + \sin.\varphi.\cos.\varphi)d\varphi.$$

Если же замѣтимъ, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi.\sin.\varphi.d\varphi = 1, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin.^2\varphi.d\varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin.\varphi\cos.\varphi.d\varphi = \frac{1}{2},$$

то увидимъ, что окончательная величина интеграла будетъ $\frac{r^2}{2}(12-\pi^2)$. Придавъ къ ней найденную выше $\frac{\pi^2r^2}{2}$, относящуюся къ площади четверти круга, получимъ полное число случаевъ встрѣчи цилиндра въ томъ предположеніи, что центръ его находится внутри одного изъ квадратовъ λ. Сумму $\frac{r^2}{2}(12-\pi^2)+\frac{\pi^2r^2}{2} = 6r^2$ надобно еще помножить на 4, потому что имѣемъ четыре квадрата, равныхъ λ, и если къ величинѣ $24r^2$ придадимъ найденныя выше выраженія $8r(b-2r)$ и $8r(a-2r)$, относящіяся къ прямоугольникамъ μ и ν (чертежъ 2), то получимъ для полнаго числа случаевъ встрѣчи даннаго цилиндра съ сторонами прямоугольника $MNN'M'$ величину $8(a+b)r-8r^2$. Раздѣляя наконецъ эту разность на число всѣхъ возможныхъ положеній цилиндра, когда центръ его находится внутри прямоугольника $MNN'M'$, найдется искомая вѣроятность встрѣчи. Число всѣхъ возможныхъ положеній будетъ очевидно 2π для каждой точки площади $MNN'M'$, и поэтому $2\pi ab$ для всего прямоугольника. Слѣдовательно, искомая вѣроятность изобразится дробью

$$\frac{4r(a+b-r)}{\pi ab}.$$

Въ слѣдующей Главѣ (N° 50) мы рѣшимъ другой, болѣе сложный вопросъ, относящійся къ этому же роду соединеній.

ГЛАВА VI.

РѢШЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ ОСОБЕННЫХЪ ВОПРОСОВЪ ИЗЪ АНАЛИЗА ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

Чтобы по возможности ознакомить читателей съ аналитическими пріёмами, употребляемыми въ Анализѣ Вѣроятностей, а равно для упражненія въ приведеніи задачъ къ уравненіямъ, предлагаемъ еще нѣсколько вопросовъ съ подробными ихъ рѣшеніями.

49. *Дано полное уравненіе второй степени* $x^2+px+q=0$, *въ которомъ коэффиціенты* p *и* q, *предполагаемые цѣлыми, могутъ измѣняться между предѣлами* $-m$ *и* $+m$; *сверхъ того, по причинѣ простоты случая, допускается, что ни* p, *ни* q *не обращается въ нуль. При такихъ условіяхъ спрашивается, какъ велика вѣроятность, что уравненіе, написанное на-удачу, имѣетъ корни вещественные?*

Для рѣшенія вопроса замѣтимъ, что искомая вѣроятность выразится дробью, коей числитель будетъ изображать число случаевъ, въ которыхъ уравненіе $x^2+px+q=0$ имѣетъ корни вещественные, предполагая что p и q измѣняются между предѣлами $-m$ и $+m$. Чтобы опредѣлить это число, стоитъ только изслѣдовать, сколько разъ разность p^2-4q обратится въ *нуль* и въ величину *положительную*, измѣняя p и q отъ $-m$ до $+m$, включительно. Что же касается до знаменателя дроби, изображающей вѣроятность, то онъ очевидно будетъ равенъ полному числу уравненій, получаемыхъ чрезъ измѣненіе цѣлыхъ коэффиціентовъ p и q между предѣлами $-m$ и $+m$, или, чтò всё равно, числу всѣхъ возможныхъ переложеній чиселъ $1, 2, 3\ldots m$, взятыхъ пò-два, принимая при томъ въ расчётъ и знаки ихъ.

Пусть будетъ $z=\frac{N}{M}$ искомая вѣроятность. Знаменатель M опредѣляется весьма просто. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ коэффиціенты даннаго уравненія могутъ быть и положительные и отрицательные, то изобразивъ чрезъ p и q численные ихъ значенія, получимъ слѣдующіе четыре случая:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+px+q=0 \\ x^2-px+q=0 \\ x^2+px-q=0 \\ x^2-px-q=0 \end{array}\right\} \qquad (69)$$

Сверхъ того, по условію вопроса, p и q принимаютъ значенія $1, 2, 3,\ldots m$; слѣдовательно, каждое изъ четырехъ уравненій (69) заключаетъ въ себѣ m^2 другихъ, и совокупность ихъ будетъ $4m^2$; вотъ знаменатель M дроби, выражающей вѣроятность z; и такъ

$$z=\frac{N}{4m^2}.$$

Теперь займемся опредѣленіемъ числителя N. Пусть будетъ n число случаевъ, при которыхъ *первое* изъ уравненій (69) допускаетъ вещественные корни; n' тò же самое въ отношеніи ко *второму* изъ уравненій (69); n'', въ отношеніи къ *третьему*, и n''', въ отношеніи къ *четвертому*. Въ такомъ предположеніи $N=n+n'+n''+n'''$.

Но очевидно $n=n'$, ибо разность p^2-4q одинакова для обоихъ уравненій $x^2+px+q=0$ и $x^2-px+q=0$. Что касается до чиселъ n'' и n''', то ясно, что и они равны между собою; каждое изъ нихъ равно m^2, потому что корни обоихъ уравненій $x^2+px-q=0$ и $x^2-px-q=0$ всегда вещественные. И такъ $N=2n+2m^2$; слѣдовательно

$$z=\frac{2n+2m^2}{4m^2}=\frac{n+m^2}{2m^2}. \qquad (70)$$

Изъ этого видимъ, что вопросъ приводится къ опредѣленію числа n, выражающаго сколько разъ разность p^2-4q обращается въ нуль и въ количество положительное, приписывая числамъ p и q, независимо одно отъ другаго, всѣ положительныя значенія $1, 2, 3\ldots m$. И такъ, надлежитъ найти число рѣшеній формулы

$$p^2-4q \geqq 0,$$

или, чтò всё равно, слѣдующей:

$$q \leqq \frac{p^2}{4},$$

для значеній p и q, заключающихся между предѣлами 1 и m, включительно.

Принимая послѣдовательно $p=1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots$ получимъ извѣстныя значенія для q, при которыхъ условіе $q \leqq \frac{p^2}{4}$ удовлетворяется, или, чтò всё равно, такія величины

q, при которыхъ уравненіе $x^2+px+q=0$ имѣетъ вещественные корни. Наибольшее цѣлое, заключающееся въ $\frac{p^2}{4}$, опредѣлитъ число уравненій, допускающихъ вещественные корни при предполагаемой величинѣ коэффиціента p. На такомъ основаніи получимъ таблицу:

p	q
1	0
2	1
3	2, 1
4	4, 3, 2, 1
5	6, 5, 4, 3, 2, 1
6	9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
⋮	....

(71)

Разсматривая рядъ наибольшихъ величинъ для q, именно слѣдующій: 1, 2, 4, 6, 9.... (*нуль* исключенъ изъ значеній q) замѣчаемъ 1° что для опредѣленія числа n надобно знать законъ составленія этого ряда, и 2° надлежитъ опредѣлить, при какомъ значеніи p, наибольшая величина для q не будетъ превышать данный предѣлъ m. Напримѣръ, если $m=5$, то значеніе p, о которомъ говоримъ, будетъ 4, ибо величинѣ $p=5$, соотвѣтствуетъ уже величина $q=6>m$; это значеніе $q=6$, по условію вопроса, слѣдуетъ откинуть, а удержать только пять слѣдующихъ: 5, 4, 3, 2, 1, не превышающихъ предѣла m. И такъ, въ настоящемъ случаѣ, число $n=1+2+4+5=12$, что́ легко повѣрить на самыхъ уравненіяхъ.

Пусть будетъ P величина коэффиціента p, доставляющая въ предъидущемъ ряду для q величину Q, непосредственно ме́ньшую или равную m. Слѣдовательно будетъ $\frac{P^2}{4} \geqq m$, откуда $P=E(\sqrt{4m})$, разумѣя подъ $E(\sqrt{4m})$ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{4m}$. Для значеній p, бо́льшихъ нежели P, будемъ получать величины q, вообще бо́льшія предѣла m; изъ нихъ должно будетъ удержать только тѣ, которыя не превышаютъ числа m, именно $1, 2, 3 \ldots m$. Но такъ какъ между $p=P$ и $p=m$, будетъ $m-P$ членовъ и m значеній $1, 2, 3 \ldots m$ для q, соотвѣтствующихъ каждому изъ этихъ членовъ, то заключаемъ, что между предѣлами $p=P$ и $p=m$, число уравненій, съ вещественными корнями, выразится произведеніемъ $m(m-P)$.

Теперь остается опредѣлить сумму s ряда

$$1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9 \ldots\ldots Q,$$

и когда она будетъ извѣстна, то n найдется посредствомъ формулы

$$n=s+m(m-P).$$

Для опредѣленія суммы s, необходимо знать законъ, по которому составляется предъидущій рядъ. Займемся этимъ опредѣленіемъ, и, для бо́льшей ясности, различимъ два случая, соотвѣтствующіе предположеніямъ P *чётнаго* и *нечётнаго*.

Первый случай, въ которомъ предполагается $P=2k$.

Ясно, что въ этомъ предположеніи имѣемъ $Q=k^2$; предшествующая ей величина получится взявъ $p=2k-1$, и составивъ количество $\frac{p^2}{4}=k^2-k+\frac{1}{4}$; наибольшее цѣлое, заключающееся въ этой величинѣ, даетъ искомое значеніе для q, которое равняется разности k^2-k. Потомъ получимъ для q величину $(k-1)^2$, далѣе $(k-1)^2-(k-1)$ и проч. Найденныя такимъ образомъ числа составляютъ слѣдующій рядъ:

$$k^2,\quad k^2-k,\quad (k-1)^2,\quad (k-1)^2-(k-1),\quad (k-2)^2, \ldots 9,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1. \tag{72}$$

Сумма этой строки, изображенная выше чрезъ s, будетъ выражать число уравненій съ вещественными корнями, отъ предѣла $p=1$ до $p=E(\sqrt{4m})=P$ включительно, при P чётномъ. Но рядъ этотъ можетъ быть написанъ въ видѣ

$$s=1+[2+4]+[6+9]+\ldots+[(k-1)(k-2)+(k-1)^2]+[k(k-1)+k^2],$$

и, по обратному способу разностей, или другимъ образомъ, найдется весьма просто

$$s=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}=\frac{P(P+2)(2P-1)}{24}.$$

Слѣдовательно, полное число случаевъ, въ которыхъ уравненіе x^2+px+q 0 имѣетъ вещественные корни, выражаемое суммою $s+m(m-P)$, будетъ

$$\frac{P(P+2)(2P-1)}{24}+m(m-P).$$

Но это число изображено выше чрезъ n; и такъ вѣроятность z, что уравненіе второй степени, съ коэффиціентами цѣлыми, заключающимися между предѣлами $-m$ и $+m$, выразится, въ силу уравненія (70), формулою

$$z=\frac{\frac{P(P+2)(2P-1)}{24}+m(2m-P)}{2m^2}, \tag{73}$$

гдѣ $P=E(\sqrt{4m})$ есть *чётное* число.

Второй случай, въ которомъ предполагается $P=2k+1$.

Въ этомъ случаѣ будетъ $Q=k^2+k$, потому что $\frac{P^2}{4}=k^2+k+\frac{1}{4}$, откуда, отдѣляя цѣлое число, получаемъ k^2+k; слѣдовательно, предшествующая величина для q, которая соотвѣтствуетъ значенію $p=2k$, будетъ k^2; потомъ величины для q пойдутъ точно въ такомъ порядкѣ, какъ и въ ряду (72). И такъ, чтобы найти сумму ряда

$$1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9 \ldots k^2-k,\ \ k^2,\ \ k^2+k,$$

достаточно будетъ, къ суммѣ

$$s=1+2+4+6+9+\ldots+(k^2-k)+k^2=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6},$$

придать величину дополнительнаго члена k^2+k, что приведетъ насъ къ слѣдующему выраженію:

$$\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}=\frac{(P-1)(P+1)(2P+5)}{24},$$

почему вѣроятность z, въ случаѣ P *нечётнаго*, выразится формулою:

$$z=\frac{\frac{(P-1)(P+1)(2P+5)}{24}+m(2m-P)}{2m^2}. \qquad (74)$$

И такъ, для опредѣленія вѣроятности, что произвольно взятое уравненіе 2-ой степени $x^2+px+q=0$, въ которомъ p и q суть цѣлыя числа, заключающіяся между предѣлами $-m$ и $+m$, имѣетъ корни вещественные, слѣдуетъ сперва найти наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\sqrt{4m}$. Пусть будетъ P это число; искомая вѣроятность z опредѣлится формулами (73) или (74), смотря по тому, будетъ ли P числомъ *чётнымъ* или *нечётнымъ*.

Положимъ напримѣръ $m=10$; найдемъ $P=E(\sqrt{40})=6$, и по формулѣ (73)

$$z=\frac{162}{200}.$$

Для $m=100$, имѣемъ $P=E(\sqrt{400})=20$, и по той же формулѣ (73) получимъ

$$z=\frac{18718}{20000}.$$

Для $m=1000$, будетъ $P=E(\sqrt{4000})=63$, и въ слѣдствіе формулы (74) имѣемъ

$$z=\frac{1958328}{2000000},$$

и такъ далѣе. Изъ этихъ примѣровъ усматриваемъ, что вѣроятность получить на-удачу уравненіе 2-ой степени, имѣющее вещественные корни, быстро увеличивается по мѣрѣ того, какъ увеличиваемъ предѣлы его коэффиціентовъ. Если положимъ $m=\infty$, то обѣ формулы (73) и (74) доставляютъ $z=1$. Этотъ выводъ, при первомъ воззрѣніи, долженъ показаться ошибочнымъ, ибо изъ него слѣдуетъ, что вѣроятность получить уравненіе съ *мнимыми корнями* равна нулю, между тѣмъ какъ нѣтъ никакого сомнѣнія, что такихъ уравненій безчисленное множество. Этотъ кажущійся парадоксъ прямо объясняется тѣмъ, что число уравненій, имѣющихъ вещественные корни, безконечно велико въ отношеніи къ числу уравненій, допускающихъ мнимыя рѣшенія. Основываясь на формулахъ (73) и (74) легко доказать, что отношеніе числа уравненій съ вещественными корнями, къ числу уравненій съ мнимыми, будетъ пропорціонально $\sqrt{m}$, когда предположимъ $m=\infty$. Для этого

стоитъ только, въ обѣихъ формулахъ, замѣнить P величиною $\sqrt{4m}$, равною P при $m=\infty$. Впрочемъ замѣтимъ, что если бы предѣлы коэффиціентовъ p и q были различны между собою, то можно бы было выбрать эти предѣлы такъ, что вѣроятность z обратилась бы нетолько въ количество дробное, но даже и въ нуль.

Руководствуясь подобными соображеніями, можно рѣшить вопросъ и въ томъ случаѣ, когда предложенное уравненіе будетъ вида $ax^2+bx+c=0$, разумѣя подъ a, b и c коэффиціенты цѣлые, заключающіеся между предѣлами 1 и m. Отсылаемъ по этому предмету къ нашему Разсужденію, помѣщенному въ *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg*, VI *Série*, Sciences mathématiques et physiques, T. I, 1836.

50. *Дана опредѣленной или неопредѣленной величины плоскость, покрытая системою соприкосновенныхъ между собою равностороннихъ треугольниковъ; на эту плоскость бросаютъ, на-удачу, весьма тонкій цилиндръ, извѣстной длины. Опредѣлить вѣроятность, что цилиндръ упадетъ по крайней мѣрѣ на одну изъ сторонъ начерченныхъ на плоскости треугольниковъ.*

Прежде всего замѣтимъ, что искомая вѣроятность, для цѣлой системы треугольниковъ, будетъ одинакова съ вѣроятностію, относящеюся къ одному изъ составныхъ треугольниковъ, предполагая что центръ цилиндра находится внутри его; поэтому достаточно опредѣлить послѣднюю, и слѣдовательно принять въ соображеніе одинъ изъ треугольниковъ плоскости. Для опредѣленія вѣроятности, что цилиндръ, падая центромъ своимъ внутри разсматриваемаго треугольника, пересѣчетъ одну или двѣ изъ его сторонъ, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: изъ каждой внутренней точки треугольника, принимаемой за центръ цилиндра, радіусомъ равнымъ полу-длинѣ цилиндра, описываемъ цѣлую окружность; опредѣляемъ потомъ какъ великъ уголъ, при которомъ цилиндръ будетъ пересѣкать стороны треугольника. Отношеніе найденнаго такимъ образомъ угла къ цѣлой окружности, въ силу предложенныхъ въ N° 48 объясненій, равно отношенію числа случаевъ встрѣчи, къ числу всѣхъ возможныхъ, и слѣдовательно изображаетъ вѣроятность встрѣчи, когда центръ цилиндра будетъ совпадать съ разсматриваемою точкою внутри треугольника. Пусть будетъ $\frac{\varphi}{2\pi}$ эта вѣроятность. Изобразимъ знакомъ S сумму, относящуюся ко всѣмъ точкамъ треугольника. Дробь $\frac{\varphi}{S2\pi}$ будетъ означать вѣроятность, что центръ цилиндра упадетъ въ назначенную напередъ точку, и что самый цилиндръ встрѣтитъ по крайней мѣрѣ одну изъ сторонъ треугольника, а выраженіе $\frac{S\varphi}{S2\pi}$ изобразитъ искомую вѣроятность. Умноживъ какъ числитель такъ и знаменатель послѣдней дроби на элементъ ω площади треугольника, получимъ

$$\frac{S\varphi.\omega}{S2\pi.\omega} = \frac{S\varphi.\omega}{2\pi S\omega}.$$

Если, для краткости, означимъ чрезъ A^2 площадь треугольника, то найдемъ слѣдующее выраженіе для вѣроятности встрѣчи цилиндра съ дѣленіями:

$$\frac{S\varphi.\omega}{2\pi.A^2}. \qquad (75)$$

И такъ, для рѣшенія нашего вопроса, надлежитъ опредѣлить числитель предъидущей дроби. По причинѣ разнообразія обстоятельствъ, представляющихся въ различныхъ частяхъ треугольника, мы должны разложить его на нѣсколько фигуръ. Пусть будетъ ABC (чертежъ 4) треугольникъ, о которомъ идетъ рѣчь, L каждая изъ его сторонъ, а $2r$ длина даннаго цилиндра. На перпендикулярномъ разстояніи r отъ каждой стороны треугольника, внутри его, проводимъ три параллельныя линіи; такимъ образомъ составятся: 1° равносторонній треугольникъ abc, котораго площадь назовемъ Ω; 2° три трапеціи $abK'K''$, $acKM''$, $bcMM'$; пусть будетъ λ площадь каждой изъ нихъ; 3° три ромба $AaKK'$, $BbMK''$, $CcM'M''$, и площадь каждаго изъ нихъ μ. Слѣдовательно, площадь треугольника ABC, равная $\frac{\sqrt{3}}{4}.L^2$, будетъ также $=\Omega+3\lambda+3\mu$.

Замѣтимъ, что такое разложеніе треугольника справедливо только въ томъ случаѣ, когда r менѣе радіуса круга, вписаннаго въ треугольникѣ ABC. Слѣдовательно, мы предполагаемъ $r < \frac{L}{2\sqrt{3}}$. Впрочемъ, можно не исключать случая $r = \frac{L}{2\sqrt{3}}$; тогда надобно только принять $\Omega = 0$.

Прежде нежели займемся рѣшеніемъ вопроса, выпишемъ для удобности нѣкоторыя величины, въ которыхъ будемъ имѣть надобность. Вотъ онѣ (по чертежу 4-му):

$$\overline{AB} = L, \quad \overline{ab} = L-2\sqrt{3}\ r, \quad \text{перпендикуляръ } \overline{bH} = r,$$

$$\overline{bK''} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = l, \quad \overline{K''H} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\,l, \quad \text{уголъ } (ABC) = 60^\circ,$$

$$\sin.30^\circ = \cos.60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin.60^\circ = \cos.30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть будетъ P числитель дроби (75); отношеніе

$$\frac{P}{2\pi.\frac{\sqrt{3}}{4}.L^2} = \frac{2P}{\sqrt{3}.\pi L^2}$$

изобразитъ вѣроятность встрѣчи цилиндра по крайнѣй мѣрѣ съ одною изъ сторонъ треугольника.

Приступимъ теперь къ опредѣленію величины P, и замѣтимъ сперва, что пока центръ цилиндра находится внутри треугольника Ω, то самый цилиндръ не можетъ падать ни на

одну изъ сторонъ AB, BC, CA. Слѣдовательно, для площади Ω не будетъ случаевъ встрѣчи. Изобразимъ чрезъ m число случаевъ, въ которыхъ цилиндръ, падая центромъ своимъ внутри площади λ, пересѣчетъ которую нибудь изъ сторонъ AB, BC, CA, а чрезъ n то̀ же самое въ разсужденіи каждой изъ площадей μ. Получимъ $P = 3m+3n$, и слѣдовательно, искомая вѣроятность, которую изобразимъ чрезъ z, опредѣлится формулою

$$z = \frac{2\sqrt{3}.(m+n)}{\pi L^2}. \qquad (76)$$

Вопросъ состоитъ теперь въ опредѣленіи величинъ m и n. Займемся сначала первою изъ нихъ. Пусть будетъ $ECDF$ (чертежъ 5) трапеція λ, въ увеличенномъ размѣрѣ; разложимъ ее на прямоугольникъ $ABCD$ и два прямоугольные треугольника ACE и BDF. Пусть будетъ m' число случаевъ встрѣчи, когда центръ цилиндра находится внутри прямоугольника, а n' то̀ же самое въ отношеніи къ каждому изъ двухъ треугольниковъ. Слѣдовательно

$$m = m'+2n'. \qquad (77)$$

Чтобы найти m', возьмемъ внутри прямоугольника $ABCD$ какую ни есть точку M, и изобразимъ ея прямоугольныя координаты AP и PM чрезъ x и y. Положимъ, что центръ цилиндра падаетъ въ эту точку, и что цилиндръ, обращаясь около нея, описываетъ концами своими цѣлую окружность; пусть будетъ φ уголъ, составляемый осью цилиндра съ перпендикуляромъ MP въ то̀ мгновеніе, когда цилиндръ коснется однимъ концомъ линіи AB въ точкѣ k. Уголъ 2φ изобразитъ часть окружности, описываемую каждымъ концомъ цилиндра, при которой сей послѣдній будетъ падать на сторону AB. И такъ, въ пространствѣ угла, равнаго 4φ, цилиндръ будетъ пересѣкать сторону AB, предполагая, что центръ его находится въ точкѣ M, а двойной интегралъ $4\int\int\varphi dxdy$ взятый между надлежащими предѣлами, опредѣлитъ величину, которую мы изобразили выше чрезъ m'.

Для опредѣленія этого интеграла, замѣтимъ что $y = r\cos.\varphi$, и слѣдовательно $dy = -r\sin.\varphi.d\varphi$; предѣлы относительно φ очевидно будутъ 0 и $\frac{\pi}{2}$, а въ разсужденіи x, *нуль* и $AB = L-2\sqrt{3}.r$. И такъ, по причинѣ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi.\sin.\varphi.d\varphi = 1,$$

получимъ

$$m' = 4r\int_0^{L-2\sqrt{3}.r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi.\sin.\varphi.dxd\varphi = 4r(L-2\sqrt{3}.r). \qquad (78)$$

Величина n' опредѣляется подобнымъ образомъ: только верхній предѣлъ относительно y будетъ перемѣнный. Означимъ чрезъ $x=EP$, $y=PM$ (чертежъ 6) координаты точки M, въ которой предполагаемъ центръ цилиндра, и изобразимъ чрезъ 2φ уголъ, составляемый крайними положеніями цилиндра, такъ что $\overline{Mk}=\overline{Ml}=r$. Величина n' выразится интеграломъ $4\int\int\varphi dxdy$, распространяя его на весь треугольникъ ACE; поэтому, предѣлы въ разсужденіи перемѣнной y будутъ 0 и $\sqrt{3}.x$, ибо уравненіе прямой EC, по причинѣ угла CEA равнаго 60^0, есть $y=\sqrt{3}.x$; относительно же абсциссы x, интегралъ долженъ быть взятъ отъ $x=0$ до $x=EA=\frac{r}{\sqrt{3}}$; и такъ

$$n'=4\int_0^{\frac{r}{\sqrt{3}}}\int_0^{\sqrt{3}.x}\varphi.dxdy.$$

Но какъ $y=r\cos.\varphi$, то $\varphi=\text{arc}\cos.\frac{y}{r}$, почему

$$n'=4\int_0^{\frac{r}{\sqrt{3}}}\int_0^{\sqrt{3}.x}\text{arc}\cos.\frac{y}{r}.dxdy=\frac{4r^2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{\pi}{8}\right).$$

Слѣдовательно, въ силу формулъ (77) и (78), получимъ

$$m=4rL-\frac{16r^2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}. \tag{79}$$

Опредѣленіе величины n нѣсколько сложнѣе предъидущей m. Увеличимъ для удобности размѣры ромба μ. Пусть будетъ $ABCD$ (чертежъ 7) этотъ ромбъ. Изъ точки A, радіусомъ полу-цилиндра r (по построенію, равнымъ высотѣ ромба), описываемъ круговую дугу dcb. Очевидно, что пока центръ цилиндра будетъ находиться внутри сектора $Abcd$, цилиндръ, при всѣхъ положеніяхъ своихъ, непремѣнно упадетъ или на одну изъ сторонъ AB, AD, или даже на обѣ. Слѣдовательно, число соединеній, относящихся къ этому предположенію, будетъ равняться цѣлой окружности, помноженной на площадь сектора $Abcd$, то есть величинѣ $\frac{\pi^2r^2}{3}$. Если, сверхъ того, изобразимъ чрезъ p число случаевъ встрѣчи, когда центръ цилиндра находится внутри фигуры $dDCBbc$, то получимъ

$$n=\frac{\pi^2r^2}{3}+p. \tag{80}$$

Такимъ образомъ вопросъ приводится къ опредѣленію величины p. На сей конецъ, изъ какой ни есть точки M, взятой внутри фигуры $dDCBbc$, радіусомъ r, описываемъ часть окружности, которая пересѣчетъ стороны AB и AD, или ихъ продолженія, въ нѣкоторыхъ точкахъ 1, 2, 3, 4. Ясно, что обращая цилиндръ около разсматриваемой точки M, онъ будетъ встрѣчать обѣ стороны AB и AD, или только одну изъ нихъ, когда будетъ находиться внутри угловъ $(1M2)$ и $(3M4)$, именно: обѣ стороны въ пространствѣ угла

$(4ME)$ и равнаго ему и противуположнаго вершиною $(1ME')$, а одну только, когда будетъ заключаться въ углахъ $(E'M2)$, $(4MF')$, $(3ME)$, $(FM1)$; внѣ этихъ угловъ встрѣча невозможна. Отсюда легко заключить, что встрѣча непремѣнно произойдетъ при обращеніи цилиндра внутри угла $(FM2)$ и противуположнаго ему вершиною $(F'M3)$, то есть, въ пространствѣ удвоеннаго угла $(FM2)$. Внѣ сихъ предѣловъ, цилиндръ не можетъ пересѣкать сторонъ AB, AD ромба. Положимъ $(FM2)=\theta$, и опредѣлимъ этотъ уголъ. Изъ точки M опустимъ перпендикуляры Mh и Mj на стороны AB и AD ромба; пусть будетъ уголъ $(1M2)=2\varphi$, а $(3M4)=2\varphi'$. Такъ какъ $\theta=180^0-(2M3)$, а уголъ (hMj), по свойству ромба, равняется 120^0, то, по причинѣ $(2M3)=(hMj)-\varphi-\varphi'$, найдется $\theta=60^0+\varphi+\varphi'=\frac{\pi}{3}+\varphi+\varphi'$. Пусть будутъ AX, AY косоугольныя координатныя оси, и $AP=x$, $PM=y$; элементъ площади будетъ $\sin.60^0.dxdy=\alpha dxdy$, разумѣя подъ α ирраціональное число $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin.60^0$. Слѣдовательно получимъ

$$p=2\alpha\int\int\left(\frac{\pi}{3}+\varphi+\varphi'\right)dxdy.$$

Если выразимъ φ и φ' посредствомъ x и y, и разложимъ послѣдній интегралъ на два другіе, одинъ, относительно фигуры $Ddcbb'D$, а другой, относительно параллелограмма $bBb'C$, то первый интегралъ должно будетъ взять отъ $y=$ ординатѣ круга PN, до $y=$ постоянной линіи AD, и отъ $x=0$ до $x=r$; второй, отъ $y=0$, до $y=$ постоянной линіи AD, и отъ $x=r$, до $x=AB$. Изобразимъ чрезъ y' ординату PN круга, и вспомнимъ, что линія $AB=AD=\frac{2r}{\sqrt{3}}=l$. Если теперь изъ точки P опустимъ перпендикуляръ PQ на линію AD, то, по причинѣ угла APQ равнаго 30^0, получимъ $\overline{AP}.\cos.30^0=PQ=Mj$, или $\frac{x\sqrt{3}}{2}=r\cos.\varphi$. Но мы видѣли выше, что $l=\frac{2r}{\sqrt{3}}$; слѣдовательно $x=l.\cos.\varphi$. Подобнымъ образомъ найдемъ $y=l.\cos.\varphi'$. Отсюда выведемъ

$$\varphi=\text{arc}\cos.\frac{x}{l},\qquad \varphi'=\text{arc}\cos.\frac{y}{l}.$$

Подставляя эти величины въ предъидущее выраженіе для p, получимъ

$$p=2\alpha\int_0^r\int_{y'}^l\left(\frac{\pi}{3}+\text{arc}\cos.\frac{y}{l}+\text{arc}\cos.\frac{x}{l}\right)dxdy+2\alpha\int_r^l\int_0^l\left(\frac{\pi}{3}+\text{arc}\cos.\frac{y}{l}+\text{arc}\cos.\frac{x}{l}\right)dxdy.$$

Пусть будетъ для краткости I_1 первый, а I_2 второй изъ интеграловъ, входящихъ въ величину p; найдется

$$p=2\alpha I_1+2\alpha I_2.$$

Интегрируя относительно перемѣнной y, получимъ

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^r \Big[\frac{\pi}{3}(l-y') + \sqrt{l^2-y'^2} + l.\,\text{arc cos.}\frac{x}{l} - y'(\text{arc cos.}\frac{y'}{l} + \text{arc cos.}\frac{x}{l})\Big]dx$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_r^l \Big[\frac{\pi}{3}l + l + l.\,\text{arc cos.}\frac{x}{l}\Big]dx.$$

Интегралъ I_1 заключаетъ въ себѣ, сверхъ перемѣнной x, еще ординату y' круга; но какъ уравненіе сего послѣдняго есть $x^2+y'^2+xy'=r^2$, что легко видѣть изъ треугольника APN (чертежъ 8), въ которомъ имѣемъ $\overline{AN}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PN}^2 + 2\overline{AP}\times\overline{PN}.\cos.60^0$, или $r^2 = x^2+y'^2+xy'$, то и получимъ

$$y' = \frac{\sqrt{4r^2-3x^2}-x}{2}, \text{ а также } x = \frac{\sqrt{4r^2-3y'^2}-y'}{2}.$$

Отсюда $$\sqrt{4r^2-3y'^2} = 2x+y' \text{ или } \sqrt{l^2-y'^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x+y').$$

Замѣтивъ сверхъ того, что

$$\int_0^r y'dx = \frac{\pi r^2}{6a},$$

найдемъ

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^r \frac{\pi}{3}(l-y')dx = \frac{\pi}{3}lr - \frac{\pi^2r^2}{18a} \\ &\int_0^r \sqrt{l^2-y'^2}.\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^r(2x+y')dx = \frac{r^2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi r^2}{6a\sqrt{3}} \\ &\int_0^r l.\,\text{arc cos.}\frac{x}{l}.\,dx = l(l-\sqrt{l^2-r^2}+r.\,\text{arc cos.}\frac{r}{l}). \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Для опредѣленія послѣдняго интеграла, входящаго въ величину I_1, именно

$$\int_0^r y'(\text{arc cos.}\frac{y'}{l} + \text{arc cos.}\frac{x}{l})dx,$$

наблюдаемъ, что сумма

$$\text{arc cos.}\frac{y'}{l} + \text{arc cos.}\frac{x}{l} = 120^0 = \frac{2\pi}{3}.$$

Это равенство прямо слѣдуетъ изъ простаго геометрическаго построенія. Дѣйствительно, мы видѣли выше, что вообще

$$x = l\cos.\varphi, \quad y = l\cos.\varphi';$$

слѣдовательно и для круга будетъ также

$$x = l\cos.\varphi, \quad y' = l\cos.\varphi',$$

откуда

$$\text{arc cos.}\frac{x}{l} = \varphi, \quad \text{arc cos.}\frac{y'}{l} = \varphi';$$

и такъ

$$\text{arc cos.}\frac{y'}{l} + \text{arc cos.}\frac{x}{l} = \varphi + \varphi'.$$

Но ясно, что когда центръ цилиндра будетъ находиться въ какой ни есть точкѣ N круговой дуги dcb (чертежъ 8), то, по причинѣ NA равнаго r, углы φ и φ' будутъ смежные, то есть, $(hNA) = \varphi'$, $(ANj) = \varphi$, почему $(hNj) = \varphi+\varphi'$; съ другой же стороны очевидно, что уголъ $(hNj) = 120^0$; слѣдовательно

$$\text{arc cos.}\frac{y'}{l} + \text{arc cos.}\frac{x}{l} = 120^0 = \frac{2\pi}{3}.$$

И такъ

$$\int_0^r y'(\text{arc cos.}\frac{y'}{l} + \text{arc cos.}\frac{x}{l})dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^r y'dx = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\pi r^2}{6a} = \frac{\pi^2r^2}{9a}. \quad (82)$$

Соединяя интегралы (81) и (82), и замѣняя величину l равною ей $\frac{2r}{\sqrt{3}}$, а a числомъ $\frac{\sqrt{3}}{2}$, найдемъ по сокращеніи

$$2a\mathrm{I}_1 = r^2\Big[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \Big(1+\frac{1}{3\sqrt{3}}\Big)\pi - \frac{1}{3}\pi^2\Big].$$

Что касается до интеграла I_2, то получаемъ безъ всякаго затрудненія

$$2a\mathrm{I}_2 = r^2\Big[2(\sqrt{3}-1) + (\frac{4}{3\sqrt{3}}-1)\pi\Big].$$

Слѣдовательно, по формулѣ $p = 2a\mathrm{I}_1 + 2a\mathrm{I}_2$, найдется

$$p = r^2(\frac{8}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{5}{3\sqrt{3}}\pi - \frac{1}{3}\pi^2),$$

и наконецъ, по уравненію (80),

$$n = r^2(\frac{8}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{5}{3\sqrt{3}}\cdot\pi).$$

Если подставимъ теперь въ уравненіе (76) величину m, опредѣляемую формулою (79), и найденное сей-часъ значеніе для n, то получимъ окончательно

$$z = \frac{8\sqrt{3}.rL - r^2(16+2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi)}{\pi L^2}.$$

Вотъ выраженіе вѣроятности, что цилиндръ, брошенный на-удачу на плоскость, раздѣленную на равносторонніе треугольники, упадетъ по крайней мѣрѣ на одну изъ ихъ сторонъ; очевидно, что противная вѣроятность будетъ $1-z$. Напримѣръ, если бы для длины цилиндра приняли наибольшую величину $\frac{L}{\sqrt{3}}$, объ которой упомянуто выше, то нашли бы

$$z = \frac{16-\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi}{6\pi} = \text{около } \frac{33}{38},$$

а слѣдовательно противная вѣроятность $= \frac{5}{38}$.

Эту задачу мы взяли изъ нашего Разсужденія, напечатаннаго въ *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg*, VI *Série*, Sciences Mathématiques et Physiques, T. I, 1837. Въ томъ же Томѣ читатели найдутъ другіе, подобнаго же рода вопросы, приводящіе къ опредѣленію логариѳмическихъ и эллиптическихъ функцій.

51. *По данному положенію двухъ квадратовъ на обыкновенной шахматной доскѣ, опредѣлить вѣроятность, что ладья, стоящая на одномъ изъ двухъ квадратовъ, достигнетъ другаго въ x ходовъ.*

Рѣшеніе этого вопроса представляетъ три случая, относящіеся къ взаимному положенію двухъ данныхъ квадратовъ. Изобразимъ ихъ буквами A и B. Можетъ случиться 1° что A и B совпадаютъ, то есть, что по смыслу вопроса, ладья должна возвратиться въ x ходовъ на прежнее мѣсто; 2° что B находится на одной горизонтальной или вертикальной линіи съ A, и наконецъ 3° что A и B не на одной линіи. На чертежахъ 9, 10 и 11 изображены эти три взаимныя положенія квадратовъ A и B.

Пусть будутъ p, q, r искомыя вѣроятности въ разсматриваемыхъ трехъ случаяхъ. Изобразимъ соотвѣтственно чрезъ u_x, v_x, w_x число всѣхъ различныхъ движеній ладьи, при которыхъ она, въ x ходовъ, изъ A достигаетъ B. Замѣтивъ, что число всѣхъ возможныхъ движеній ладьи, въ x ходовъ, будетъ $14^x = 2^x . 7^x$, получимъ

$$p = \frac{u_x}{2^x . 7^x}, \quad q = \frac{v_x}{2^x . 7^x}, \quad r = \frac{w_x}{2^x . 7^x}. \tag{83}$$

Мы говоримъ, что число всѣхъ возможныхъ движеній ладьи, при x ходахъ, есть 14^x; дѣйствительно, при первомъ ея ходѣ возможныхъ движеній будетъ 14, отмѣченныхъ на чертежѣ 9 буквами a. При второмъ ходѣ будетъ опять 14 движеній, и какъ каждое изъ нихъ совокупляется съ каждымъ изъ 14-ти перваго хода, то и получится 14×14 или 14^2 различныхъ движеній ладьи, при двухъ ея ходахъ. Для трехъ ходовъ найдется число 14^3, и вообще, для x ходовъ, полное число движеній ладьи, какъ сказано выше, будетъ 14^x. И такъ вопросъ приводится къ опредѣленію величинъ u_x, v_x, w_x. Для этого составляемъ совокупныя уравненія въ конечныхъ разностяхъ на слѣдующемъ основаніи:

Положимъ, что ладья, въ $x+1$ ходовъ, должна возвратиться на прежнее мѣсто; число ея движеній при такомъ условіи выразится чрезъ u_{x+1}. Допустимъ, что первый ходъ сдѣланъ, и что слѣдовательно ладьѣ остается x ходовъ. Ясно, что первый ходъ представляетъ 14 различныхъ движеній, именно, ладья можетъ стать на который ни есть изъ 14-ти квадратовъ, отмѣченныхъ буквою a на чертежѣ 9. Послѣ перваго хода, ладьѣ останется x ходовъ, относящихся уже ко второму случаю. Но, число движеній ладьи отъ A къ B, когда эти квадраты находятся на одной линіи, изображено выше чрезъ v_x. Слѣдовательно, получимъ первое условіе

$$u_{x+1} = 14 v_x.$$

Положимъ теперь, что ладья, изъ положенія A (чертежъ 10), должна перейти въ положеніе B въ $x+1$ ходовъ. Въ такомъ случаѣ число движеній ея, удовлетворяющихъ этому условію, выразится чрезъ v_{x+1}. Допустимъ теперь, что первый ходъ сдѣланъ; при этомъ первомъ ходѣ могутъ произойти 14 различныхъ движеній ладьи, именно:

1° *одинъ* ходъ отъ A къ Ba (чертежъ 10), приводящій къ первому случаю; 2° *шесть* ходовъ отъ A къ b (тотъ же 10 чертежъ), приводящихъ ко второму случаю, и наконецъ 3° *семь* ходовъ c, относящихся къ третьему случаю. Замѣтивъ сверхъ того, что послѣ этого перваго хода, ладьѣ останется еще x ходовъ, получимъ второе условіе

$$v_{x+1} = u_x + 6 v_x + 7 w_x.$$

Наконецъ, разсмотримъ тотъ случай, когда ладья, въ $x+1$ ходовъ, должна перейти изъ A въ B, предполагая, что эти квадраты не находятся на одной линіи. При первомъ ходѣ ладьи имѣемъ 14 различныхъ движеній, изъ которыхъ *два*, именно b (чертежъ 11), относятся ко второму случаю, а *двѣнадцать*, отмѣченныхъ на томъ же чертежѣ буквою c, относятся къ третьему случаю. И такъ, найдется слѣдующее третье условіе:

$$w_{x+1} = 2 v_x + 12 w_x.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ три совокупныя уравненія, перваго порядка, опредѣляющія искомыя функціи u_x, v_x, w_x. Если второе изъ уравненій

$$\begin{aligned} u_{x+1} &= 14 v_x \\ v_{x+1} &= u_x + 6 v_x + 7 w_x \\ w_{x+1} &= 2 v_x + 12 w_x \end{aligned}$$

помножимъ на неопредѣленный коэффиціентъ λ, а третье на μ, то сложивъ ихъ, получимъ

$$u_{x+1} + \lambda v_{x+1} + \mu w_{x+1} = \lambda\left(u_x + \frac{14+6\lambda+2\mu}{\lambda} v_x + \frac{7\lambda+12\mu}{\lambda} w_x\right).$$

Это уравненіе легко можетъ быть интегрировано положивъ

$$\lambda = \frac{14+6\lambda+2\mu}{\lambda} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{7\lambda+12\mu}{\lambda}; \tag{84}$$

дѣйствительно, взявъ

$$U_x = u_x + \lambda v_x + \mu w_x, \tag{85}$$

оно приметъ слѣдующій, весьма простой видъ:

$$U_{x+1} = \lambda U_x.$$

Подставляя послѣдовательно на мѣсто x числа 1, 2, 3, ..$x-1$, получимъ рядъ уравненій

$$\begin{aligned} U_2 &= \lambda U_1 \\ U_3 &= \lambda U_2 \\ U_4 &= \lambda U_3 \\ &\cdots\cdots \\ U_x &= \lambda U_{x-1}, \end{aligned}$$

чрезъ перемноженіе которыхъ найдется по сокращеніи

$$U_x = \lambda^{x-1} U_1. \tag{86}$$

Для опредѣленія λ исключимъ μ изъ двухъ формулъ (84); получимъ уравненіе третей

степени

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 44\lambda + 168 = 0,$$

корни котораго будутъ

$$\lambda_1 = 6, \qquad \lambda_2 = 14, \qquad \lambda_3 = -2,$$

а соотвѣтственныя имъ значенія для μ

$$\mu_1 = -7, \qquad \mu_2 = 49, \qquad \mu_3 = 1.$$

Для опредѣленія величины U_1, входящей въ формулу (86), замѣчаемъ во первыхъ, что

$$U_1 = u_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 .$$

Съ другой стороны ясно, 1° что $u_1 = 0$, ибо въ одинъ ходъ нельзя съ квадрата A возвратиться на тотъ же квадратъ; 2° $v_1 = 1$, потому что существуетъ только одинъ ходъ ладьи, при которомъ она съ A перейдетъ на B, когда A и B на одной линіи; наконецъ 3° $w_1 = 0$, ибо, въ одинъ ходъ, невозможно изъ A достигнуть B, когда A и B не на одной линіи. И такъ

$$U_1 = \lambda,$$

и слѣдовательно, въ силу формулы (86),

$$U_x = \lambda^x.$$

Но какъ λ имѣетъ три значенія, именно 6, 14, -2, то получимъ для U_x также три значенія. Изобразивъ ихъ чрезъ U'_x, U''_x, U'''_x, будетъ

$$U'_x = 6^x, \qquad U''_x = 14^x, \qquad U'''_x = (-1)^x . 2^x,$$

почему, на основаніи формулы (85), найдутся слѣдующія три уравненія:

$$u_x + 6v_x - 7w_x = 6^x$$
$$u_x + 14v_x + 49w_x = 14^x$$
$$u_x - 2v_x + w_x = (-1)^x . 2^x,$$

изъ которыхъ выведемъ

$$u_x = 2^{x-6}[7^x + 14.3^x + (-1)^x 49]$$
$$v_x = 2^{x-6}[7^x + 6.3^x - (-1)^x 7]$$
$$w_x = 2^{x-6}[7^x - 2.3^x + (-1)^x].$$

Подставляя наконецъ эти величины въ формулы (83), получимъ для искомыхъ вѣроятностей выраженія:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{7^x + 14.3^x + (-1)^x 49}{2^6 . 7^x} \\ q &= \frac{7^x + 6.3^x - (-1)^x 7}{2^6 . 7^x} \\ r &= \frac{7^x - 2.3^x + (-1)^x}{2^6 . 7^x} . \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

Легко видѣть, что вѣроятности p, q, r, относящіяся къ тремъ разсматриваемымъ случаямъ, написаны здѣсь въ убывающемъ порядкѣ, такъ что $p > q > r$. Положивъ, напримѣръ, $x = 5$, получимъ

$$p = \frac{630}{33614}, \qquad q = \frac{871}{33614}, \qquad r = \frac{810}{33614}.$$

Еслибъ неизвѣстно было напередъ, къ которому изъ трехъ случаевъ относится взаимное положеніе двухъ квадратовъ A и B, то для опредѣленія вѣроятности, что ладья изъ A достигнетъ B въ x ходовъ, слѣдовало бы выраженія (87) помножить соотвѣтственно на вѣроятности этихъ трехъ предположеній (N° 4), и потомъ взять сумму найденныхъ произведеній. Легко видѣть, что вѣроятности трехъ случаевъ изобразятся по порядку дробями

$$\frac{1}{64}, \qquad \frac{14}{64}, \qquad \frac{49}{64}.$$

И дѣйствительно, въ первомъ случаѣ, мы изъ 64 квадратовъ шахматной доски выбираемъ только *одинъ* квадратъ, на который ладья должна и возвратиться. Во второмъ, мы можемъ выбрать только квадраты, находящіеся на одной линіи, вертикальной или горизонтальной, съ тѣмъ квадратомъ, который первоначально занятъ ладьею; этихъ квадратовъ будетъ *четырнадцать*. Наконецъ, въ третьемъ случаѣ, исключаются: 1° квадратъ, относящійся къ первому случаю, и 2° *четырнадцать*, относящихся ко второму; слѣдовательно, изъ 64 квадратовъ, остается *сорокъ девять*. Помножая выраженія (87) соотвѣтственно на дроби $\frac{1}{64}$, $\frac{14}{64}$, $\frac{49}{64}$, и взявъ потомъ сумму найденныхъ произведеній, получимъ искомую вѣроятность, именно:

$$\frac{7^x + 14.3^x + (-1)^x 49 + 14(7^x + 6.3^x - (-1)^x 7) + 49(7^x - 2.3^x + (-1)^x)}{2^{12} . 7^x} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}.$$

И такъ, не зная предварительно, какое будетъ взаимное положеніе данныхъ двухъ квадратовъ на шахматной доскѣ, вѣроятность что ладья, въ x ходовъ, перейдетъ съ одного квадрата A на другой B, изобразится постоянною дробью $\frac{1}{64}$. Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ, вѣроятность вовсе не будетъ зависѣть отъ числа ходовъ x, въ чёмъ впрочемъ легко удостовѣриться и простымъ разсужденіемъ.

ГЛАВА VII.

О ЗАКОНАХЪ ВѢРОЯТНОСТИ ПРИ НЕОПРЕДѢЛЕННОМЪ ЧИСЛѢ СТАТОЧНОСТЕЙ.

52. Во всѣхъ вопросахъ, рѣшенныхъ въ предъидущихъ Главахъ, число статочностей, благопріятствующихъ ожидаемому событію, опредѣлялось условіями задачи, и слѣдовательно вѣроятность того событія могла быть выведена непосредственно. Но часто случается, и преимущественно въ вопросахъ наиболѣе важныхъ по своимъ приложеніямъ къ наукамъ наблюдательнымъ, что число статочностей бываетъ неопредѣленно, почему и самая вѣроятность, въ строгомъ смыслѣ, остается неизвѣстною. Въ такихъ случаяхъ, наблюденіе послѣдовательныхъ появленій простыхъ событій даетъ возможность постепенно приближаться къ ихъ вѣроятностямъ; и мы увидимъ, что по мѣрѣ того, какъ число наблюденій становится болѣе и болѣе значительнымъ, тѣмъ точнѣе можемъ получить и самую вѣроятность ожидаемаго событія.

Положимъ, что имѣемъ сосудъ, заключающій въ себѣ 5 шаровъ; изъ нихъ одни бѣлые, а остальные чёрные, но въ неизвѣстномъ числѣ. Вынимаемъ 5 разъ сряду по одному шару, и каждый разъ, отмѣтивъ его цвѣтъ, кладемъ обратно въ сосудъ. Допустимъ, что такимъ образомъ извлекли 3 бѣлые и 2 чёрные шара. Можно сдѣлать слѣдующія четыре предположенія относительно числа бѣлыхъ и чёрныхъ шаровъ, находящихся въ сосудѣ*):

*) Если бы, согласно съ *Кондорсетомъ*, мы не принимали въ расчётъ наблюденныхъ событій, то къ этимъ четыремъ предположеніямъ могли бы присовокупить еще два, а именно: шары, заключающіеся въ сосудѣ или *всѣ бѣлые*, или *всѣ чёрные*. Но, по причинѣ наблюденнаго появленія обоихъ цвѣтовъ, вѣроятность каждаго изъ этихъ двухъ предположеній равна нулю, почему окончательный результатъ нисколько не перемѣнится.

1°)	4 *бѣлые шара.*	1 *чёрный.*
2°)	3	2 .....
3°)	2	3 .....
4°)	1	4 .....

Если изобразимъ чрезъ p и q вѣроятности появленія бѣлаго и чёрнаго шара, то получимъ слѣдующія значенія для p и q, соотвѣтствующія этимъ четыремъ предположеніямъ:

Для 1-го *предположенія:* $p = \frac{4}{5}$, $q = \frac{1}{5}$

... 2-го .... $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{2}{5}$

... 3-го .... $p = \frac{2}{5}$, $q = \frac{3}{5}$

... 4-го .... $p = \frac{1}{5}$, $q = \frac{4}{5}$.

Вѣроятность сложнаго событія, именно, трехъ-кратнаго появленія бѣлаго и двукратнаго чёрнаго шара, опредѣляемая третьимъ членомъ разложенія $(p+q)^5$, будетъ $10p^3q^2$. Слѣдовательно, въ настоящемъ случаѣ, положивъ $10p^3q^2 = P$, получимъ

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Въ 1-омъ предположеніи:} & P = \frac{128}{625} \\ \text{... 2-омъ ....} & P = \frac{216}{625} \\ \text{... 3-емъ ....} & P = \frac{144}{625} \\ \text{... 4-омъ ....} & P = \frac{32}{625} \end{array}\right\} \quad (88)$$

Нѣтъ никакого сомнѣнія, что 2-ое предположеніе, соотвѣтствующее наибольшему значенію вѣроятности наблюденнаго сложнаго событія, будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и правдоподобнѣйшимъ изъ четырехъ. За вторымъ, по степени правдоподобія, слѣдуютъ 3-е, 1-ое и наконецъ 4-ое предположеніе, доставляющее наименьшее значеніе $\frac{32}{625}$ для P.

Весьма естественно допустить, что правдоподобія, или, что̀ всё равно, вѣроятности предположеній или причинъ, пропорціональны вѣроятностямъ наблюденныхъ событій, вычисленнымъ при этихъ самыхъ предположеніяхъ. Такъ въ приведенномъ сей-часъ примѣрѣ, вѣроятности четырехъ предположеній соотвѣтственно пропорціональны дробямъ $\frac{128}{625}$, $\frac{216}{625}$, $\frac{144}{625}$, $\frac{32}{625}$, или просто ихъ числителямъ 128, 216, 144 и 32. Изобразивъ чрезъ λ коэффиціентъ пропорціональности, вѣроятности четырехъ предположеній будутъ по порядку:

$$128\lambda, \quad 216\lambda, \quad 144\lambda, \quad 32\lambda.$$

Но какъ одно изъ четырехъ предположеній непремѣнно должно состояться, то сумма этихъ четырехъ вѣроятностей равна единицѣ, въ слѣдствіе чего получимъ $\lambda = \frac{1}{520}$; отсюда заключаемъ, что вѣроятности четырехъ предположеній будутъ соотвѣтственно:

$$\frac{128}{520}, \quad \frac{216}{520}, \quad \frac{144}{520}, \quad \frac{32}{520}.$$

Легко видѣть, что для полученія этихъ четырехъ дробей, стоитъ только раздѣлить последовательно каждое изъ значеній P, доставляемыхъ равенствами (88), на сумму тѣхъ же четырехъ значеній. Распространяя это предложеніе на общій случай, мы въ правѣ будемъ заключить, что *вѣроятность какого либо предположенія, равняется вѣроятности наблюденнаго событія, вычисленной при томъ же предположеніи, и раздѣленной на сумму вѣроятностей этого самаго событія, относящуюся ко всѣмъ возможнымъ предположеніямъ.*

Подобнымъ образомъ увидимъ, что *вѣроятность нѣсколькихъ предположеній, разсматриваемыхъ въ совокупности, равняется суммѣ вѣроятностей событій, относящейся къ этой совокупности предположеній, раздѣленной на сумму вѣроятностей событія при всѣхъ возможныхъ предположеніяхъ.*

Для поясненія послѣдняго правила, положимъ, въ предъидущемъ примѣрѣ, желаемъ опредѣлить вѣроятность, что въ сосудѣ находится болѣе бѣлыхъ шаровъ, чѣмъ чёрныхъ. При такомъ условіи имѣемъ два предположенія, совмѣстныя съ наблюденнымъ событіемъ, именно:

4 *бѣлые шара* и 1 *чёрный;* 3 *бѣлые шара* и 2 *чёрные;*

соотвѣтственныя же вѣроятности наблюденнаго событія будутъ:

$$\frac{128}{625}, \quad \frac{216}{625}.$$

Слѣдовательно, вѣроятность предположенія относительно излишества бѣлыхъ шаровъ предъ чёрными, изобразится дробью

$$\frac{\frac{128}{625}+\frac{216}{625}}{\frac{128}{625}+\frac{216}{625}+\frac{144}{625}+\frac{32}{625}} = \frac{344}{520} = \frac{43}{65}.$$

53. По найденнымъ вѣроятностямъ предположеній, легко опредѣлить и вѣроятности новыхъ событій. Для этого основываемся на правилѣ, относящемся къ сложнымъ вѣроятностямъ. Положимъ, что въ предъидущемъ же примѣрѣ, ищемъ вѣроятность извлеченія бѣлаго шара послѣ вынутыхъ уже 3 бѣлыхъ и 2 чёрныхъ. Допустивъ первое изъ четырехъ предположеній, вѣроятность извлеченія бѣлаго шара будетъ $\frac{4}{5}$, а вѣроятность предположенія $\frac{128}{520}$. Сложная вѣроятность, что 1-ое предположеніе имѣетъ мѣсто, и что при томъ же предположеніи шестой выдернутый шаръ будетъ бѣлый, выразится произведеніемъ $\frac{128}{520}\cdot\frac{4}{5}$. При 2-омъ предположеніи получится точно такимъ образомъ дробь $\frac{216}{520}\cdot\frac{3}{5}$, при 3-емъ, $\frac{144}{520}\cdot\frac{2}{5}$, и наконецъ при 4-омъ, $\frac{32}{520}\cdot\frac{1}{5}$. Сумма

$$\frac{128}{520}\cdot\frac{4}{5}+\frac{216}{520}\cdot\frac{3}{5}+\frac{144}{520}\cdot\frac{2}{5}+\frac{32}{520}\cdot\frac{1}{5}=\frac{37}{65}$$

сложныхъ вѣроятностей, изобразитъ вѣроятность новаго событія.

Если бы ожидаемое новое событіе было появленіе чёрнаго шара при шестомъ извлеченіи, то вѣроятность этой случайности опредѣлилась бы совокупностію дробей

$$\frac{128}{520}\cdot\frac{1}{5}+\frac{216}{520}\cdot\frac{2}{5}+\frac{144}{520}\cdot\frac{3}{5}+\frac{32}{520}\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{65}.$$

Сумма $\frac{37}{65}+\frac{28}{65}$ найденныхъ двухъ вѣроятностей, равна единицѣ, какъ и должно быть, ибо достовѣрно, что извлеченный шаръ будетъ непремѣнно или бѣлый, или чёрный.

И такъ, *чтобъ получить вѣроятность новаго событія, простаго или сложнаго, должно предварительно разыскать по наблюденнымъ событіямъ всѣ возможныя предположенія или причины ихъ появленія, и опредѣлить вѣроятности этихъ причинъ; потомъ, каждую изъ найденныхъ вѣроятностей умножить на соотвѣтственную вѣроятность ожидаемаго событія. Сумма всѣхъ подобныхъ произведеній изобразитъ вѣроятность новаго событія.*

54. Въ разсмотрѣнномъ предъ симъ примѣрѣ, число предположеній было ограничено самыми условіями вопроса. Но, въ естественныхъ явленіяхъ, число предположеній или причинъ должно вообще допускать безконечнымъ; дѣйствительно, когда для опредѣленія вѣроятности какого либо простаго событія, рѣшительно не имѣемъ никакихъ непосредственныхъ данныхъ, а одни только наблюденія надъ его появленіемъ или непоявленіемъ, то эта вѣроятность, разсматриваемая *a priori*, можетъ принимать, по нашему невѣдѣнію, всѣ возможныя значенія отъ 0 до 1. Каждому изъ этихъ безчисленныхъ значеній соотвѣтствуетъ причина, и поэтому самое число причинъ или предположеній будетъ безконечное.

На основаніи этого замѣчанія, а равно и правилъ, предложенныхъ въ предъидущихъ двухъ нумерахъ, можно вывести общія формулы, относящіяся къ опредѣленію вѣроятностей *a posteriori*. Но, для бо́льшей вразумительности, изложимъ сперва подробное рѣшеніе одного вопроса, отъ котораго можно будетъ перейти безъ малѣйшаго труда къ упоминаемымъ общимъ формуламъ.

Положимъ, что при полномъ числѣ m+n *наблюденій, явленіе* A *повторилось* m *разъ, а противуположное ему* B, n *разъ. Пусть будетъ* x *неизвѣстная вѣроятность простаго явленія* A. *Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что величина* x *заключается между данными двумя предѣлами* a *и* a'.

Здѣсь, какъ и выше, замѣчаемъ, что въ вопросѣ не заключается никакихъ данныхъ, изъ которыхъ можно бы было вывести *a priori* простую вѣроятность x явленія A. При такой неизвѣстности, эту вѣроятность должно считать способною принимать всѣ возможныя величины, заключающіяся между 0 и 1. И такъ, разложивъ единицу или достовѣрность на безчисленное множество μ безконечно малыхъ частей ε, получимъ $1=\mu\varepsilon$, и рядъ

$$0,\quad \varepsilon,\quad 2\varepsilon,\quad 3\varepsilon,\quad 4\varepsilon,\ldots\ldots(\mu-1)\varepsilon=1-\varepsilon,\quad 1$$

изобразитъ всѣ возможныя значенія простой вѣроятности x событія A, а рядъ

$$1,\ 1-\varepsilon,\ 1-2\varepsilon,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\varepsilon,\quad \varepsilon,\quad 0$$

то же самое въ разсужденіи B. Сверхъ того, такъ какъ каждой величинѣ x соотвѣтствуетъ предположеніе, то и самое число предположеній будетъ безконечное. Въ настоящемъ случаѣ наблюденное явленіе есть m-кратное повтореніе A, и n-кратное появленіе B; слѣдовательно, сложныя вѣроятности наблюденнаго событія, соотвѣтствующія всѣмъ возможнымъ предположеніямъ, будутъ

$$0,\quad N\varepsilon^m(1-\varepsilon)^n,\quad N(2\varepsilon)^m(1-2\varepsilon)^n,\quad N(3\varepsilon)^m(1-3\varepsilon)^n,\ldots\ldots N(1-\varepsilon)^m\varepsilon^n,\quad 0, \tag{89}$$

гдѣ, для краткости, положили

$$\frac{1.2.3\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}=N.$$

Въ слѣдствіе правила, выраженнаго въ концѣ N° 52, сумма членовъ, составляющихъ рядъ (89), изобразитъ знаменатель дроби, опредѣляющей искомую вѣроятность. Пусть будетъ v этотъ знаменатель; получимъ

$$v=N\Big[\varepsilon^m(1-\varepsilon)^n+(2\varepsilon)^m(1-2\varepsilon)^n+(3\varepsilon)^m(1-3\varepsilon)^n+\ldots+(1-\varepsilon)^m\varepsilon^n\Big].$$

Легко видѣть, что сумма, заключающаяся подъ квадратными скобками, изображаетъ среднюю ариѳметическую всѣхъ возможныхъ значеній функціи $x^m(1-x)^n$ отъ $x=0$ до $x=1$, раздѣленную на безконечно малую величину ε. Дѣйствительно, если къ этой суммѣ, оканчивающейся членомъ $(1-\varepsilon)^m\varepsilon^n$, прибавимъ дополнительный членъ 0, соотвѣтствующій предположенію $x=0$, то всѣхъ членовъ будетъ μ, и средняя ариѳметическая, которую означимъ знакоположеніемъ $\overset{x=1}{\underset{x=0}{M}}$, представится въ видѣ

$$\frac{\varepsilon^m(1-\varepsilon)^n+(2\varepsilon)^m(1-2\varepsilon)^n+(3\varepsilon)^m(1-3\varepsilon)^n+\ldots+(1-\varepsilon)^m\varepsilon^n}{\mu}=\overset{x=1}{\underset{x=0}{M}};$$

по причинѣ же $\mu=\frac{1}{\varepsilon}$, найдется, какъ сказано выше,

$$\varepsilon^m(1-\varepsilon)^n+(2\varepsilon)^m(1-2\varepsilon)^n+\ldots+(1-\varepsilon)^m\varepsilon^n=\frac{\overset{x=1}{\underset{x=0}{M}}}{\varepsilon},$$

откуда

$$v=\frac{N.\overset{x=1}{\underset{x=0}{M}}}{\varepsilon}.$$

Точно такимъ образомъ получится и числитель искомой вѣроятности. Означимъ его чрезъ u. Здѣсь должно разсматривать только тѣ предположенія, которыя доставляютъ для x значенія, заключающіяся между предѣлами a и a'. Рядъ этихъ значеній будетъ

$$a,\ a+\varepsilon,\ a+2\varepsilon,\ a+3\varepsilon,\ldots\ldots a'-\varepsilon=a+\Big(\frac{a'-a}{\varepsilon}-1\Big)\varepsilon,$$

если условимся исключить послѣднее, именно $x=a'$. Ясно, что подобное исключеніе не можетъ ввести въ дальнѣйшіе результаты никакой погрѣшности, потому что предпослѣдняя разсматриваемая величина $x=a'-\varepsilon$ разнствуетъ отъ a' безконечно малымъ количествомъ ε.

Принявъ члены предъидущаго ряда за послѣдовательныя величины вѣроятности x событія A, вѣроятность $1-x$ противоположнаго явленія B получитъ слѣдующія значенія:

$$1-a,\ 1-a-\varepsilon,\ 1-a-2\varepsilon,\ 1-a-3\varepsilon,\ldots 1-a'+\varepsilon=1-a-\Big(\frac{a'-a}{\varepsilon}-1\Big)\varepsilon.$$

На такомъ основаніи, сложныя вѣроятности наблюденнаго событія, соотвѣтствующія всѣмъ предположеніямъ, при которыхъ x заключается между предѣлами a и a', изобразятся членами ряда

$$Na^m(1-a)^n,\ N(a+\varepsilon)^m(1-a-\varepsilon)^n,\ N(a+2\varepsilon)^m(1-a-2\varepsilon)^n,\ldots N(a'-\varepsilon)^m(1-a'+\varepsilon)^n,$$

число которыхъ очевидно равно $\frac{a'-a}{\varepsilon}$. Сумма этихъ членовъ опредѣлитъ величину u. И такъ

$$u=N\Big[a^m(1-a)^n+(a+\varepsilon)^m(1-a-\varepsilon)^n+\ldots+(a'-\varepsilon)^m(1-a'+\varepsilon)^n\Big].$$

Означимъ, какъ выше, знакоположеніемъ $\overset{x=a'}{\underset{x=a}{M}}$ среднюю ариѳметическую величину всѣхъ возможныхъ значеній, принимаемыхъ функціею $x^m(1-x)^n$ между предѣлами a и a' перемѣнной x. Эта средняя будетъ равна суммѣ, заключающейся подъ квадратными скобками, раздѣленной на число членовъ, которое, какъ было сей-часъ замѣчено, равно $\frac{a'-a}{\varepsilon}$.

Слѣдовательно

$$\overset{x=a'}{\underset{x=a}{M}}=\frac{a^m(1-a)^n+(a+\varepsilon)^m(1-a-\varepsilon)^n+\ldots+(a'-\varepsilon)^m(1-a'+\varepsilon)^n}{\frac{a'-a}{\varepsilon}},$$

откуда

$$a^m(1-a)^n+(a+\varepsilon)^m(1-a-\varepsilon)^n+\ldots+(a'-\varepsilon)^m(1-a'+\varepsilon)^n=\frac{(a'-a)\underset{x=a}{\overset{x=a'}{M}}}{\varepsilon},$$

или

$$u=\frac{N(a'-a)\underset{x=a}{\overset{x=a'}{M}}}{\varepsilon}.$$

Но мы изобразили чрезъ $\frac{u}{v}$ вѣроятность, что возможность x простаго явленія A заключается между предѣлами a и a'; поэтому, положивъ $p=\frac{u}{v}$, найдется

$$p=\frac{(a'-a)\underset{x=a}{\overset{x=a'}{M}}}{\underset{x=0}{\overset{x=1}{M}}}.$$

Вспомнимъ теперь, что опредѣленный интегралъ равняется среднему ариѳметическому значенію подъинтегральной функціи между данными двумя предѣлами, помноженному на разность предѣловъ [ПРИМѢЧАНІЕ IX, §. 1]. Слѣдовательно

$$\int_a^{a'} x^m(1-x)^n dx=(a'-a)\underset{x=a}{\overset{x=a'}{M}}, \quad \int_0^1 x^m(1-x)^n dx=(1-0)\underset{x=0}{\overset{x=1}{M}}=\underset{x=0}{\overset{x=1}{M}},$$

и наконецъ

$$p=\frac{\int_a^{a'} x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}. \qquad (90)$$

Ясно, что если бы вмѣсто m-кратнаго и n-кратнаго повторенія событій A и B, разсматривали какое ни есть ихъ совокупленіе, то изобразивъ чрезъ y вѣроятность этого совокупленія, выраженную *a priori* въ функціи перемѣнной x, получили бы для опредѣленія искомой вѣроятности p общую формулу:

$$p=\frac{\int_a^{a'} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx}. \qquad (91)$$

55. Перейдемъ теперь къ опредѣленію вѣроятности будущихъ событій, выводимой изъ наблюденныхъ. Положимъ напримѣръ какъ и выше, что при полномъ числѣ $m+n$ наблюденій, событіе A повторилось m разъ, а B, n разъ. Означивъ чрезъ x вѣроятность простаго событія A, выраженіе

$$\frac{1.2.3\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}x^m(1-x)^n=Nx^m(1-x)^n$$

изобразитъ соотвѣтственную вѣроятность наблюденнаго событія. Для полученія вѣроятности значенія x, должно (N° 52) раздѣлить $Nx^m(1-x)^n$ на сумму всѣхъ возможныхъ

величинъ, принимаемыхъ этимъ произведеніемъ при измѣненіи перемѣнной x между предѣлами 0 и 1. Эта сумма, въ слѣдствіе предъидущаго N°, равна средней ариѳметической $\underset{x=0}{\overset{x=1}{M}}$, раздѣленной на величину ε, которую можно принять за элементъ вѣроятности x, и поэтому замѣнить дифференціаломъ dx. Но такъ какъ $\underset{x=0}{\overset{x=1}{M}}=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, то, по сокращеніи на N, получимъ для вѣроятности значенія x дробь

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}. \qquad (92)$$

И такъ, вѣроятность предположенія, что x есть точное выраженіе простой вѣроятности явленія A, будетъ всегда количествомъ безконечно малымъ, что̀ вполнѣ согласуется съ здравыми понятіями объ этомъ предметѣ. Дѣйствительно, какъ бы велико не было число наблюденій, нельзя заключить изъ нихъ, что вѣроятность какого ни есть наблюденнаго событія будетъ именно такая-то дробь, а не другая, весьма мало разствующая отъ допущенной первоначально. Вопросъ принимаетъ совсѣмъ другой видъ, когда разсматривается вѣроятность, что значеніе x заключается между данными предѣлами, даже довольно тѣсными. Эта вѣроятность, при конечной разности предѣловъ, будетъ сама конечная, и опредѣлится уравненіемъ (90), или, вообще, формулою (91). Для поясненія сказаннаго, отсылаемъ покамѣстъ къ примѣрамъ, приведеннымъ въ N° 59 этой Главы.

На такомъ основаніи положимъ, что послѣ первыхъ $m+n$ наблюденій, производятъ $p+q$ новыхъ испытаній; требуется опредѣлить вѣроятность, что при этихъ $p+q$ испытаніяхъ, событіе A повторится p разъ, а B, q разъ. Вѣроятность новаго сложнаго событія, выраженная въ функціи x, будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}x^p(1-x)^q.$$

Но, въ силу правила, оканчивающаго N° 53, для полученія искомой вѣроятности, которую изобразимъ чрезъ P, надлежитъ: вѣроятность предположенія

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

помножить на вѣроятность новаго событія

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}x^p(1-x)^q,$$

и потомъ взять сумму всѣхъ подобныхъ произведеній. Эта сумма, очевидно, должна быть распространена на всѣ возможныя значенія x отъ $x=0$, до $x=1$. Замѣтивъ, что знаменатель, общій всѣмъ этимъ произведеніямъ, будетъ число постоянное, получимъ

$$P=\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}\cdot\frac{\int_0^1 x^{m+p}(1-x)^{n+q}dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}. \tag{93}$$

Вообще, изобразимъ чрезъ y вѣроятность наблюденнаго сложнаго событія, а чрезъ z вѣроятность будущаго событія, независимо отъ наблюденій; y и z будутъ извѣстныя фунціи вѣроятности x простаго событія. Разсуждая точно такъ какъ выше, мы увидимъ, что основываясь на наблюденномъ сложномъ событіи, вѣроятность будущаго событія, которую изобразимъ чрезъ P, опредѣлится общею формулою

$$P=\frac{\int_0^1 yzdx}{\int_0^1 ydx}. \tag{94}$$

Найденныя нами формулы приводятъ къ многоразличнымъ, весьма важнымъ приложеніямъ. Въ слѣдующихъ Главахъ употребленіе ихъ будетъ пояснено рѣшеніемъ любопытныхъ вопросовъ. Здѣсь ограничимся общими замѣчаніями о слѣдствіяхъ, проистекающихъ изъ этихъ формулъ, и нѣсколькими легкими численными примѣрами.

56. Первое, весьма важное замѣчаніе относительно вѣроятностей, опредѣляемыхъ *a posteriori*, состоитъ въ томъ, что теорема *Якова Бернулли*, доказанная въ Главѣ II для вѣроятностей, выводимыхъ *a priori*, имѣетъ мѣсто и въ настоящемъ случаѣ. Разсмотримъ сперва формулу

$$p=\frac{\int_a^{a'} x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx},$$

найденную въ N° 54, и опредѣляющую вѣроятность, что x заключается между предѣлами a и a'. Теорема состоитъ въ томъ, что съ увеличеніемъ числа $m+n$ наблюденій, вѣроятность x простаго событія будетъ болѣе и болѣе приближаться къ дроби $\frac{m}{m+n}$. Положимъ, для простоты, что эта дробь есть средняя ариѳметическая между данными двумя предѣлами, въ слѣдствіе чего будетъ

$$a=\frac{m}{m+n}-\omega,\qquad a'=\frac{m}{m+n}+\omega,$$

разумѣя подъ 2ω промежутокъ между a и a', или, что̀ всё равно, разность $a'-a$. Если примемъ

$$x=\frac{m}{m+n}+z,\qquad \text{откуда } 1-x=\frac{n}{m+n}-z,$$

то предѣлы относительно новой перемѣнной z будутъ: для $x=a$, $z=-\omega$; для $x=a'$, $z=+\omega$. На такомъ основаніи числитель $\int_a^{a'} x^m(1-x)^n dx$ выраженія p, приметъ видъ

$$\int_{-\omega}^{+\omega}\left(\frac{m}{r}+z\right)^m\left(\frac{n}{r}-z\right)^n dz,\quad \text{гдѣ } r=m+n.$$

Для опредѣленія приближенной величины этого интеграла, который для простоты изобразимъ чрезъ u, пишемъ его сперва въ видѣ

$$u=\frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\int_{-\omega}^{+\omega}\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m\left(1-\frac{rz}{n}\right)^n dz;$$

потомъ, замѣняемъ степени двучленныхъ выраженій показательными функціями слѣдующимъ образомъ:

$$\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m=e^{m\log.(1+\frac{rz}{m})}$$

$$\left(1-\frac{rz}{n}\right)^n=e^{n\log.(1-\frac{rz}{n})};$$

по причинѣ же

$$\log.\left(1+\frac{rz}{m}\right)=\frac{rz}{m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2z^2}{m^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{r^3z^3}{m^3}-\ldots\ldots$$

$$\log.\left(1-\frac{rz}{n}\right)=-\frac{rz}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2z^2}{n^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{r^3z^3}{n^3}-\ldots\ldots$$

получимъ

$$\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m\left(1-\frac{rz}{n}\right)^n=e^{-\frac{r^2z^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{r^3z^3}{3}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)-\ldots}$$

Но мы увидимъ далѣе, что когда m и n весьма значительныя числа, то членъ $\frac{r^3z^3}{3}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$ и слѣдующіе за нимъ, по малости своей, могутъ быть откинуты; слѣдовательно, замѣтивъ что $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{r}{mn}$, найдется просто

$$u=\frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\int_{-\omega}^{+\omega} e^{-\frac{r^3z^2}{2mn}}\,dz.$$

Если положимъ теперь

$$\frac{r^3z^2}{2mn}=t^2,\qquad \text{откуда}\quad t=\frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{2mn}}\cdot z,$$

и вмѣсто $-\omega$ и $+\omega$ поставимъ предѣлы $-\omega\cdot\frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{2mn}}=-T$, и $+\omega\cdot\frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{2mn}}=+T$, относящіеся къ перемѣнной t, то получимъ

$$u=\frac{m^m.n^n}{r^{m+n}}\cdot\frac{\sqrt{2mn}}{r\sqrt{r}}\int_{-T}^{+T} e^{-t^2}dt.$$

Наконецъ, наблюдая, что подъинтегральная функція не перемѣняетъ знака, мы можемъ, удвоивъ интегралъ, замѣнить нулемъ нижній предѣлъ; поэтому имѣемъ

$$u=2\cdot\frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\cdot\frac{\sqrt{2mn}}{r\sqrt{r}}\int_0^T e^{-t^2}dt. \tag{95}$$

Таковъ числитель дроби, изображающей искомую вѣроятность p. Для опредѣленія ея

знаменателя $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, который означимъ чрезъ ϱ, замѣтимъ, что интегрированіе по частямъ приведетъ насъ къ слѣдующему равенству:

$$\int x^m(1-x)^n dx = -\frac{x^m(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m}{n+1}\int x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx.$$

Взявъ интегралы между предѣлами 0 и 1, получимъ

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx.$$

Подставивъ $(1-x)^n - x(1-x)^n$ на мѣсто $(1-x)^{n+1}$, будетъ

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n dx - \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^m(1-x)^n dx,$$

откуда

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n dx.$$

Подобнымъ образомъ найдется

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n dx = \frac{m-1}{m+n}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^n dx$$

$$\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^n dx = \frac{m-2}{m+n-1}\int_0^1 x^{m-3}(1-x)^n dx$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int_0^1 x(1-x)^n dx = \frac{1}{n+2}\int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{(n+2)(n+1)}.$$

Слѣдовательно

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{1.2.3\dots m}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m+1)}. \qquad (96)$$

По причинѣ значительности чиселъ m и n, непосредственное вычисленіе второй части этой формулы практически невозможно. Чтобы найти приближенную ея величину, мы употребимъ формулу (18) [ГЛАВА II, N° 21], въ слѣдствіе которой имѣемъ

$$1.2.3\dots m = \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}.$$

Съ другой стороны,

$$(n+1)(n+2)(n+3)\dots\dots(n+m+1) = \frac{1.2.3\dots(n+m+1)}{1.2.3\dots n};$$

опредѣляя числитель и знаменатель послѣдней дроби по той же формулѣ (18), получимъ

$$1.2.3\dots(n+m+1) = \left(\frac{n+m+1}{e}\right)^{n+m+1}\cdot\sqrt{2\pi(n+m+1)}$$

$$1.2.3\dots n = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n},$$

и подставляя эти величины въ уравненіе (96), найдемъ

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = e\cdot\frac{m^m n^n\sqrt{2\pi mn}}{(n+m+1)^{n+m+\frac{3}{2}}}.$$

Это выраженіе можетъ быть еще упрощено; дѣйствительно, положивъ какъ выше $n+m=r$, получимъ послѣдовательно

$$(n+m+1)^{n+m+\frac{3}{2}} = (r+1)^{r+\frac{3}{2}} = r^{r+\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r+\frac{3}{2}}.$$

Но

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r+\frac{3}{2}} = \left(1+\frac{1}{r}\right)^r\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\frac{3}{2}};$$

когда r весьма значительное число, то множитель $\left(1+\frac{1}{r}\right)^r$ будетъ весьма мало разнствовать отъ основанія e Неперовой системы логариѳмовъ; это очевидно слѣдуетъ изъ разложенія двучленнаго количества $\left(1+\frac{1}{r}\right)^r$; ежели напишемъ это разложеніе въ видѣ

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)^r = 1+1+\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{1}{1.2}+\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right)\cdot\frac{1}{1.2.3}+\dots,$$

то увидимъ, что оно, по мѣрѣ увеличенія r, приближается къ суммѣ

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots\dots = e.$$

Что же касается до втораго множителя $\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$ то онъ, безъ ощутительной погрѣшности, можетъ быть замѣненъ единицею, потому что разложеніе

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\frac{3}{2}} = 1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{r}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{r^2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{r^3}+\dots\dots$$

тѣмъ менѣе разнствуетъ отъ 1, чѣмъ r будетъ значительнѣе. И такъ, предполагая r весьма большимъ, будемъ имѣть очень приблизительно

$$(n+m+1)^{n+m+\frac{3}{2}} = (n+m)^{n+m+1}\cdot\sqrt{n+m}\cdot e,$$

въ силу чего получится слѣдующее, приближенное же значеніе интеграла:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n+1}}\cdot\sqrt{\frac{2\pi mn}{m+n}}. \qquad (97)$$

Опредѣливъ такимъ образомъ числитель и знаменатель дроби, выражающей вѣроятность p, остается только раздѣлить величину (95) на (97); получимъ просто

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt,$$

гдѣ

$$T = \frac{\omega r\sqrt{r}}{\sqrt{2mn}} = \frac{\omega(m+n)\sqrt{m+n}}{\sqrt{2mn}}.$$

И такъ, вѣроятность, что x заключается между предѣлами

$$\frac{m}{m+n}-\omega \quad \text{и} \quad \frac{m}{m+n}+\omega,$$

равна $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt$. Но мы знаемъ, что величина интеграла $\int_0^T e^{-t^2}dt$, даже при пос-

редственномъ увеличеніи T, непрестанно приближается къ предѣлу $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, котораго, въ строгомъ смыслѣ, достигаетъ при $T=\infty$ [ПРИМѢЧАНІЕ IV, §§ 1 и 2]. Слѣдовательно, вѣроятность p, по мѣрѣ увеличенія T, будетъ быстро приближаться къ единицѣ.

Посмотримъ теперь, какова должна быть величина ω, чтобы p удовлетворяло этому условію. Положимъ, желаемъ достигнуть вѣроятности p, равной $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-t^2}dt$, принимая напримѣръ $\tau=3$, 4, 5..., и увеличивая это число по произволенію; въ такомъ случаѣ будетъ

$$\tau=\frac{\omega r\sqrt{r}}{\sqrt{2mn}}=\omega\sqrt{\frac{r}{2}}.\sqrt{\frac{r^2}{mn}},$$

откуда, замѣтивъ что $r=m+n$,

$$\omega=\tau\sqrt{2}.\sqrt{\frac{m}{m+n}.\frac{n}{m+n}}.\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Но какъ множитель $\sqrt{\frac{m}{m+n}.\frac{n}{m+n}}$ меньше единицы, и даже не можетъ превзойти дробь $\frac{1}{2}$, что̀ очевидно слѣдуетъ изъ преобразованія

$$\sqrt{\frac{m}{m+n}.\frac{n}{m+n}}=\sqrt{\frac{1}{4+\frac{(m-n)^2}{mn}}},$$

то и заключаемъ, что ω можно принимать за количество одного порядка съ $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

На такомъ основаніи весьма легко показать, что опущенные выше члены $\frac{r^3z^3}{3m^2}$, $\frac{r^3z^3}{3n^2}\cdots$ или $\frac{r^3\omega^3}{3m^2}$, $\frac{r^3\omega^3}{3n^2}\cdots$, въ отношеніи къ двумъ удержаннымъ $\frac{r^2\omega^2}{2m}$, $\frac{r^2\omega^2}{2n}$, будутъ порядка $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Слѣдовательно, условившись напередъ откидывать предъ обыкновенными величинами количества порядка $\frac{1}{\sqrt{r}}$, которыя при значительномъ r будутъ весьма малы, члены $\frac{r^3\omega^3}{3m^2}$, $\frac{r^3\omega^3}{3n^2}\cdots$ не войдутъ уже въ предъидущія формулы. Теперь останется только показать, что дѣйствительно $\frac{r^3\omega^3}{3m^2}$, $\frac{r^3\omega^3}{3n^2}\cdots$ будутъ величинами порядка $\frac{1}{\sqrt{r}}$ въ разсужденіи $\frac{r^2\omega^2}{2m}$, $\frac{r^2\omega^2}{2n}$. Для этого, разсмотримъ отношенія

$$\frac{r^3\omega^3}{3m^2}:\frac{r^2\omega^2}{2m}=\frac{2r}{3m}.\omega,\qquad \frac{r^3\omega^3}{3m^2}:\frac{r^2\omega^2}{2n}=\frac{2nr}{3m^2}.\omega.$$

Допустимъ, какъ въ N° 22, что m и n сравнимы между собой, или, иначе, что ни одна изъ двухъ дробей $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$ не есть величина чрезвычайно малая, а поэтому ни одно изъ выраженій

$$\frac{r}{m}=\frac{m+n}{m},\quad \frac{nr}{m^2}=\frac{n}{m}.\frac{m+n}{m}$$

не обращается въ число весьма большое. При такомъ условіи прямо заключаемъ, что предъидущія два отношенія пропорціональны ω, то есть количеству порядка $\frac{1}{\sqrt{r}}$, что̀ имѣли въ виду показать. То̀ же самое докажется и въ разсужденіи члена $\frac{r^3\omega^3}{3n^2}$; дальнѣйшіе же члены будутъ, очевидно, еще меньше въ отношеніи къ двумъ удержаннымъ.

Сообразивъ сказанное, выводимъ слѣдующія заключенія: 1° съ увеличеніемъ числа r испытаній, промежутокъ 2ω можетъ быть уменьшаемъ, не ослабляя притомъ вѣроятности p; 2° не уменьшая промежутка 2ω, по увеличивая число испытаній, вѣроятность p будетъ возрастать и постепенно приближаться къ единицѣ или достовѣрности. На такомъ основаніи, и замѣтивъ что значеніе $x=\frac{m}{m+n}$ соотвѣтствуетъ наибольшей величинѣ произведенія $x^m(1-x)^n$, мы въ правѣ будемъ заключить, что правдоподобнѣйшая величина x есть $\frac{m}{m+n}$, именно та̀, при которой наблюденное событіе становится навѣроятнѣйшимъ. Увеличивая неопредѣленно число появленій простыхъ событій, изъ которыхъ составлено наблюденное, мы можемъ сблизить по произволенію предѣлы $\frac{m}{m+n}-\omega$ и $\frac{m}{m+n}+\omega$, и въ то̀ же время увеличить вѣроятность p, что значеніе x заключается между этими предѣлами. При безконечномъ числѣ испытаній, промежутокъ 2ω исчезаетъ, и вѣроятность p, въ строгомъ смыслѣ, обращается въ единицу, то есть въ достовѣрность.

57. Разсмотримъ теперь слѣдствія, проистекающія изъ формулы (93), въ которой величина P изображаетъ вѣроятность, что по наблюденному числу m появленій событія A, и n, событія B, въ слѣдующія $p+q$ испытаній, A повторится p разъ, а B, q разъ. Для вычисленія формулы

$$P=\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}.\frac{\int_0^1 x^{m+p}(1-x)^{n+q}dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx},$$

мы предположимъ во первыхъ, что m и n весьма большія числа. При такомъ условіи, для опредѣленія двухъ интеграловъ, употребляемъ формулу (97) предъидущаго N°. Основываясь на ней, получимъ

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n+1}}.\sqrt{\frac{2\pi mn}{m+n}},$$

$$\int_0^1 x^{m+p}(1-x)^{n+q}dx=\frac{(m+p)^{m+p}(n+q)^{n+q}}{(m+n+p+q)^{m+n+p+q+1}}.\sqrt{\frac{2\pi(m+p)(n+q)}{m+n+p+q}}.$$

Слѣдовательно

$$P=Q.\frac{(m+p)^{m+p}}{m^m}.\frac{(n+q)^{n+q}}{n^n}.\frac{(m+n)^{m+n+1}}{(m+n+p+q)^{m+n+p+q+1}}.\sqrt{\frac{m+p}{m}.\frac{n+q}{n}.\frac{m+n}{m+n+p+q}},$$

замѣнивъ для краткости коэффиціентъ $\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}$ величиною Q.

Мы уже допустили, что m и n, сами по себѣ, суть большія числа; сверхъ того, положимъ теперь, что они и въ сравненіи съ p и q весьма значительны, или, иначе, что будущее событіе, котораго опредѣляемъ вѣроятность, несравненно менѣе сложно, чѣмъ наблюденное. Въ такомъ предположеніи можно будетъ, какъ уже показано въ предъидущемъ N°, сдѣлать слѣдующія сокращенія:

$$(m+p)^{m+p} = m^{m+p}\left(1+\frac{p}{m}\right)^{m+p} = m^{m+p}\left[\left(1+\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\right]^p\left(1+\frac{p}{m}\right)^p.$$

Выраженіе $\left(1+\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$, при m весьма значительномъ какъ въ безусловномъ смыслѣ, такъ и въ отношеніи къ p, будетъ весьма мало разнствовать отъ e; сверхъ того, при тѣхъ же условіяхъ, количество $\left(1+\frac{p}{m}\right)^p$ можно принять за единицу безъ чувствительной погрѣшности. Слѣдовательно

$$(m+p)^{m+p} = m^{m+p}.e^p, \quad \text{откуда} \quad \frac{(m+p)^{m+p}}{m^m} = m^p.e^p,$$

а также

$$\frac{(n+q)^{n+q}}{n^n} = n^q.e^q.$$

Равнымъ образомъ, написавъ выраженіе

$$\frac{(m+n)^{m+n+1}}{(m+n+p+q)^{m+n+p+q+1}}$$

въ видѣ

$$\frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n+p+q)^{m+n+p+q}}.\frac{m+n}{m+n+p+q},$$

и замѣнивъ единицею дробь $\frac{m+n}{m+n+p+q}$, получимъ весьма приблизительно:

$$\frac{(m+n)^{m+n+1}}{(m+n+p+q)^{m+n+p+q+1}} = \frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n+p+q)^{m+n+p+q}} = \frac{1}{(m+n)^{p+q}.e^{p+q}}.$$

Наконецъ, основываясь на томъ, что p и q весьма малы въ сравненіи съ m и n, мы можемъ замѣнить единицами и три подърадикальныя дроби

$$\frac{m+p}{m}, \quad \frac{n+q}{n}, \quad \frac{m+n}{m+n+p+q};$$

въ силу этихъ преобразованій, и подставивъ на мѣсто Q равную ему величину, найдемъ для P слѣдующее приближенное значеніе:

$$P = \frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}.\frac{m^p n^q}{(m+n)^{p+q}}.$$

Замѣтимъ, что эта величина изображаетъ вѣроятность p-кратнаго повторенія событія A и q-кратнаго появленія событія B въ томъ предположеніи, что соотвѣтственныя этимъ событіямъ простыя вѣроятности, опредѣленныя *a priori*, суть $\frac{m}{m+n}$ и $\frac{n}{m+n}$. Слѣдовательно, чѣмъ рядъ наблюденій надъ появленіемъ простыхъ событій будетъ обширнѣе въ отношеніи къ новому сложному событію, составленному какимъ ни есть образомъ изъ простыхъ, тѣмъ вѣроятность этого новаго событія будетъ менѣе разнствовать отъ его вѣроятности, вычисленной *a priori*, принимая притомъ за простыя вѣроятности событій отношенія числа ихъ появленія къ полному числу наблюденій. Замѣтимъ мимоходомъ, что наивѣроятнѣйшее будущее событіе будетъ то̀, при которомъ числа p и q пропорціональны m и n.

Предложенія, доказанныя въ этомъ N° и въ предъидущемъ, придаютъ бо̀льшую степень общности теоремѣ Якова Бернулли, распространяя ее на тотъ случай, когда вѣроятности не могутъ быть опредѣлены иначе, какъ только *a posteriori*. Присовокупимъ къ этому, что возможность принимать безразлично вѣроятности, найденныя *a posteriori*, за вѣроятности, вычисленныя *a priori*, самымъ естественнымъ образомъ представлялась первымъ мыслителямъ. Но, безъ пособія Анализа, нельзя было рѣшить, въ какой степени такое предположеніе позволительно. Теперь же мы видимъ, что въ строгомъ смыслѣ эти двѣ вѣроятности не равны, но тѣмъ менѣе разнствуютъ между собою, чѣмъ число наблюденій предполагается значительнѣйшимъ.

58. Распространимъ теперь формулы (91) и (94) на тотъ случай, когда наблюденное событіе зависитъ отъ двухъ различныхъ простыхъ явленій. Съ этою цѣлію рѣшимъ сперва слѣдующій вопросъ:

При полномъ числѣ $l+m+n$ *наблюденій, простое явленіе* A *повторилось* l *разъ, явленіе* B m *разъ, и наконецъ,* n *наблюденій не привели ни къ* A, *ни къ* B, *а къ случаю, который для удобности означимъ чрезъ* C. *Пусть будутъ* x *и* x' *простыя вѣроятности двухъ событій* A *и* B. *Спрашивается, какъ велика вѣроятность* p, *что величина* x *заключается между предѣлами* a *и* a', *и, въ то̀ же время,* x' *между предѣлами* b *и* b', *предполагая напримѣръ что* a *и* a' *очень мало разнствуютъ отъ* $\frac{l}{l+m+n}$, *а* b *и* b', *отъ* $\frac{m}{l+m+n}$.

Здѣсь, какъ и въ N° 54, въ которомъ разсматривалась только одна независимая вѣроятность x событія A, должно допустить, что количества x и x' способны принимать всѣ возможныя значенія отъ 0 до 1, независимо одно отъ другаго. На такомъ основаніи,

изобразивъ чрезъ ε и ε' безконечно малыя приращенія величинъ x и x', получимъ слѣдующія возможныя предположенія относительно вѣроятностей трехъ событій A, B и C.

Вѣроят. A:	*Вѣроят. B:*	*Вѣроят. C:*
0	0	1
	ε'	$1-\varepsilon'$
	$2\varepsilon'$	$1-2\varepsilon'$
	$3\varepsilon'$	$1-3\varepsilon'$
	⋮	⋮
	1	0
ε	0	$1-\varepsilon$
	ε'	$1-\varepsilon-\varepsilon'$
	$2\varepsilon'$	$1-\varepsilon-2\varepsilon'$
	$3\varepsilon'$	$1-\varepsilon-3\varepsilon'$
	⋮	⋮
	$1-\varepsilon$	0
2ε	0	$1-2\varepsilon$
	ε'	$1-2\varepsilon-\varepsilon'$
	$2\varepsilon'$	$1-2\varepsilon-2\varepsilon'$
	$3\varepsilon'$	$1-2\varepsilon-3\varepsilon'$
	⋮	⋮
	$1-2\varepsilon$	0
.....		.....
$1-\varepsilon$	0	ε
	ε	0
1	0	0

Въ этой таблицѣ заключаются всѣ возможныя предположенія, или, что́ всё равно, всѣ значенія, принимаемыя вѣроятностями x, x', $1-x-x'$ трехъ событій A, B, C. Но притомъ необходимо замѣтить, что изобразивъ вообще чрезъ

$$\mu\varepsilon, \quad \mu'\varepsilon', \quad 1-\mu\varepsilon-\mu'\varepsilon',$$

или

$$x, \quad x', \quad 1-x-x'$$

эти три вѣроятности, μ и μ' должны быть такого свойства, чтобы сумма $\mu\varepsilon+\mu'\varepsilon'$ или $x+x'$ не превышала единицы, потому что вѣроятность $1-\mu\varepsilon-\mu'\varepsilon'=1-x-x'$ событія C можетъ только быть нулемъ или количествомъ положительнымъ. Отсюда слѣдуетъ, что наибольшая величина вѣроятности x' будетъ $1-x$.

Обратимся теперь къ наблюденному событію. Такъ какъ явленіе A повторилось l разъ, явленіе B m разъ, явленіе C n разъ, то заключаемъ, что сложныя вѣроятности наблюденнаго событія, соотвѣтствующія всѣмъ возможнымъ предположеніямъ, изобразятся (по N° 8) общею формулою

$$N.x^l x'^m (1-x-x')^n,$$

въ которой N означаетъ коэффиціентъ

$$\frac{1.2.3\ldots(l+m+n)}{1.2.3\ldots l.1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n},$$

а x и x' величины независимыя между собою, и измѣняющіяся какъ та́, такъ и другая, отъ 0 до 1, но при условіи $x+x' \leqq 1$. Изобразимъ знакоположеніемъ

$$\Sigma\Sigma N.x^l x'^m (1-x-x')^n$$

сумму всѣхъ возможныхъ значеній, принимаемыхъ функціею $N.x^l x'^m (1-x-x')^n$ при упомянутомъ сей-часъ условіи $x+x' \leqq 1$. Такъ какъ наименьшая величина вѣроятности x' есть нуль, а наибольшая, по сдѣланному выше замѣчанію, равна $1-x$, то предѣлы интеграла Σ въ разсужденіи x' будутъ 0 и $1-x$. Что́ же касается до перемѣнной x, то ее очевидно должно измѣнять отъ $x=0$ до $x=1$. Слѣдовательно, наблюдая что N есть число постоянное, предъидущая сумма приметъ видъ

$$N.\sum_{x=0}^{x=1} \sum_{x'=0}^{x'=1-x} x^l x'^m (1-x-x')^n.$$

Этотъ двойной интегралъ, въ силу правила приведеннаго въ концѣ N° 52, изобразитъ знаменатель искомой вѣроятности p. Для полученія ея числителя, стоитъ только, соображуясь съ сказаннымъ въ N° 54, взять сумму всѣхъ возможныхъ значеній той же функціи $N.x^l x'^m (1-x-x')^n$ отъ $x=a$ до $x=a'$, и отъ $x'=b$ до $x'=b'$. Дѣйствительно, такъ какъ въ настоящемъ случаѣ условіе $x+x' \leqq 1$ выполняется само собой, ибо, по смыслу вопроса, $x+x'$ весьма мало разнствуетъ отъ суммы $\frac{l}{l+m+n}+\frac{m}{l+m+n}=\frac{l+m}{l+m+n}$, очевидно мѣньшей единицы, то предѣлы относительно x и x' будутъ a, a' и b, b'. Поэтому, для числителя вѣроятности p, получимъ выраженіе

$$N.\sum_{x=a}^{x=a'} \sum_{x'=b}^{x'=b'} x^l x'^m (1-x-x')^n,$$

и слѣдовательно

$$p = \frac{\sum\limits_{x=a}^{x=a'} \sum\limits_{x'=b}^{x'=b'} x^l x'^m (1-x-x')^n}{\sum\limits_{x=0}^{x=1} \sum\limits_{x'=0}^{x'=1-x} x^l x'^m (1-x-x')^n}.$$

Умножимъ оба члена этой дроби на произведеніе $\varepsilon\varepsilon'$, и замѣнимъ потомъ безконечно малыя величины ε и ε' соотвѣтственно дифференціалами dx и dx'. На основаніи правилъ Интегральнаго Исчисленія, получимъ

$$\sum\limits_{x=a}^{x=a'} \sum\limits_{x'=b}^{x'=b'} x^l x'^m (1-x-x')^n . \varepsilon\varepsilon' = \int_a^{a'}\int_b^{b'} x^l x'^m (1-x-x')^n dx dx'$$

$$\sum\limits_{x=0}^{x=1} \sum\limits_{x'=0}^{x'=1-x} x^l x'^m (1-x-x')^n . \varepsilon\varepsilon' = \int_0^1\int_0^{1-x} x^l x'^m (1-x-x')^n dx dx',$$

и окончательно

$$p = \frac{\int_a^{a'}\int_b^{b} x^l x'^m (1-x-x')^n dx dx'}{\int_0^1\int_0^{1-x} x^l x'^m (1-x-x')^n dx dx'}.$$

Если бы, вмѣсто l-кратнаго, m-кратнаго и n-кратнаго повтореній A, B и C, разсматривалось другое, какое ни есть совокупленіе этихъ трехъ явленій, то изобразивъ чрезъ y вѣроятность предполагаемаго совокупленія, вычисленную *a priori* въ функціи x и x', получили бы

$$p = \frac{\int_a^{a'}\int_b^{b'} y dx dx'}{\int_0^1\int_0^{1-x} y dx dx'}, \tag{98}$$

разумѣя подъ p вѣроятность, что послѣ наблюденія, соотвѣтственныя возможности x и x' событій A и B заключаются: x между предѣлами a и a', а x', между b и b'.

Положимъ еще, что по наблюденному событію въ вопросѣ этого же нумера, желаемъ найти вѣроятность P будущаго сложнаго событія, напримѣръ, p-кратнаго повторенія A, q-кратнаго B и r-кратнаго C при числѣ $p+q+r$ новыхъ испытаній: эта вѣроятность, вычисленная *a priori* въ функціи x и x', изобразится чрезъ

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q+r)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r} . x^p x'^q (1-x-x')^r.$$

Но въ силу правила, приведеннаго въ концѣ N° 53, для опредѣленія вѣроятности P будущаго событія по наблюденному, должно, вѣроятность предположенія

$$\frac{x^l x'^m (1-x-x')^n dx dx'}{\int_0^1\int_0^{1-x} x^l x'^m (1-x-x')^n dx dx'}$$

помножить на вѣроятность новаго событія, вычисленную *a priori*, и взять потомъ сумму всѣхъ подобныхъ произведеній, распространяя ее на всѣ возможныя значенія x и x', то есть, отъ $x'=0$ до $x'=1-x$, и отъ $x=0$ до $x=1$. На такомъ основаніи, и наблюдая что знаменатель постоянный, получимъ

$$P = \frac{1.2.3\ldots(p+q+r)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r} . \frac{\int_0^1\int_0^{1-x} x^{l+p} x'^{m+q} (1-x-x')^{n+r} dx dx'}{\int_0^1\int_0^{1-x} x^l x'^m (1-x-x')^n dx dx'}.$$

Вообще, если изобразимъ чрезъ y вѣроятность наблюденнаго сложнаго событія, составленнаго изъ простыхъ явленій A, B, C, а чрезъ z вѣроятность будущаго событія, предполагая что обѣ вычислены *a priori* въ функціи x и x', то вѣроятность P новаго событія, выведенная изъ наблюденнаго, опредѣлится общею формулою

$$P = \frac{\int_0^1\int_0^{1-x} yz dx dx'}{\int_0^1\int_0^{1-x} y dx dx,}. \tag{99}$$

Формулы (98) и (99) относятся къ двумъ различнымъ родамъ простыхъ явленій. Распространеніе ихъ на случай какого ни есть числа событій не представляетъ ни малѣйшаго затрудненія. Такъ формула (98), напримѣръ для трехъ различныхъ явленій, приметъ видъ

$$p = \frac{\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} y dx dx' dx''}{\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-x'} y dx dx' dx''},$$

гдѣ a и a', b и b', c и c' соотвѣтственно означаютъ предѣлы независимыхъ между собою вѣроятностей x, x', x'' простыхъ явленій, а y имѣетъ прежнее значеніе. Подобнымъ образомъ, формула (99), при трехъ событіяхъ, обратится въ слѣдующую:

$$P = \frac{\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-x'} yz dx dx' dx''}{\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-x'} y dx dx' dx''},$$

въ которой y и z означаютъ тò же, чтò и въ уравненіи (99).

Слѣдствія, проистекающія изъ уравненій (98) и (99), одинаковы съ тѣми, которыя выведены въ двухъ предъидущихъ нумерахъ. На основаніи аналитическихъ пріёмовъ, подобныхъ употребленнымъ въ N° 56, можно заключить изъ формулы (98), что при двухъ различныхъ родахъ простыхъ событій, вѣроятность, что соотвѣтственныя имъ возможности чрезвычайно близки къ тѣмъ, при которыхъ наблюденное сложное событіе наиболѣе правдоподобно, быстро приближается къ достовѣрности при значительномъ

числѣ наблюденій. Изъ формулы (99) окажется, что вѣроятность какого либо новаго сложнаго событія, опредѣляемая посредствомъ весьма значительнаго числа наблюденій, уже произведенныхъ, неопредѣленно приближается къ значенію вѣроятности, вычисленной *a priori*, принимая притомъ за простыя вѣроятности событій отношенія числа ихъ появленій къ полному числу наблюденій. Эти слѣдствія очевидно имѣютъ мѣсто и при сколькихъ угодно различныхъ родахъ простыхъ событій.

59. Окончимъ изложеніе общихъ правилъ нѣкоторыми простыми приложеніями формулъ, выведенныхъ въ предъидущихъ нумерахъ; въ слѣдующихъ Главахъ будетъ показано ихъ употребленіе при рѣшеніи болѣе сложныхъ вопросовъ.

Положимъ, что при числѣ $m+n$ наблюденій, событіе A повторилось m разъ, а противное ему B, n разъ, при чёмъ замѣчено, что $m > n$. Спрашивается, какъ велика вѣроятность p, что событіе A правдоподобнѣе событія B.

Замѣтимъ, что по смыслу вопроса, предѣлы a и a' будутъ соотвѣтственно $\frac{1}{2}$ и 1, ибо, допустивъ эти предѣлы, мы тѣмъ самымъ выражаемъ, что вѣроятность событія A болѣе вѣроятности событія B. Слѣдовательно, въ силу формулы (90), будетъ

$$p = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}.$$

Для опредѣленія числителя, употребляемъ способъ интегрированія по частямъ, и получаемъ

$$\int x^m(1-x)^n dx = -\frac{x^m(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m}{n+1}\int x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx;$$

Изобразивъ $(1-x)^{n+1}$ въ видѣ $(1-x)^n - x(1-x)^n$, найдется

$$\int x^m(1-x)^n dx = -\frac{x^m(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m}{n+1}\int x^{m-1}(1-x)^n dx - \frac{m}{n+1}\int x^m(1-x)^n dx,$$

откуда

$$\int x^m(1-x)^n dx = -\frac{x^m(1-x)^{n+1}}{m+n+1} + \frac{m}{m+n+1}\int x^{m-1}(1-x)^n dx.$$

Взявъ интегралы между предѣлами $\frac{1}{2}$ и 1, будетъ

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^m(1-x)^n dx = \frac{(\frac{1}{2})^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{m}{m+n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{m-1}(1-x)^n dx.$$

Положимъ для простоты

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^m(1-x)^n dx = y_m \quad \text{и} \quad m+n+1 = \mu;$$

найдемъ

$$y_m = \frac{(\frac{1}{2})^\mu}{\mu} + \frac{m}{\mu} y_{m-1},$$

и замѣтивъ, что съ измѣненіемъ m въ $m-1$, μ обратится въ $\mu-1$,

$$y_{m-1} = \frac{(\frac{1}{2})^{\mu-1}}{\mu-1} + \frac{m-1}{\mu-1} y_{m-2}$$

$$y_{m-2} = \frac{(\frac{1}{2})^{\mu-2}}{\mu-2} + \frac{m-2}{\mu-2} y_{m-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1 = \frac{(\frac{1}{2})^{\mu-m+1}}{\mu-m+1} + \frac{1}{\mu-m+1} y_0.$$

Но $y_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)^n dx = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}$; поэтому, чрезъ послѣдовательныя подстановленія, получимъ:

$$y_m = \frac{(\frac{1}{2})^\mu}{\mu} + \frac{m}{\mu}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\mu-1}}{\mu-1} + \frac{m}{\mu}\cdot\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\mu-2}}{\mu-2} + \frac{m}{\mu}\cdot\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{m-2}{\mu-2}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\mu-3}}{\mu-3} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{m}{\mu}\cdot\frac{m-1}{\mu-1}\cdots\frac{2}{\mu-m+2}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\mu-m+1}}{\mu-m+1} + \frac{m}{\mu}\cdot\frac{m-1}{\mu-1}\cdots\frac{2}{\mu-m+2}\cdot\frac{1}{\mu-m+1}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\mu-m}}{\mu-m}.$$

Таковъ числитель дроби, выражающей искомую вѣроятность p. Знаменатель ея, въ силу формулы (96), будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)} = \frac{1.2.3\ldots m}{(\mu-m)(\mu-m+1)\ldots\mu},$$

и слѣдовательно, вѣроятность p опредѣлится формулою:

$$p = \frac{(\mu-m)(\mu-m+1)\ldots\mu}{1.2.3\ldots m}\Big[\frac{(\frac{1}{2})^\mu}{\mu} + \frac{m}{\mu}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\mu-1}}{\mu-1} + \frac{m}{\mu}\cdot\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\mu-2}}{\mu-2} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{m}{\mu}\cdot\frac{m-1}{\mu-1}\cdots\frac{1}{\mu-m+1}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\mu-m}}{\mu-m}\Big], \qquad (100)$$

гдѣ, для краткости, $\mu = m+n+1$.

Положимъ, напримѣръ, что событіе A повторилось 3 раза, а событіе B 2 раза, вслѣдствіе чего $m=3$, $n=2$, $\mu=6$; поэтому

$$p = \frac{3.4.5.6}{1.2.3}\Big(\frac{1}{6.2^6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5.2^5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4.2^4} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3.2^3}\Big) = \frac{21}{32} = \frac{1}{2} + \frac{5}{32}.$$

И такъ, въ настоящемъ случаѣ, вѣроятность, что событіе A правдоподобнѣе B, равняется $\frac{1}{2} + \frac{5}{32}$; дробь $\frac{5}{32}$ изобразитъ очевидно мѣру избытка правдоподобія A предъ B.

Если положимъ, что m наблюденій каждый разъ приводили къ событію A, то найдется: $n=0$, $\mu=m+1$, и формула (100) приметъ видъ

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^\mu + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\mu = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1};$$

этотъ результатъ получится самымъ простымъ образомъ и чрезъ непосредственное интегрированіе. Дѣйствительно, въ настоящемъ случаѣ имѣемъ

$$P=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^m dx}{\int_0^1 x^m dx}=\frac{\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)_{\frac{1}{2}}^{1}}{\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)_0^1}=\frac{\frac{1}{m+1}-\frac{(\frac{1}{2})^{m+1}}{m+1}}{\frac{1}{m+1}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}.$$

Отсюда усматриваемъ, что по мѣрѣ возрастанія числа повтореній одного и того же событія, вѣроятность его правдоподобія неопредѣленно приближается къ единицѣ.

Сдѣлаемъ теперь нѣкоторыя простыя приложенія формулы (93). Замѣнивъ интегралы числителя и знаменателя ихъ величинами, опредѣляемыми уравненіемъ (96), получимъ

$$P=\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}\cdot\frac{1.2.3\ldots(m+p)}{(n+q+1)\ldots(n+q+m+p+1)}\cdot\frac{(n+1)\ldots(n+m+1)}{1.2.3\ldots m}, \qquad (101)$$

гдѣ m и n изображаютъ число появленій событій A и B въ $m+n$ наблюденій, а p и q ожидаемое число повтореній тѣхъ же событій въ $p+q$ новыхъ наблюденій.

Положимъ, напримѣръ, что желаемъ найти вѣроятность сложнаго событія AB или BA въ два слѣдующія наблюденія; найдется $p=q=1$, и слѣдовательно, по сокращеніи общихъ дѣлителей въ предъидущей формулѣ,

$$P=\frac{2(m+1)(n+1)}{(n+m+2)(n+m+3)}.$$

Ясно, что вѣроятность двукратнаго повторенія одного и того же событія, то есть вѣроятность событій AA или BB, безразлично, будетъ въ настоящемъ случаѣ

$$1-P=1-\frac{2(m+1)(n+1)}{(n+m+2)(n+m+3)}=\frac{(m+1)(m+2)+(n+1)(n+2)}{(n+m+2)(n+m+3)}.$$

Положимъ еще, что ищется просто вѣроятность появленія опредѣленнаго событія, напримѣръ A, въ непосредственно слѣдующее за произведенными $m+n$ наблюденіями. Здѣсь имѣемъ $p=1$, $q=0$, и слѣдовательно, въ силу формулы (101)

$$P=\frac{m+1}{m+n+2},$$

а вѣроятность появленія событія B, будетъ

$$1-P=\frac{n+1}{m+n+2}.$$

Вмѣсто найденныхъ двухъ выраженій $\frac{m+1}{m+n+2}$ и $\frac{n+1}{m+n+2}$ для простой вѣроятности событій A и B, мы нашли бы дроби $\frac{m}{m+n}$ и $\frac{n}{m+n}$, еслибъ, дѣйствуя сообразно съ способомъ опредѣленія вѣроятностей *a priori*, раздѣлили число повтореній событія на полное число наблюденій. Замѣтимъ, что разность между этими двумя вѣроятностями

$$\frac{m}{m+n}-\frac{m+1}{m+n+2}=\frac{m-n}{m+n}\cdot\frac{1}{m+n+2}$$

неопредѣленно уменьшается съ возрастающимъ числомъ наблюденій, ибо она выражается произведеніемъ двухъ дробей $\frac{m-n}{m+n}$ и $\frac{1}{m+n+2}$, которыя обѣ, и въ особенности вторая, уменьшаются съ чрезвычайною быстротою. Этотъ результатъ есть частный случай общаго предложенія, доказаннаго въ N° 56 этой Главы.

Можно также замѣтить, что вѣроятности $\frac{m}{m+n}$ и $\frac{m+1}{m+n+2}$ дѣлаются равными между собою при конечномъ значеніи $m+n$ только въ одномъ случаѣ, именно когда $m=n$. Въ этомъ предположеніи будетъ $\frac{m}{m+n}=\frac{m+1}{m+n+2}=\frac{1}{2}$.

Для послѣдняго примѣра, положимъ, что m-кратное наблюденіе постоянно приводило къ событію A. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что и при p слѣдующихъ наблюденіяхъ, это самое событіе повторится каждый разъ.

Замѣтивъ, что въ настоящемъ случаѣ имѣемъ $n=0$, $q=0$, формула (93) доставитъ

$$P=\frac{\int_0^1 x^{m+p}dx}{\int_0^1 x^m dx}=\frac{\frac{1}{m+p+1}}{\frac{1}{m+1}}=\frac{m+1}{m+p+1}.$$

Давъ величинѣ P видъ $\frac{1+\frac{1}{m}}{1+\frac{p+1}{m}}$, мы ясно видимъ, что она тѣмъ менѣе разнствуетъ отъ единицы, чѣмъ m значительнѣе въ отношеніи къ p. Такъ, напримѣръ, предположивъ съ Лапласомъ, что наблюденія надъ ежедневнымъ восхожденіемъ солнца имѣютъ давность 5 тысячъ лѣтъ или 1826213 дней, вѣроятность, что солнце взойдетъ еще одинъ разъ, опредѣлится дробью

$$\frac{1826213+1}{1826213+1+1}=1-\frac{1}{1826215},$$

разнствующею отъ достовѣрности чрезвычайно малымъ числомъ, которое, на самомъ дѣлѣ, еще незначительнѣе, когда примемъ въ расчётъ другія обстоятельства, основанныя на нашихъ познаніяхъ объ неизмѣняемости солнечной системы.

Въ заключеніе приведемъ численный вопросъ, представляющій два рода простыхъ явленій, и поэтому рѣшающійся посредствомъ формулы (98). Положимъ, что шесть послѣдовательныхъ испытаній привели къ трехъ-кратному появленію событія A и двукратному событія B: одно же изъ произведенныхъ испытаній не привело ни къ A, ни къ B. Спра-

шивается, какъ велика вѣроятность p, что возможности x и x' простыхъ явленій A и B соотвѣтственно заключаются между предѣлами

$$\frac{3}{3+2+1}\mp\omega=\frac{1}{2}\mp\omega \quad \text{и} \quad \frac{2}{3+2+1}\mp\omega'=\frac{1}{3}\mp\omega',$$

разумѣя подъ ω и ω' весьма малыя дроби?

Замѣтивъ, что въ настоящемъ случаѣ вѣроятность y наблюденнаго событія, вычисленная *a priori*, есть $y=x^3x'^2(1-x-x')$, получимъ въ силу формулы (98):

$$p=\frac{\int_{\frac{1}{2}-\omega}^{\frac{1}{2}+\omega}\int_{\frac{1}{3}-\omega'}^{\frac{1}{3}+\omega'}x^3x'^2(1-x-x')dxdx'}{\int_0^1\int_0^{1-x}x^3x'^2(1-x-x')dxdx'}.$$

По совершеніи означенныхъ интегрированій, не представляющихъ ни малѣйшаго затрудненія, найдется:

$$p=2^3.7.\Big[20(4\cdot\tfrac{1}{2^3}\omega+4\cdot\tfrac{1}{2}\omega^3)(3\cdot\tfrac{1}{3^2}\omega'+\omega'^3)-16(5\cdot\tfrac{1}{2^4}\omega+10\cdot\tfrac{1}{2^2}\omega^3+\omega^5)(3\cdot\tfrac{1}{3^2}\omega'+\omega'^3)$$
$$-15(4\cdot\tfrac{1}{2^3}\omega+4\cdot\tfrac{1}{2}\omega^3)(4\cdot\tfrac{1}{3^3}\omega'+4\cdot\tfrac{1}{3}\omega'^3)\Big].$$

Положимъ еще, требуется найти вѣроятность P, что въ слѣдующія три новыя испытанія, явленія A и B случатся каждое по одному разу. На основаніи формулы (99), и замѣтивъ что $z=6xx'(1-x-x')$, получимъ

$$P=\frac{6\int_0^1\int_0^{1-x}x^4x'^3(1-x-x')^2dxdx'}{\int_0^1\int_0^{1-x}x^3x'^2(1-x-x')dxdx'}.$$

Но такъ какъ

$$\int_0^1\int_0^{1-x}x^3x'^2(1-x-x')dxdx'=\frac{1}{2^5.3.5.7},\int_0^1\int_0^{1-x}x^4x'^3(1-x-x')^2dxdx'=\frac{1}{2^3\,3^2.5^2.7.11},$$

то и найдется $P=\frac{6.2^2}{3.5.11}=\frac{8}{55}$.

Если бы число повтореній событій A и B было довольно значительно, то точное опредѣленіе интеграловъ, входящихъ въ формулы (98) и (99), по продолжительности выкладокъ, сдѣлалось бы почти невозможнымъ. Въ такомъ случаѣ, для приблизительнаго ихъ вычисленія, надлежало бы прибѣгнуть къ пріёмамъ, подобнымъ тѣмъ, которые употреблены въ N° 56.

Изложивъ общіе законы, по которымъ опредѣляются вѣроятности *a posteriori*, переходимъ къ важнѣйшимъ ихъ приложеніямъ.

ГЛАВА VIII.

О ВѢРОЯТНОСТЯХЪ ЖИЗНИ ЧЕЛОВѢЧЕСКОЙ.

60. Опредѣленіе вѣроятностей жизни человѣческой основано на показаніяхъ наблюденій и на предложеніяхъ, приведенныхъ въ предъидущей Главѣ. Чтобъ изложить эту теорію съ возможною вразумительностію, войдемъ сперва въ необходимыя подробности на счётъ составленія различныхъ таблицъ, относящихся къ вопросамъ о человѣческой жизни.

Для составленія возможно-точнѣйшихъ таблицъ смертности для извѣстной страны, и для промежутка времени не слишкомъ значительнаго, надлежало бы извлечь изъ метрическихъ книгъ того мѣста показанія объ весьма значительномъ числѣ новорожденныхъ, различая при томъ и полъ ихъ, и слѣдить за ними по самый день ихъ смерти. Такимъ образомъ опредѣлили бы, по тѣмъ же метрическимъ книгамъ, сколько, изъ полнаго числа новорожденныхъ, остается въ живыхъ по прошествіи одного года, двухъ, трехъ, четырехъ лѣтъ, и вообще, до предѣла человѣческой жизни, предполагаемаго напримѣръ во сто лѣтъ. Эти показанія, написанныя противъ каждаго возраста, составляютъ тò, что̀ называется *таблицею смертности*. По причинѣ значительной смертности младенцевъ до двухъ-лѣтняго возраста, и преимущественно въ теченіи перваго года, для бо̀льшей точности, надлежало бы подраздѣлить первый годъ хотя на четыре трехъ-мѣсячные промежутка, а второй, на два полугодія.

Чтобы однимъ взглядомъ обнять главныя измѣненія въ ходѣ смертности, что̀ довольно затруднительно когда имѣемъ въ виду пространныя таблицы, то указанія сихъ послѣднихъ изображаютъ графически, кривою, называемою *кривою смертности* или *указательницею смертности.* Предлагаемъ построеніе этой линіи: беремъ произвольную прямую за ось абсциссъ или x-овъ, и означаемъ на ней точку 0, которую принимаемъ за начало

координатъ. Перпендикуляръ, возставленный изъ 0, изобразитъ ось ординатъ или y-овъ. Откладываемъ по оси x-овъ, отъ начала 0, *сто* равныхъ произвольныхъ частей, и послѣдовательныя дѣленія отмѣчаемъ нумерами 1, 2, 3,... до 100. Изъ всѣхъ точекъ дѣленія возставляемъ перпендикуляры, на которыхъ опредѣляемъ точки кривой смертности слѣдующимъ образомъ: принимаемъ въ соображеніе извѣстное число новорожденныхъ, напримѣръ 10000, и откладываемъ отъ начала координатъ по оси y-овъ длину, пропорціональную 10000. Далѣе, ищемъ въ таблицахъ смертности, сколько изъ этихъ 10000 новорожденныхъ остается въ живыхъ по прошествіи одного года послѣ рожденія; откладываемъ по ординатѣ отъ точки дѣленія n° 1 длину, пропорціональную этому числу. Поступаемъ точно такъ же съ ординатою, соотвѣтствующею n° 2, то есть, откладываемъ по ней длину, пропорціональную числу младенцевъ, достигшихъ 2-хъ лѣтъ, заимствуя это число изъ тѣхъ же таблицъ смертности. На этомъ самомъ основаніи продолжаемъ строеніе для каждаго возраста; напримѣръ, на ординатѣ, соотвѣтствующей n° 33, откладываемъ длину, пропорціональную числу доживающихъ до 33 лѣтъ изъ разсматриваемыхъ 10000 новорожденныхъ. Такимъ образомъ дойдемъ до послѣдняго нумера 100, или до абсциссы, соотвѣтствующей 100-лѣтнему возрасту. Положимъ, что изъ 10000 человѣкъ, ни одинъ не достигъ этихъ лѣтъ; слѣдовательно, послѣдняя ордината будетъ *нуль*. Чрезъ отмѣченныя такимъ образомъ 101 точку на ординатахъ, проводимъ непрерывную линію, которая и называется *кривою смертности* или *указательницею смертности*. Очевидно, что она встрѣтитъ ось абсциссъ въ точкѣ, отмѣченной нумеромъ 100, и не будетъ простираться далѣе. Хотя, въ строгомъ смыслѣ, и нельзя считать столѣтній возрастъ предѣломъ человѣческой жизни, но, какъ случаи болѣе глубокой старости бываютъ очень рѣдки, то, при черченіи кривой смертности, ихъ можно не принимать въ расчётъ. Иногда для бóльшей точности, какъ было замѣчено выше, подраздѣляютъ первыя два дѣленія, именно разстоянія отъ n° 0 до n° 1 и отъ n° 1 до n° 2, потому что въ этомъ промежуткѣ, по причинѣ большой смертности младенцевъ, кривая имѣетъ значительную кривизну. Обыкновенно линію n° 0 до n° 1 раздѣляютъ на четыре части, а линію n° 1 до n° 2, только на двѣ; въ такомъ предположеніи, первая ордината послѣ соотвѣтствующей началу 0, изобразитъ число младенцевъ, достигающихъ 3-хъ мѣсячнаго возраста, вторая, число тѣхъ, которые доживаютъ до 6-ти мѣсяцевъ, и такъ далѣе. Впрочемъ, когда не имѣемъ въ виду точныхъ изслѣдованій о смертности собственно младенцевъ, то можемъ довольствоваться подраздѣленіемъ перваго только года на два равные 6-ти мѣсячные промежутка.

Этотъ самый графическій способъ можетъ быть употребленъ и для построенія указательницы смертности, соотвѣтствующей опредѣленному возрасту. Положимъ, напримѣръ, желаемъ построить такого рода кривую для 33 лѣтъ. Откладываемъ отъ начала координатъ по оси y-овъ длину, пропорціональную разсматриваемому числу сверстниковъ 33 лѣтъ; вторая ордината должна быть пропорціональна числу оставшихся въ живыхъ по истеченіи одного года, то есть, достигшихъ 34 лѣтъ; третья, числу доживщихъ до 35 лѣтъ, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока кривая не встрѣтитъ оси абсциссъ. Само собой разумѣется, что при этомъ построеніи, разстоянія между послѣдовательными ординатами должны быть равны между собою.

Замѣтимъ также, что кривая смертности, построенная для каждаго пола отдѣльно, не одинакова. Уклоненія одной изъ этихъ линій отъ другой, объясняются удовлетворительнымъ образомъ различіемъ физическаго и нравственнаго быта мужчины и женщины.

Составленіе таблицъ смертности, по изложенному выше способу, было бы чрезвычайно затруднительно, въ особенности же, еслибъ, для возможной ихъ точности, слѣдили только за значительнымъ числомъ младенцевъ, родившихся въ одно время. Такія таблицы, хотя и существуютъ, но очень рѣдки, да и къ тому жъ слишкомъ односторонни, и поэтому нельзя основать на нихъ никакого общаго заключенія. Онѣ относятся только къ немногимъ классамъ людей, и смертность въ этихъ сословіяхъ не можетъ быть принята за общую мѣру.

Составители таблицъ смертности извлекаютъ обыкновенно изъ метрическихъ книгъ значительное число показаній объ умершихъ, и распредѣляютъ ихъ по возрастамъ. Потомъ, изъ полнаго числа умершихъ, отнимаютъ число младенцевъ, достигшихъ одного года; далѣе, изъ этого остатка вычитаютъ число умершихъ двухъ-лѣтняго возраста, тамъ трехъ-лѣтняго, и такъ далѣе, до предѣла человѣческой жизни. Дѣйствуя такимъ образомъ допускается, что народонаселеніе той страны, для которой составляютъ таблицу, остается неизмѣннымъ, или, иначе, что число умирающихъ равно числу новорожденныхъ; это предположеніе мало удаляется отъ истины, когда разсматриваемый промежутокъ времени довольно малъ, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, объемлетъ значительный рядъ наблюденій. Замѣтимъ также, что точность таблицъ, составленныхъ по изложенному сей-часъ способу, требуетъ чтобы вносили въ нихъ только сверстниковъ, чтò конечно невыполнимо. Но, при маломъ измѣненіи народонаселенія, несоблюденіе этого условія не будетъ имѣть чувствительнаго вліянія на окончательныя заключенія, почему и можетъ быть вообще оставлено безъ вниманія.

У насъ, въ Россіи, таблицы смертности располагаются обыкновенно слѣдующимъ образомъ: противъ каждаго возраста, для пятилѣтнихъ промежутковъ, показано число умершихъ въ истекшее пятилѣтіе, а не число остающихся въ живыхъ. Въ этомъ видѣ таблица не такъ удобна для рѣшенія разныхъ вопросовъ о ходѣ смертности. Къ тому жъ, пятилѣтніе промежутки слишкомъ значительны для того, чтобы можно было ожидать большой точности въ найденныхъ результатахъ, о чёмъ будетъ упомянуто въ слѣдующемъ N° 61.

Нѣкоторые математики пытались связать аналитическою формулою показанія таблицъ смертности. Германскій математикъ *Ламбертъ* предложилъ слѣдующее уравненіе для кривой смертности:

$$y = 10000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\left\{e^{-\frac{x}{13,682}} - e^{-\frac{x}{2,43114}}\right\},$$

которое онъ составилъ на основаніи Лондонскихъ таблицъ. Число рожденій предполагается въ этомъ уравненіи равнымъ *десяти тысячамъ*, а предѣлъ человѣческой жизни, *девяносто шести* годамъ; y изображаетъ число людей, достигающихъ возраста x, а e основаніе Неперовой системы логариѳмовъ. *Дювильяръ*, въ своихъ *Recherches sur les emprunts*, предлагаетъ употреблять формулу Ламберта и при другихъ таблицахъ смертности, но съ измѣненіемъ постоянныхъ коэффиціентовъ, именно въ такомъ видѣ:

$$y = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left\{e^{-\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{n}}\right\},$$

гдѣ N означаетъ число рожденій, а t самую глубокую старость, показываемую таблицею. Числа m, k и n опредѣляются такъ, чтобъ уравненіе согласовалось самымъ удовлетворительнымъ образомъ съ употребляемою таблицею смертности. Величины x, y и e имѣютъ въ формулѣ Дювильяра тó же значеніе, какъ и въ формулѣ Ламберта.

*Моавръ**), замѣтивъ нѣкоторую правильность въ законѣ смертности отъ 22 лѣтняго возраста до предѣла долголѣтія, предполагаемаго имъ въ 86 лѣтъ, предложилъ на этомъ основаніи слѣдующее, весьма простое уравненіе, принадлежащее прямой линіи:

$$y = 86 - x,$$

въ которомъ x изображаетъ какой ни есть возрастъ, заключающійся между 22 и 86 годами, а y число людей, достигающихъ x лѣтъ. И такъ, полагая послѣдовательно

*) *Treatise of annuities*, въ концѣ книги Моавра: *Doctrine of Chances*.

$x = 23, 24, 25, \ldots$, заключаемъ изъ этой формулы, что изъ 63 человѣкъ 23 лѣтъ, 62 достигаютъ 24-хъ лѣтъ, 61, 25-ти лѣтъ и такъ далѣе.

Изъ извѣстныхъ таблицъ смертности, первое мѣсто, по своей давности, занимаетъ таблица, составленная въ 1693 году *Галлеемъ* по метрическимъ книгамъ города Бреславля въ Силезіи. Послѣ него многіе учёные трудились надъ составленіемъ такихъ же таблицъ для главнѣйшихъ городовъ, преимущественно въ Европѣ. Примѣчательнѣйшія таблицы смертности принадлежатъ *Депарсьё*, *Дювильяру*, *Францису Бэйли**) и неутомимому по своему трудолюбію Бельгійскому учёному *Кетле***).

61. Объяснивъ какимъ образомъ составляются таблицы смертности, покажемъ ихъ употребленіе при рѣшеніи разныхъ задачъ, относящихся къ вѣроятностямъ жизни человѣческой. При этомъ можно замѣтить, что рѣшеніе подобныхъ вопросовъ приводится вообще къ простымъ ариѳметическимъ дѣйствіямъ надъ показаніями таблицъ; но оцѣнка степени точности или достовѣрности найденныхъ результатовъ зависитъ отъ аналитическихъ формулъ, болѣе или менѣе сложныхъ, чему предложены будутъ примѣры въ N°N° 66 и 67 этой Главы.

Возьмемъ таблицу смертности, составленную для умершихъ обоего пола Православнаго вѣроисповѣданія въ городѣ Москвѣ за 1842 годъ. Полное число умершихъ простиралось до 9276; распредѣляя ихъ по возрастамъ, какъ объяснено въ предъидущемъ N° 60, и ограничиваясь при томъ пятилѣтними промежутками, получимъ слѣдующую таблицу:

Лѣта:	Оставалось въ живыхъ:	Лѣта:	Оставалось въ живыхъ:
0	9276	до 60	1480
до 5	5815	до 65	1170
до 10	5569	до 70	770
до 15	5356	до 75	478
до 20	4856	до 80	272
до 25	4338	до 85	140
до 30	3889	до 90	60
до 35	3496	до 95	24
до 40	2980	до 100	6
до 45	2560	до 105	2
до 50	2145	отъ 115 до 120	1
до 55	1818	отъ 125 до 130	0

*) *The Doctrine of life annuities and assurances*, by Francis Baily.

**) Quetelet, *Sur l'homme*, 1835 года.

Основываясь на этой таблицѣ, рѣшимъ теперь нѣсколько вопросовъ. Напримѣръ, пусть требуется найти вѣроятность, что новорожденный достигнетъ извѣстнаго возраста, положимъ 25 лѣтъ. Для этого раздѣляемъ 4338, то есть число достигающихъ 25-ти лѣтняго возраста, на 9276, именно на полное число новорожденныхъ, и получаемъ для искомой вѣроятности дробь $\frac{4338}{9276} = 0,467\ldots$, и какъ эта дробь менѣе $\frac{1}{2}$, то заключаемъ, что въ Москвѣ, для новорожденнаго младенца, менѣе вѣроятности дожить до 25 лѣтъ, чѣмъ умереть не достигнувъ этого возраста. Замѣтимъ впрочемъ, что для бóльшей точности какъ этого результата, такъ и послѣдующихъ, надлежало бы имѣть таблицу съ тѣснѣйшими промежутками, напримѣръ годовыми, а не пятилѣтними. Въ смыслѣ болѣе строгомъ, предъидущій выводъ изображаетъ вѣроятность, что младенецъ доживетъ до нѣкотораго возраста, заключающагося между 20 и 25 годами, потому что многіе изъ умершихъ отъ 20 до 25 лѣтъ вошли, при составленіи таблицы, въ разрядъ 25-ти лѣтнихъ.

Положимъ еще, спрашивается, какую вѣроятность имѣетъ человѣкъ 30-ти лѣтъ отъ роду, прожить еще 20 лѣтъ, то есть, достигнуть 50-ти лѣтняго возраста. Чтобъ получить искомую вѣроятность, должно, очевидно, раздѣлить число людей, доживщихъ до 50 лѣтъ, на число, соотвѣтствующее 30 годамъ. По приведенной выше таблицѣ найдемъ дробь $\frac{2145}{3889} = 0,551\ldots$. И такъ, въ сложности, скорѣе можно полагать, что человѣкъ 30 лѣтъ отъ роду доживетъ до 50 лѣтъ, чѣмъ противное, именно, что умретъ не достигнувъ этого возраста. Впрочемъ, здѣсь перевѣсъ вѣроятности первой случайности въ сравненіи со второю весьма незначителенъ; дѣйствительно, вѣроятность первой есть $0,551\ldots$, а второй $1-0,551\ldots = 0,448\ldots$

Опредѣлимъ теперь продолжительность вѣроятной жизни при данномъ возрастѣ. Подъ *вѣроятною жизнію* разумѣемъ число лѣтъ, по прошествіи которыхъ вѣроятность остаться въ живыхъ или умереть одна и та же, и слѣдовательно равна $\frac{1}{2}$. Для опредѣленія этой вѣроятности, очевидно стоитъ только найти, какому возрасту по таблицѣ соотвѣтствуетъ половинное число живыхъ даннаго возраста. Такъ напримѣръ, если бы требовалось узнать продолжительность вѣроятной жизни для новорожденнаго по приведенной выше таблицѣ для Москвы, то раздѣливъ число 9276 на 2, получили бы 4638, которое падаетъ между 15-ю и 20-ю годами, но ближе къ 20 годамъ. При болѣе обширной таблицѣ, опредѣлили бы этотъ возрастъ съ бóльшею точностію. Извлекаемъ подобные результаты для

другихъ городовъ изъ *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités* соч. Лакроа. Вѣроятная жизнь для новорожденнаго въ Парижѣ простирается отъ 8 до 9 лѣтъ; въ Лондонѣ невступно 3 года; въ Вѣнѣ, невступно 2 года; въ Берлинѣ, съ небольшимъ 2 года. Для Франціи вообще, отъ 20 до 21 года; для Англіи, отъ 27 до 28; въ Брандебургѣ, отъ 25 до 26; въ Швейцаріи, 41 годъ. Вообще, замѣченъ значительный перевѣсъ вѣроятной жизни въ деревняхъ передъ большими городами; причина этой разности весьма понятна, принявъ въ соображеніе вредное вліяніе городской жизни на общественное здоровье, въ особенности же относительно низшихъ сословій, которыя болѣе другихъ подвержены болѣзнямъ, нищетѣ, тѣснотѣ помѣщенія и проч.

Найдемъ еще вѣроятную жизнь для человѣка 40 лѣтъ. Этому возрасту, въ нашей таблицѣ, соотвѣтствуетъ число 2980; раздѣливъ его пополамъ, получимъ 1490, которое падаетъ между 55 и 60, но очень близко къ 60 годамъ. Слѣдовательно, для Москвы, вѣроятная жизнь человѣка 40-ка лѣтъ будетъ около 20 лѣтъ. При томъ же сорокалѣтнемъ возрастѣ, вѣроятная жизнь въ Парижѣ слишкомъ 21 годъ; въ цѣлой Франціи 23 года; въ Лондонѣ, 18 лѣтъ; въ Вѣнѣ, болѣе 19 лѣтъ; въ Берлинѣ, также 19 лѣтъ; въ Швейцаріи, около 25 лѣтъ*).

Мѣрою *долголѣтія* называется отношеніе числа доживщихъ до глубокой старости къ полному числу рожденій. Обыкновенно принимаютъ за глубокую старость 90 лѣтъ; въ этомъ предположеніи мѣра долголѣтія для Франціи выражается дробью $\frac{38}{10000} = 0,0038$; для Лондона, $\frac{3}{1518} = 0,0020$; для Вѣны, $\frac{3}{1495} = 0,0020$; для Берлина, $\frac{6}{1427} = 0,0042$; для Швейцаріи, 0,0050. По приведенной выше таблицѣ смертности, мѣра долголѣтія для Москвы превышаетъ всѣ предъидущія, и равна дроби $\frac{60}{9276} = 0,0064$. Но это показаніе нѣсколько значительно, потому что въ разрядъ 90 лѣтнихъ стариковъ вошли, безъ сомнѣнія, недостигшіе этого возраста, и умершіе въ пятилѣтіе отъ 85 до 90 лѣтъ.

Среднимъ продолженіемъ жизни, или просто *среднею жизнію*, соотвѣтствующею таблицѣ стертности, называется отношеніе суммы годовъ жизни всѣхъ умершихъ, внесенныхъ въ таблицу, къ полному ихъ числу. Пусть будетъ N число всѣхъ умершихъ по таблицѣ, а V искомая средняя жизнь. Изобразимъ чрезъ a_1, a_2, $a_3\ldots$ числа, соотвѣтствующія всѣмъ возрастамъ, предполагая, напримѣръ, годовые промежутки между ними; поэтому a_1 изобразитъ число оставшихся въ живыхъ по истеченіи одного года, a_2 по

*) Lacroix, *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités*; Paris, 3-me édition, стр. 197.

истеченіи двухъ лѣтъ, и такъ далѣе. Но какъ число новорожденныхъ, умершихъ въ первый годъ, должно быть распредѣлено на весь двѣнадцати-мѣсячный промежутокъ, то въ сложности можно положить приблизительно, что каждый изъ нихъ прожилъ $\frac{1}{2}$ года. По указанію же таблицы, число умершихъ въ теченіи перваго года, есть $N—a_1$; слѣдовательно сумма лѣтъ числа $N—a_1$ младенцевъ выразится чрезъ

$$\frac{1}{2}(N—a_1).$$

Равнымъ образомъ, умершіе по таблицѣ въ промежутокъ отъ 1 года до 2 лѣтъ, должны быть распредѣлены на весь второй годъ, почему за среднюю ихъ жизнь можно принять $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ года. Но число умершихъ съ 1-го на 2-ой годъ равно $a_1—a_2$; слѣдовательно, сумма годовъ ихъ жизни будетъ

$$\frac{3}{2}(a_1—a_2).$$

Точно такимъ образомъ найдемъ для слѣдующихъ промежутковъ выраженія

$$\frac{5}{2}(a_2—a_3),\quad \frac{7}{2}(a_3—a_4)\cdots\cdots$$

до предѣла человѣческой жизни. И такъ

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{N-a_1+3(a_1-a_2)+5(a_2-a_3)+7(a_3-a_4)+\cdots}{N}\right].$$

По сокращеніи найдется:

$$V = \frac{1}{2} + \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots}{N}. \qquad (102)$$

Легко распространить этотъ результатъ на опредѣленіе средней жизни при какомъ ни есть данномъ возрастѣ n, которому въ таблицѣ смертности соотвѣтствуетъ число a_n. Пусть будутъ a_{n+1}, a_{n+2}, $a_{n+3}\ldots$ показанія таблицы, относящіяся къ годамъ $n+1$, $n+2$, $n+3$, .., а V_n и V_{n+1} продолженія средней жизни для человѣка, достигшаго n-лѣтняго и $(n+1)$-лѣтняго возраста. Найдется по предъидущему:

$$V_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots\cdots}{a_n} \qquad (103)$$

и

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_{n+2}\ a_{n+3}+a_{n+4}+\cdots\cdots}{a_{n+1}},$$

откуда

$$V_n = \frac{1}{2} + \left(V_{n+1}+\frac{1}{2}\right)\frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad (104)$$

На основаніи этой послѣдней формулы очень легко вычислять среднюю жизнь для послѣдовательныхъ возрастовъ, начиная съ предѣла старости.

Приведемъ численное приложеніе формулы (103). Положимъ, ищется средняя жизнь старика 87 лѣтъ по таблицѣ Дювильяра*), составленной для Франціи, принимая въ расчётъ одинъ милліонъ новорожденныхъ. Здѣсь n будетъ равняться 87; сверхъ того находимъ въ таблицѣ слѣдующія показанія для различныхъ возрастовъ, начиная отъ 87 лѣтъ:

года:		года:		года:	
87	7165	95	1140	103	51
88	5670	96	851	104	29
89	4686	97	620	105	16
90	3830	98	442	106	8
91	3093	99	307	107	4
92	2466	100	207	108	2
93	1938	101	135	109	1
94	1499	102	84	110	0

Слѣдовательно, средняя жизнь V 87-ми лѣтняго старика во Франціи опредѣлится формулою:

$$V = \frac{1}{2} + \frac{5670+4686+\;..+4+2+1}{7165};$$

совершивъ означенныя здѣсь дѣйствія, найдемъ

$$V = \frac{1}{2} + \frac{34244}{7165} = 5{,}27\ldots\text{года},$$

то есть 5 лѣтъ 3 мѣсяца и 1 недѣля.

Лакроа**), рѣшая ту же задачу, и употребляя на этотъ конецъ таблицу смертности *Депарсьё*, которая много уступаетъ Дювильяровой со стороны обширности, нашелъ для средней жизни, при томъ же 87 лѣтнемъ возрастѣ, только 2 года и 8 мѣсяцевъ. Значительность этой разности, съ одной стороны 5 лѣтъ и слишкомъ 3 мѣсяца, а съ другой только 2 года и 8 мѣсяцевъ, достаточно показываетъ, сколько результаты, получаемые изъ разныхъ таблицъ, могутъ противорѣчить одинъ другому. Не говоря уже о недостаткахъ, происходящихъ отъ невѣрности показаній метрическихъ книгъ и отъ погрѣшностей, въ которыя безъ сомнѣнія впадаютъ составители таблицъ, можно замѣтить, что, по сущности дѣла, эти таблицы зависятъ еще отъ мѣстности и отъ эпохи, для которой были составлены, а также и отъ класса людей, преобладающаго въ показаніяхъ. Поэтому, средняя жизнь въ разныхъ Государствахъ и городахъ должна быть различная. Вотъ нѣкоторые результаты, относящіеся къ продолженію средней жизни новорожденнаго: во

*) *Annuaire du bureau des longitudes.*

**) *Tr. élém. du Calc. des Probabilités*, 3-me édition, стр. 202.

Франціи, 28 лѣтъ 9 мѣсяцевъ; въ Лондонѣ, 17 лѣтъ 11 мѣсяцевъ; въ Вѣнѣ, 15 лѣтъ 9 мѣсяцевъ; въ Берлинѣ, 17 лѣтъ 1 мѣсяцъ; въ Швейцаріи, 37 лѣтъ 1 мѣсяцъ*). У Кетле**) находимъ для Франціи число нѣсколько бо́льшее противъ приведеннаго, именно 32,2 года. У него же, для всей Англіи, показана средняя жизнь 33 года (32 для мужчинъ, а 34 для женщинъ), а для Бельгіи 32,15 года (для мужчинъ въ городахъ 29,24, а въ деревняхъ 31,97; для женщинъ въ городахъ 33,28, а въ деревняхъ 32,95 года).

Для Россіи, вообще не достаетъ довольно вѣрныхъ данныхъ для опредѣленія этого элемента. Дѣйствительно, наши таблицы смертности составлены по *пятилѣтіямъ*, и этотъ промежутокъ слишкомъ значителенъ для того, чтобы можно было вывести среднюю жизнь съ удовлетворительною точностію. Основываясь на таблицѣ смертности за 1842 годъ, составленной для мужескаго пола Православнаго вѣроисповѣданія, вычисленіе приведетъ къ приближенному числу 22-хъ лѣтъ, или, точнѣе, 22 года и 2 недѣли. Впрочемъ, по приведенной сей-часъ причинѣ несовершенства нашихъ таблицъ, нельзя положиться на точность этого числа.

Средняя жизнь измѣняется также съ возрастомъ. Въ сложности можно положить, что наибо́льшая средняя жизнь относится къ 5-ти лѣтнему возрасту, когда младенецъ избѣжалъ опасностей, сопровождающихъ первые годы его жизни. Тогда средняя его жизнь, вообще, будетъ болѣе 40 лѣтъ. Что́ же касается до вѣроятной жизни, то она достигаетъ наибольшаго своего значенія нѣсколько ранѣе: въ сложности можно положить, что вѣроятная жизнь бываетъ наибольшая для 4-хъ лѣтняго младенца, и простирается для него отъ 45 до 50 лѣтъ.

Посредствомъ таблицъ смертности можно также опредѣлить по приближенію полное народонаселеніе того мѣста, для котораго онѣ составлены, и распредѣлить это народонаселеніе по возрастамъ. Впрочемъ, при такомъ вычисленіи предполагается, что народонаселеніе остается постояннымъ. Пусть будетъ a_0 полное годовое число новорожденныхъ въ томъ мѣстѣ, для котораго желаемъ опредѣлить народонаселеніе; a_1, a_2, a_3... числа, соотвѣтствующія возрастамъ: одному году, двумъ, тремъ годамъ, и такъ далѣе до предѣла n лѣтъ. Наконецъ, изобразимъ чрезъ P искомое народонаселеніе. Число младенцевъ, ниже одного года, соотвѣтствующее народонаселенію P, опредѣлится приблизительно среднею

*) Lacroix, *Tr. élém. du Calc. des Probabilités*, стр. 204.

**) *Sur l'homme*, Томъ 1, стр. 166

ариѳметическою $\frac{1}{2}(a_0+a_1)$. Подобнымъ образомъ, дѣтей отъ 1-го года до 2-хъ лѣтъ будетъ $\frac{1}{2}(a_1+a_2)$, отъ 2-хъ до 3-хъ лѣтъ, $\frac{1}{2}(a_2+a_3)$, и проч. Слѣдовательно, сумма

$$\frac{1}{2}(a_0+a_1)+\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_2+a_3)+\ldots\ldots$$

изобразитъ искомое народонаселеніе P. И такъ

$$P=\frac{1}{2}(a_0+a_n)+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}. \tag{105}$$

Для распредѣленія этого народонаселенія P по возрастамъ, надлежитъ поступать слѣдующимъ образомъ: вычтя изъ P первую среднюю $\frac{1}{2}(a_0+a_1)$, получимъ остатокъ, который изобразитъ число жителей разсматриваемой страны, не моложе одного года. Вычтя изъ этого перваго остатка вторую среднюю $\frac{1}{2}(a_1+a_2)$, получится число жителей свыше двухъ лѣтъ, и такъ далѣе; такимъ образомъ легко будетъ составить таблицу народонаселенія, распредѣленную по возрастамъ.

Приложимъ этотъ способъ къ опредѣленію числа жителей города Москвы, основываясь на таблицѣ смертности за 1841 годъ. Легко видѣть, что по причинѣ пятилѣтнихъ промежутковъ въ Русскихъ таблицахъ смертности, должно будетъ, для полученія посредствомъ нихъ народонаселенія, помножить на 5 вторую часть формулы (105). Дѣйствительно, положимъ что b_0, b_1, $b_2 \ldots b_\mu$ означаютъ числа, соотвѣтствующія возрастамъ: 0 лѣтъ, 5 лѣтъ, 10 лѣтъ и такъ далѣе. Если между b_0 и b_1 включимъ четыре числа такъ, чтобы они съ крайними b_0 и b_1 составляли ариѳметическую прогрессію, то эти шесть чиселъ, именно:

$$b_0,\ b_0-\frac{b_0-b_1}{5},\quad b_0-\frac{2(b_0-b_1)}{5},\quad b_0-\frac{3(b_0-b_1)}{5},\quad b_0-\frac{4(b_0-b_1)}{5},\quad b_1$$

соотвѣтственно изобразятъ число новорожденныхъ, приближенное число младенцевъ доживающихъ до одного года, до двухъ, до трехъ, до четырехъ и до пяти лѣтъ. На такомъ основаніи число дѣтей, ниже одного года, опредѣлится полу-суммою $\frac{1}{2}\left(b_0+b_0-\frac{b_0-b_1}{5}\right)$ или $\frac{1}{2}\left(2b_0-\frac{b_0-b_1}{5}\right)$; подобнымъ образомъ, $\frac{1}{2}\left(2b_0-\frac{3(b_0-b_1)}{5}\right)$ изобразитъ число младенцевъ отъ одного года до двухъ лѣтъ, и такъ далѣе. Слѣдовательно, дѣтей, ниже 5-ти лѣтъ, будетъ

$$\frac{1}{2}\left(2b_0-\frac{b_0-b_1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(2b_0-\frac{3(b_0-b_1)}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(2b_0-\frac{5(b_0-b_1)}{5}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(2b_0-\frac{7(b_0-b_1)}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(b_0+b_1-\frac{4(b_0-b_1)}{5}\right)=\frac{5}{2}(b_0+b_1).$$

Точно такъ же найдемъ, что дѣтей отъ 5-ти до 10-ти лѣтъ будетъ $\frac{5}{2}(b_1+b_2)$, отъ 10-ти до 15-ти лѣтъ $\frac{5}{2}(b_2+b_3)$, и такъ далѣе. Поэтому, для нашихъ таблицъ найдется формула

$$P = \frac{5}{2}(b_0+b_\mu)+5(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{\mu-1}), \tag{106}$$

отличающаяся отъ (105) тѣмъ только, что вторая ея часть помножена на 5.

Приводимъ теперь таблицу смертности для обоего пола Православнаго исповѣданія, за 1841 годъ, для г. Москвы.

Лѣта:	Оставалось въ живыхъ:	Лѣта:	Оставалось въ живыхъ:
0	13640	до 65	1524
до 5	8355	до 70	997
до 10	7976	до 75	630
до 15	7591	до 80	358
до 20	6816	до 85	190
до 25	6042	до 90	68
до 30	5367	до 95	30
до 35	4708	до 100	10
до 40	3994	до 105	7
до 45	3432	до 110	5
до 50	2905	до 115	3
до 55	2443	до 120	2
до 60	1937	до 125	0

На основаніи этихъ данныхъ и формулы (106) найдемъ, съ вѣрностію въ вычисленіи до простыхъ тысячь,

$$P = 361000 \text{ жителей}.$$

Этотъ результатъ довольно много уклоняется отъ вывода, полученнаго другимъ образомъ. Въ Мѣсяцословѣ за 1844 годъ народонаселеніе Москвы, въ 1841 году, показано въ 330000 человѣкъ, включая сюда и иновѣрцевъ, относительное число которыхъ впрочемъ не слишкомъ велико. Эту разность въ двухъ результатахъ можно объяснить различными причинами: можно приписать ее несовершенству таблицы, показывающей возрасты умер-

шихъ между предѣлами слишкомъ отдаленными, именно отъ 5-ти до 5-ти лѣтъ; также, несовсѣмъ вѣрному предположенію относительно неизмѣняемости народонаселенія. Можетъ быть даже есть небольшая неточность и въ прямомъ опредѣленіи народонаселенія Москвы, то есть въ числѣ 330 тысячь.

62. Различіе половъ имѣетъ также, въ сложности, довольно значительное вліяніе на смертность. Поэтому, при составленіи таблицъ вѣроятностей жизни человѣческой, надобно непремѣнно отдѣлять показанія для мужескаго пола отъ показаній для женскаго. Сравненіе таблицъ смертности приводитъ вообще къ заключеніямъ: 1° что число новорожденныхъ муж. пола превосходитъ число новорожденныхъ женскаго; 2° число умершихъ муж. пола превосходитъ число умершихъ женск. пола; 3° число женщинъ, въ живомъ поколѣніи, вообще превышаетъ число мужчинъ; 4° средняя жизнь женщины продолжительнѣе средней жизни мужчины.

Мы не будемъ останавливаться на подтвержденіи всѣхъ этихъ результатовъ численными примѣрами, которые, при пособіи надлежащихъ таблицъ смертности, открываются безъ малѣйшаго затрудненія. Ограничимся только нѣкоторыми показаніями относительно перваго результата, наиболѣе важнаго. Перевѣсъ числа рожденій младенцевъ мужескаго пола передъ женскимъ по видимому составляетъ общій законъ природы, ибо во всѣхъ странахъ и въ разныя времена онъ подтверждался наблюденіями. Въ сложности можно положить, что на 100 рожденій женскаго пола приходится отъ 104 до 109 мужескаго. Вотъ нѣкоторыя показанія, заимствованныя изъ книги Кетле: *Sur l'Homme* (Томъ I, стр. 43):

Государства и Провинціи.	На 100 новорожд. женск. пола приход. младенц. мужеск. пола.	Государства и Провинціи.	На 100 новорожд. женск. пола приход. младенц. мужеск. пола.
Россія..........	108,91.	Пруссія со всѣми ея владѣніями.	105,94.
Миланская Провинція.......	107,61.	Вестфалія и Великое Герцогство Рейнское..........	105,86.
Мекленбургъ..............	107,07.	Виртембергское Королевство ..	105,69.
Франція..............	106,55.	Восточная Пруссія и Познанское Герцогство............	105,66.
Нидерланды (Бельгія и Голландія)	106,44.	Богемское Королевство......	105,38.
Бранденбургская Провинція и Померанія............	106,27.	Великобританія..........	104,75.
Королевство обѣихъ Сицилій...	106,18.	Швеція................	104,62.
Австрійское Государство....	106,10.	Средняя для всей Европы....	106,00.
Силезія и Саксонія..........	106,05.		

Въ Россіи, по таблицѣ за 1841 годъ, вмѣсто 108,91, получаемъ 106,33; это послѣднее число, весьма близкое къ средней для всей Европы, не согласуется, какъ мы видимъ, съ показаніемъ Кетле, которое кажется намъ невѣрнымъ. Если отношеніе 100 къ 106,33 выразимъ приближенно цѣлыми числами, то получимъ, съ достаточною точностію, содержаніе числа рожденій женскаго пола къ числу мужескихъ въ Россіи, какъ 16 къ 17.

Замѣченный перевѣсъ рожденій младенцевъ мужескаго пола передъ женскимъ, подтверждаемый многочисленными наблюденіями, заставляетъ полагать, что тому должна быть постоянная причина. Въ N° 68 мы опредѣлимъ вѣроятность этой причины.

63. Во всѣхъ рѣшенныхъ до сихъ поръ задачахъ, мы предполагали народонаселеніе постояннымъ; такое допущеніе можно считать справедливымъ только для незначительнаго промежутка времени. Вообще же, народонаселеніе и число рожденій возрастаютъ, и степень этого приращенія зависитъ отъ многоразличныхъ причинъ. «Въ человѣческомъ родѣ, говоритъ *Лапласъ**), нравственныя причины имѣютъ значительное вліяніе на народонаселеніе. Если земля, при легкомъ обработованіи, можетъ доставить обильную пищу новымъ поколѣніямъ, то отъ увѣренности, что многочисленное семейство будетъ обезпечено, браки умножаются, заключаются своевременнѣе, и поэтому бываютъ плодовитѣе. На такой землѣ, народонаселеніе и число рожденій должны возрастать въ прогрессіи геометрической. Но, при тяжеломъ и неудобномъ обработываніи полей, приращеніе народонаселенія уменьшается: оно непрестанно приближается къ перемѣнному состоянію жизненныхъ припасовъ, совершая около него колебанія, надобно тому, какъ маятникъ, побуждаемый силою тяжести, качается около точки привѣса, когда передвигаютъ ее укоспеннымъ движеніемъ. Трудно опредѣлить *наибольшее* значеніе приращенія народонаселенія: изъ нѣкоторыхъ наблюденій оказывается, что при обстоятельствахъ благопріятныхъ, народонаселеніе могло бы удвоиться въ теченіи пятнадцати лѣтъ. Въ Сѣверной Америкѣ, по соображенію, это удвоеніе происходитъ въ двадцать пять лѣтъ. При такомъ предположеніи, народонаселеніе, число рожденій, браковъ, смертность, всё растётъ въ той же геометрической прогрессіи, знаменатель которой опредѣляется чрезъ сравненіе числа годовыхъ рожденій въ двѣ различныя эпохи.»

Мы не будемъ останавливаться на щекотливомъ вопросѣ: въ какой степени и при какихъ предѣлахъ приращеніе народонаселенія способствуетъ благосостоянію Государства. Этотъ вопросъ прямо относится къ Политической Экономіи. Вообще по предмету приращенія народонаселенія можно обратиться къ превосходнымъ сочиненіямъ *Мальтуса*, *Шторха* и другихъ ученыхъ статистиковъ*).

*) *Essai philosophique sur les Probabilités.*

64. Къ числу причинъ, уменьшающихъ смертность, или, что всё равно, увеличивающихъ народонаселеніе, относится уничтоженіе, или по крайней мѣрѣ ослабленіе дѣйствія опасныхъ и частыхъ болѣзней. При достаточномъ числѣ наблюденій, легко опредѣлить прибыль въ людяхъ, происходящую отъ ослабленія какой либо причины смертности. Положимъ, напримѣръ, что отъ извѣстной болѣзни умираетъ до 1-го года b_1 младенцевъ, до 2-хъ лѣтъ, b_2, до 3-хъ лѣтъ, b_3 и такъ далѣе. Сверхъ того, пусть будетъ N полное число новорожденныхъ, а a_1, a_2, a_3 .. указанія таблицы смертности, соотвѣтствующія 1 году, 2 годамъ, 3 годамъ и проч. Наконецъ положимъ, что, чрезъ ослабленіе болѣзни, уменьшаемъ смертность слѣдующими числами: c_1 отъ 0 до 1 года; c_2 отъ 1 до 2 лѣтъ; c_3 отъ 2 до 3 лѣтъ и такъ далѣе. Въ такомъ предположеніи, число умирающихъ отъ этой болѣзни въ различные возрасты, какъ то:

годы:	вмѣсто:	будетъ:
отъ 0 до 1	b_1	$b_1 - c_1$
отъ 1 до 2	b_2	$b_2 - c_2$
отъ 2 до 3	b_3	$b_3 - c_3$
.....		.....

При существованіи болѣзни, число умершихъ послѣ одного года, двухъ, трехъ...... лѣтъ, было бы

$$N - a_1, \quad a_1 - a_2, \quad a_2 - a_3 \ldots\ldots,$$

а по ослабленіи ея оно будетъ только

$$N - a_1 - c_1, \quad a_1 - a_2 - c_2, \quad a_2 - a_3 - c_3 \ldots\ldots$$

Отношенія этихъ послѣднихъ разностей къ числу живыхъ разсматриваемаго возраста, изобразятъ вѣроятности умереть въ томъ возрастѣ въ продолженіи одного года, если бъ болѣзнь была ослаблена; эти послѣдовательныя вѣроятности будутъ

$$\frac{N - a_1 - c_1}{N}, \quad \frac{a_1 - a_2 - c_2}{a_1}, \quad \frac{a_2 - a_3 - c_3}{a_2}, \ldots\ldots$$

Когда изъ единицы вычтемъ сумму этихъ дробей, до какого ни есть возраста, напримѣръ до n лѣтъ, то получимъ вѣроятность, что новорожденный проживетъ до n лѣтъ,

*) *Essai sur le principe de la population*, par **Malthus**: Genève 1830. *Principes d'Economie politique*, par **Malthus**; Paris 1820. *Cours d'Economie politique, ou exposition des principes qui déterminent la prospérité des nations*, par **H. Storch**; St. Pétersbourg 1815.

допуская ослабленіе болѣзни. На такомъ основаніи легко составить таблицу смертности, соотвѣтствующую сдѣланному предположенію, и опредѣлить новое значеніе для средней жизни, которая, очевидно, въ настоящемъ случаѣ, получитъ приращеніе.

Такимъ образомъ *Дювильяръ**), собравъ показанія многочисленныхъ наблюденій надъ оспою, нашелъ, что *предохранительное оспопрививаніе* увеличиваетъ среднюю жизнь слишкомъ *тремя годами*. Такое приращеніе средней жизни влечетъ за собою и приращеніе самаго народонаселенія.

Предложенное здѣсь правило для опредѣленія того вліянія, котораго должно ожидать отъ уничтоженія нѣкоторой болѣзни, можетъ подвергнуться справедливому возраженію, и поэтому не имѣетъ безусловной степени точности. Дѣйствительно, не упоминая даже о нѣкоторыхъ менѣе важныхъ возраженіяхъ, замѣтимъ только, что въ употребленномъ нами пріёмѣ, мы не принимали въ расчётъ одного обстоятельства, которое обнаруживается въ слѣдующемъ вопросѣ: прививаніе искусственной оспы, охраняя человѣка отъ губительнаго дѣйствія натуральной, не дѣлаетъ ли его вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе воспріимчивымъ къ другимъ болѣзнямъ? Недостатокъ наблюденій не позволяетъ рѣшить этотъ вопросъ совершенно удовлетворительнымъ образомъ; но, допуская даже эту воспріимчивость въ нѣкоторой степени, вліяніе ея не можетъ быть очень значительно, и благотворное дѣйствіе оспопрививанія, во всякомъ случаѣ, останется несомнѣннымъ фактомъ.

Для опредѣленія средней жизни въ томъ случаѣ, когда уничтожается какая нибудь причина смертности, *Лапласъ* поступаетъ слѣдующимъ образомъ. Пусть будетъ N полное число рожденій, а x разсматриваемый возрастъ. Сверхъ того, изобразимъ чрезъ U число дѣтей, которыя, изъ полнаго числа N, остаются въ живыхъ по истеченіи x лѣтъ въ томъ предположеніи, что одна причина смертности уничтожена, а чрезъ u число младенцевъ, достигающихъ того же возраста x, но при существованіи этой причины или болѣзни, которую назовемъ B. Пусть будетъ $z\Delta x$ вѣроятность что человѣкъ, имѣющій отъ роду x лѣтъ, умреть отъ B въ весьма малый промежутокъ времени Δx; $uz\Delta x$ изобразитъ приблизительно, въ силу теоремы Якова Бернулли, совокупность людей, которые, изъ числа u, умрутъ отъ этой болѣзни B въ промежутокъ Δx, если только u значительное число, что мы дѣйствительно и полагаемъ. Равнымъ образомъ, изобразивъ чрезъ $y\Delta x$ вѣроятность, что человѣкъ имѣющій отъ роду x лѣтъ, умретъ отъ другихъ причинъ смертности въ промежутокъ времени Δx, произведеніе $uy\Delta x$ покажетъ, весьма приблизительно, совокупность людей, которые, изъ числа u, умрутъ отъ остальныхъ причинъ смертности. Поэтому, полное число умершихъ, изъ числа u, въ промежутокъ Δx, будетъ $u(y+z)\Delta x$. Это выраженіе изобразитъ убыль части u въ продолженіи времени Δx, и поэтому должно равняться $-\Delta u$. И такъ

$$-\Delta u = u(y+z)\Delta x.$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ

$$-\Delta U = U.y\Delta x.$$

Исключивъ y изъ этихъ двухъ уравненій, получимъ

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta u}{u} + z\Delta x.$$

Если допустимъ, что разсматриваемый промежутокъ времени Δx чрезвычайно малъ, то конечныя приращенія можно будетъ приблизительно замѣнить дифференціалами, въ слѣдствіе чего предъидущее уравненіе обратится въ дифференціальное

$$\frac{dU}{U} = \frac{du}{u} + zdx,$$

интегралъ котораго будетъ

$$\log.U = \log.u + \int_0^x zdx.$$

Мы не прибавляемъ постояннаго количества, потому что при $x=0$ будетъ $U=u=N$. Послѣднему уравненію можно дать видъ

$$U = u.e^{\int_0^x zdx}.$$

Если бы z былъ извѣстенъ въ функціи x, то эта формула показала бы зависимость между U и u, посредствомъ которой легко бы обыкновенную таблицу смертности превратить въ другую, относящуюся къ предположенію, что одна болѣзнь уничтожена. Но какъ эта функція не можетъ быть опредѣлена, то интегралъ $\int_0^x zdx$ вычисляютъ по приближенію слѣдующимъ образомъ: такъ какъ $uz\Delta x$ изображаетъ число людей, которые, достигнувъ возраста x, умираютъ въ промежутокъ времени Δx отъ болѣзни B, то приближенное значеніе интеграла получится, когда, положивъ Δx равнымъ незначительному промежутку времени, напримѣръ одному году, возьмемъ изъ таблицъ смертности сумму всѣхъ значеній величины z, начиная отъ 0 до x лѣтъ, и предполагая въ этой таблицѣ число рожденій равнымъ, какъ выше, N. Каждая величина для z опредѣлится составивъ дробь, у которой числитель равенъ числу умершихъ отъ болѣзни B на разсматриваемомъ году, а знаменатель числу дѣтей, которыя, изъ полнаго числа N, остаются въ живыхъ въ сре-

*) Duvillard, *Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité.*

днѣ того же разсматриваемаго года. Если бы наблюденія доставляли показанія для меньшихъ промежутковъ времени, напримѣръ для полу-годовыхъ, то интегралъ $\int_0^x z dx$ опредѣлился бы съ большею точностію на основаніи тѣхъ же самыхъ правилъ. Когда такимъ образомъ будетъ вычислена величина U для каждаго возраста, то составится таблица смертности, соотвѣтствующая предположенію, что извѣстная болѣзнь B уничтожена. Изъ этой таблицы легко будетъ уже вывести и продолжительность средней жизни (N° 61).

65. Предложимъ еще рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ, относящихся къ движенію народонаселенія. Желающіе имѣть болѣе обширныя свѣдѣнія въ этомъ предметѣ, могутъ обратиться къ труду Эйлера: *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*, помѣщенному въ *Mémoires de l'Académie de Berlin* за 1760 годъ.

Вообще, всѣ рѣшенія, которыя будутъ предложены ниже, основаны на томъ допущеніи, что число рожденій, а равно и смертность, пропорціональны живому поколѣнію, то есть, что при двойномъ, тройномъ и проч. народонаселеніи, какъ число поворожденныхъ, такъ и число смертныхъ случаевъ будетъ также вдвое, втрое. . . болѣе. Хотя эту ипотезу нельзя считать безусловно точною, но замѣчено однакожъ, что она вообще мало удаляется отъ истины. И такъ, мы примемъ, что отношенія числа годовыхъ рожденій и числа смертныхъ случаевъ къ полному народонаселенію, суть величины постоянныя. Первое изъ этихъ двухъ отношеній можно назвать *мѣрою умноженія* или *плодовитости*, а второе, *мѣрою смертности*.

Изобразимъ соотвѣтственно чрезъ P_0, N_0, M_0 народонаселеніе, число годовыхъ рожденій и число умершихъ, относящіяся къ той эпохѣ, отъ которой условились вести счётъ времени. Пусть будутъ P_1, N_1, M_1 тѣ же числа по истеченіи одного года, P_2, N_2, M_2 по истеченіи двухъ лѣтъ, и вообще P_x, N_x, M_x по истеченіи x лѣтъ. По истеченіи одного года, народонаселеніе P_0 увеличится числомъ N_0 рожденій, а уменьшится M_0 умершими; слѣдовательно будетъ

$$P_1 = P_0 + N_0 - M_0$$

Если изобразимъ чрезъ n отношеніе числа рожденій къ народонаселенію, а чрезъ m, отношеніе числа умершихъ къ тому же народонаселенію, то получимъ

$$\frac{N_0}{P_0} = n, \quad \frac{M_0}{P_0} = m \quad \text{или} \quad N_0 = nP_0, \quad M_0 = mP_0.$$

Числа n и m соотвѣтственно означаютъ *мѣру плодовитости* и *мѣру смертности*, потому, какъ замѣчено выше, ихъ можно принимать, безъ чувствительной погрѣшности, за

числа постоянныя. Подставляя найденныя величины для N_0 и M_0 въ предъидущее уравненіе, найдется

$$P_1 = P_0 + nP_0 - mP_0 = P_0(1+n-m).$$

Такъ какъ число $1+n-m$ предполагается постояннымъ, то для народонаселенія, соотвѣтствующаго двухъ-лѣтнему промежутку, получимъ

$$P_2 = P_1(1+n-m) = P_0(1+n-m)^2,$$

и вообще

$$P_x = P_0(1+n-m)^x.$$

Это равенство очевидно показываетъ, что народонаселеніе будетъ возрастающее, убывающее, или неизмѣняющееся, смотря по тому, имѣемъ ли $n > m$, или $n < m$, или $n = m$. Изобразимъ для краткости $1+n-m$ чрезъ q, и назовемъ эту величину q *коэффиціентомъ приращенія.* Найдется

$$P_x = P_0 \cdot q^x. \tag{107}$$

Такъ какъ вообще народонаселеніе увеличивается, если нѣтъ особенныхъ причинъ большой смертности или многолюдныхъ переселеній, то мы условимся принимать $q > 1$. Подставимъ въ уравненіе (107) на мѣсто P_x сперва $\frac{N_x}{n}$ а потомъ $\frac{M_x}{m}$, также $\frac{N_0}{n}$ и $\frac{M_0}{m}$ на мѣсто P_0; получимъ двѣ формулы

$$N_x = N_0 \cdot q^x \quad \text{и} \quad M_x = M_0 \cdot q^x. \tag{108}$$

Уравненія (107) и (108) показываютъ, что при допущенной ипотезѣ пропорціональности, количество народонаселенія, число рожденій и число умершихъ составляютъ прогрессіи геометрическія, знаменатель которыхъ одинаковъ для всѣхъ трехъ чиселъ.

На основаніи формулы (107) очень легко будетъ рѣшить слѣдующіе три вопроса:

1° *По данному коэффиціенту приращенія* q *найти, чрезъ сколько времени народонаселеніе* P_0 *увеличится въ извѣстномъ отношеніи, напримѣръ какъ* 1 *къ* λ.

2° *По данному* q *и числу* a *протекшихъ лѣтъ, опредѣлить народонаселеніе* P_a *посредствомъ первоначальнаго* P_0.

3° *По извѣстному народонаселенію въ двѣ опредѣленныя эпохи, найти коэффиціентъ приращенія* q.

Для рѣшенія перваго вопроса, стоитъ только вывести величину x изъ уравненія

$$P_x = P_0 \cdot q^x,$$

замѣнивъ въ немъ P_x величиною λP_0. Такимъ образомъ получимъ

$$\lambda = q^x, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\log \lambda}{\log q}.$$

Рѣшеніе втораго вопроса выводится непосредственно изъ того же уравненія (107), подставивъ въ немъ a на мѣсто x. Будетъ

$$P_a = P_0 . q^a.$$

Наконецъ, предположивъ въ третьемъ вопросѣ, что P_0 и P_a извѣстны, найдемъ

$$\frac{P_a}{P_0} = q^a \quad \text{или} \quad q = \sqrt[a]{\frac{P_a}{P_0}}.$$

Въ рѣшенныхъ сей-часъ задачахъ разсматривалось движеніе народонаселенія; но очевидно, что посредствомъ формулъ (108) можно получить рѣшеніе подобныхъ задачъ въ отношеніи къ числу рожденій и умершихъ.

Предложимъ еще нѣсколько вопросовъ, въ которыхъ соединимъ предъидущія предположенія съ указаніями таблицъ смертности.

66. Удержимъ въ этомъ N° означенія предъидущаго; сверхъ того, для сокращенія формулъ, условимся въ слѣдующемъ: пусть будутъ a_1, a_2, $a_3 \ldots a_x$ указанія таблицы смертности для числа N_0 рожденій; a_1, a_2, $a_3 \ldots$ будутъ изображать число живыхъ, изъ N_0 младенцевъ, по истеченіи одного года, двухъ лѣтъ, трехъ лѣтъ, и такъ далѣе. Вѣроятности, что новорожденный проживетъ одинъ годъ, два года, три года и проч., выразятся очевидно дробями

$$\frac{a_1}{N_0}, \quad \frac{a_2}{N_0}, \quad \frac{a_3}{N_0} \ldots\ldots \frac{a_x}{N_0},$$

которыя мы означимъ такъ:

$$[1], \quad [2], \quad [3] \ldots\ldots [x].$$

Въ силу такого знакоположенія, произведеніе $[x]N$, каковъ бы не былъ N, изобразитъ приблизительно число живыхъ, изъ N рожденій, по истеченіи x лѣтъ.

ВОПРОСЪ I. *Полагая предѣлъ человѣческой жизни во 100 лѣтъ, опредѣлить какъ велико будетъ народонаселеніе по истеченіи 100 лѣтъ, считая отъ настоящей эпохи, и предполагая притомъ коэффиціентъ приращенія и число годовыхъ рожденій извѣстными.*

Вотъ табличка, которая прямо ведетъ къ рѣшенію этого вопроса:

Число рожденій:			По истеченіи 100 лѣтъ будетъ въ живыхъ:
Вначалѣ		N_0	$[100]N_0$
послѣ	1 года	qN_0	$[99]qN_0$
.....	2 лѣтъ	q^2N_0	$[98]q^2N_0$
.....	3 лѣтъ	q^3N_0	$[97]q^3N_0$
....			......
послѣ	98 лѣтъ	$q^{98}N_0$	$[2]q^{98}N_0$
.....	99 лѣтъ	$q^{99}N_0$	$[1]q^{99}N_0$
.....	100 лѣтъ	$q^{100}N_0$	$q^{100}.N_0$

Слѣдовательно, совокупность всѣхъ оставшихся въ живыхъ, или полное народонаселеніе P_{100}, будетъ:

$$P_{100} = q^{100}N_0\left(1 + \frac{[1]}{q} + \frac{[2]}{q^2} + \frac{[3]}{q^3} + \ldots + \frac{[100]}{q^{100}}\right).$$

Эта формула, рѣшающая вопросъ, можетъ быть представленна въ другомъ видѣ, когда, въ силу перваго изъ уравненій (108), подставимъ въ ней N_{100} вмѣсто $q^{100}N_0$. Такимъ образомъ получимъ

$$P_{100} = N_{100}\left(1 + \frac{[1]}{q} + \frac{[2]}{q^2} + \frac{[3]}{q^3} + \cdots + \frac{[100]}{q^{100}}\right). \tag{109}$$

Замѣтимъ, что въ этой послѣдней формулѣ, народонаселеніе P_{100} и число годовыхъ рожденій N_{100}, относятся къ одной и той же эпохѣ.

Сообразно съ замѣчаніемъ, сдѣланнымъ въ N° 61, можно, въ формулѣ (109), замѣнить для большей точности количества

$$1, \quad [1], \quad [2], \ldots\ldots$$

средними величинами

$$\frac{1+[1]}{2}, \quad \frac{[1]+[2]}{2}, \quad \frac{[2]+[3]}{2}, \ldots\ldots;$$

тогда она приметъ видъ

$$P_{100} = N_{100}\left(\frac{1+[1]}{2} + \frac{[1]+[2]}{2q} + \frac{[2]+[3]}{2q^2} + \ldots\right).$$

Если допустимъ, что народонаселеніе неподвижно, то будетъ $q = 1$, и предъидущая формула, по замѣненіи въ ней количествъ P_{100} и N_{100} величинами P и N, доставитъ:

$$P = N\left(\frac{1}{2} + [1] + [2] + [3] + \ldots + [100]\right).$$

Сумма $\frac{1}{2}+[1]+[2]+\ldots+[100]$, на которую помножается N, есть ни что иное, какъ выраженіе средней жизни [N° 61, форм. (102)]. Слѣдовательно, при неподвижномъ народонаселеніи, средняя жизнь получится раздѣливъ народонаселеніе на число годовыхъ рожденій.

ВОПРОСЪ II-ой. *Зная число рожденій и число умершихъ по возрастамъ, а также коэффиціентъ приращенія, опредѣлить законъ смертности.*

Пусть N данное число рожденій, а

$$M_0,\quad M_1,\quad M_2,\quad M_3\ldots\ldots$$

числа умершихъ до 1 года, до 2-хъ, до 3-хъ... лѣтъ. Найдется

$$[1]=\frac{N-M_0}{N},\quad \text{откуда}\quad M_0=N(1-[1]).$$

За годъ до разсматриваемой эпохи, то есть до той, къ которой относится число N рожденій, число новорожденныхъ было только $\frac{N}{q}$; по закону же смертности отъ этихъ новорожденныхъ осталось въ живыхъ $[1]\frac{N}{q}$ по истеченіи перваго года, а $[2]\frac{N}{q}$ по истеченіи втораго. Слѣдовательно, между 1-ымъ и 2-ымъ годами умерло

$$M_1=[1]\frac{N}{q}-[2]\frac{N}{q}=\frac{N}{q}([1]-[2]).$$

За два года передъ разсматриваемымъ временемъ, число новорожденныхъ было $\frac{N}{q^2}$; по истеченіи двухъ лѣтъ изъ нихъ осталось въ живыхъ $[2]\frac{N}{q^2}$, а по истеченіи трехъ, только $[3]\frac{N}{q^2}$; поэтому, умершихъ между 2-мя и 3-мя годами было

$$M_2=\frac{N}{q^2}([2]-[3]).$$

Продолжая такимъ образомъ, и опредѣляя изъ полученныхъ уравненій вѣроятности [1], [2], [3] и проч., найдемъ

$$[1]=1-\frac{M_0}{N}$$

$$[2]=[1]-\frac{M_1q}{N}=1-\frac{M_0+M_1q}{N}$$

$$[3]=[2]-\frac{M_2q^2}{N}=1-\frac{M_0+M_1q+M_2q^2}{N}$$

$$[4]=[3]-\frac{M_3q^3}{N}=1-\frac{M_0+M_1q+M_2q^2+M_3q^3}{N}$$

....

При неподвижномъ народонаселеніи будетъ $q=1$, и предъидущія равенства примутъ видъ

$$[1]N=N-M_0$$

$$[2]N=N-M_0-M_1$$

$$[3]N=N-M_0-M_1-M_2$$

$$[4]N=N-M_0-M_1-M_2-M_3$$

....

Эти послѣднія формулы заключаютъ въ себѣ правило для составленія таблицъ смертности, при употребленіи числа умершихъ, распредѣленныхъ по возрастамъ, какъ то было показано въ N° 60.

Задачи о движеніи народонаселенія можно разнообразить по произволенію; ограничимся рѣшеніемъ еще одного вопроса.

ВОПРОСЪ III-ій. *Зная число рожденій* N *и число умершихъ* M *въ теченіи одного года, найти народонаселеніе* P *этого самаго года и коэффиціентъ приращенія* q, *предполагая притомъ законъ смертности извѣстнымъ.*

Пусть P, N и M относятся къ началу разсматриваемаго времени, напримѣръ къ истекшему году. Въ слѣдующемъ году народонаселеніе P обратится въ qP; оно будетъ состоять изъ qN новорожденныхъ и изъ $qP-qN$ человѣкъ, оставшихся въ живыхъ отъ народонаселенія P. Слѣдовательно, изъ народонаселенія P умерло $P-(qP-qN)$ человѣкъ; поэтому будетъ

$$M=P-(qP-qN),$$

или

$$M=qN-(q-1)P. \tag{110}$$

Въ это уравненіе входятъ двѣ неизвѣстныя P и q. Для опредѣленія ихъ нужно имѣть другое уравненіе, которое уже найдено при рѣшеніи 1-го ВОПРОСА. Дѣйствительно, подставивъ P и N на мѣсто P_{100} и N_{100} въ уравненіе (109), получимъ

$$\frac{P}{N}=1+\frac{[1]}{q}+\frac{[2]}{q^2}+\frac{[3]}{q^3}+\cdots+\frac{[100]}{q^{100}}. \tag{111}$$

Уравненія (110) и (111) рѣшаютъ задачу. Дѣйствительно, исключивъ изъ нихъ величину P, найдемъ

$$\frac{qN-M}{(q-1)N}=1+\frac{[1]}{q}+\frac{[2]}{q^2}+\ldots\ldots$$

или

$$\frac{N-M}{q-1}=N\Big(\frac{[1]}{q}+\frac{[2]}{q^2}+\frac{[3]}{q^3}+\cdots+\frac{[100]}{q^{100}}\Big).$$

Вотъ уравненіе, опредѣляющее коэффиціентъ приращенія q. Правда, по значительности степени этого уравненія, нельзя предложить общаго его рѣшенія. Но, руковод-

ствуясь извѣстнымъ способомъ Нютона, можно опредѣлить послѣдовательныя приближен-
ныя величины для неизвѣстной q безъ особенныхъ затрудненій, кромѣ продолжительности
выкладокъ. По найденному же q, формула (111) доставитъ непосредственно значеніе вто-
рой неизвѣстной P.

Читатели, желающіе почерпнуть свѣдѣнія о томъ, какъ принимается въ расчётъ *внѣш-
нее движеніе* народонаселенія, то есть, какимъ образомъ вводится въ вычисленіе увели-
ченіе или уменьшеніе народонаселенія, происходящее отъ переселеній и отъ водворенія ко-
лоній, могутъ обратиться къ Введенію, помѣщенному въ началѣ труда *Фурье: Recherches
statistiques sur la ville de Paris et le Département de la Seine*, 1821. Подобнаго же
рода изслѣдованія помѣщены въ XV томѣ *Compte rendu des Séances de l'Académie des
Sciences de Paris* за 1842 годъ, въ статьѣ *Г. Пулье**). Хотя этотъ трудъ и подвергся
справедливымъ замѣчаніямъ со стороны ГГ. *Матьё* и *Демонферана* (тотъ же XV томъ
стр. 1021 и 1096), однакожъ читатели найдутъ въ немъ, а равно и въ возраженіяхъ,
остроумный взглядъ на этотъ предметъ.

67. Распространимъ теперь сказанное въ предъидущихъ N°N° на опредѣленіе средней
продолжительности какихъ ни есть товариществъ или обществъ, составившихся съ извѣст-
ною цѣлію. Рѣшеніе слѣдующаго частнаго вопроса послужитъ лучшимъ объясненіемъ
этого предмета, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, наведетъ на дальнѣйшія изслѣдованія.

Положимъ, разсматривается значительное число товариществъ между двумя лицами,
изъ которыхъ одному A лѣтъ отъ роду, а другому A' лѣтъ. Спрашивается, какъ велика
средняя и вѣроятная продолжительность такого товарищества, а также вѣроятность
m-лѣтняго его существованія?

Изъ сказаннаго въ N° 61 легко найдется, помощію таблицы смертности, вѣроятность,
что человѣкъ, имѣющій отъ роду A лѣтъ, проживетъ еще m лѣтъ, то есть достигнетъ
возраста $A+m$ лѣтъ. Пусть будетъ p_1 эта вѣроятность. Изобразимъ чрезъ p_2 вѣроят-
ность, что человѣкъ, имѣющій отъ роду A' лѣтъ, достигнетъ $A'+m$ лѣтъ. Произ-
веденіе $p_1 . p_2$ опредѣлитъ сложную вѣроятность, что товарищество будетъ существовать
по истеченіи m лѣтъ. Сверхъ того, если означимъ чрезъ s число разсматривае-
мыхъ товариществъ, которое предполагаемъ весьма значительнымъ, то членъ разложенія
$[p_1 . p_2 + (1 - p_1 . p_2)]^s$, заключающій множителемъ $(p_1 p_2)^i (1 - p_1 p_2)^{s-i}$, изобразитъ вѣроят-
ность, что изъ числа s товариществъ, i будутъ существовать по истеченіи m лѣтъ. Эта
вѣроятность опредѣлится выраженіемъ

*) *Mémoire sur les loix générales de la population*, par M. Pouillet, стр. 861.

$$\frac{1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots(s-i)}(p_1 p_2)^i (1 - p_1 p_2)^{s-i}.$$

Наибольшее значеніе найденной вѣроятности (N° 18) соотвѣтствуетъ тому предположенію,
что показатели i и $s-i$ пропорціональны величинамъ $p_1 p_2$ и $1 - p_1 p_2$; и такъ, найдется

$$\frac{i}{p_1 p_2} = \frac{s-i}{1 - p_1 p_2}, \quad \text{откуда} \quad i = s . p_1 p_2.$$

Вотъ вѣроятнѣйшее число товариществъ, которыя будутъ существовать по истеченіи
m лѣтъ. Очевидно, что въ томъ же предположеніи, то есть, при весьма значительномъ s,
произведеніе sp_1 изобразитъ приблизительно число лицъ, имѣвшихъ отъ роду A лѣтъ при
вступленіи въ товарищество, и оставшихся въ живыхъ по прошествіи m лѣтъ, а sp_2 то̀
же самое въ разсужденіи тѣхъ лицъ, которымъ было отъ роду A' лѣтъ. На такомъ
основаніи легко составить таблицу смертности для разсматриваемаго рода товарищества.
Дѣйствительно, пусть будетъ p' число, соотвѣтствующее въ обыкновенной таблицѣ смерт-
ности возрасту A, а q', возрасту $A+m$. Получимъ весьма приблизительно $p_1 = \frac{q'}{p'}$. Изо-
бразивъ чрезъ p'' и q'' показанія той же таблицы, соотвѣтствующія годамъ A' и $A'+m$,
найдется $p_2 = \frac{q''}{p''}$. Слѣдовательно

$$i = s . p_1 p_2 = s . \frac{q' q''}{p' p''}.$$

Посредствомъ этой формулы составится безъ малѣйшаго затрудненія таблица различ-
ныхъ значеній числа i по годамъ. Сумма всѣхъ чиселъ вычисленной такимъ образомъ та-
блицы, раздѣленная на s, изобразитъ *среднюю продолжительность* товарищества, заклю-
ченнаго между двумя лицами, изъ которыхъ одному A лѣтъ, а другому A' лѣтъ. Вѣроятная
продолжительность товарищества опредѣлится еще проще посредствомъ этой же таблицы,
какъ объяснено въ N° 61.

Сказанное здѣсь прямо относится къ вопросу о средней и вѣроятной продолжитель-
ности браковъ. Дѣйствительно, можно положить, что одно изъ двухъ лицъ, составляю-
щихъ товарищество, есть мужъ, а другое, жена. Въ такомъ предположеніи стоитъ только
принять A за возрастъ вступающаго въ супружество, а p', q' за указанія таблицы смерт-
ности, составленной для мужчинъ, и соотвѣтствующія возрастамъ A и $A+m$; также,
приписать буквамъ A', p'', q'' тѣ же значенія въ отношеніи къ женщинѣ. Получимъ, какъ
и выше, формулу $i = s . \frac{q' q''}{p' p''}$, въ которой i и s имѣютъ одинаковый смыслъ съ прежнимъ.
Здѣсь представляется вопросъ объ опредѣленіи вѣроятности этого результата i. Иначе,
требуется узнать, какъ велика вѣроятность, что дѣйствительное число i существующихъ

браковъ по истеченіи m лѣтъ, разнится отъ опредѣленнаго выше $s\cdot\frac{q'q''}{p'p''}$ не болѣе какъ даннымъ числомъ, напримѣръ $\pm t$, или, иначе, что i заключается между предѣлами $s\cdot\frac{q'q''}{p'p''}\mp t$, гдѣ t значительно меньше числа $s\cdot\frac{q'q''}{p'p''}$. Рѣшеніе этого вопроса требуетъ вычисленій довольно сложныхъ: мы не будемъ останавливаться на немъ тѣмъ болѣе, что въ послѣднемъ N° этой Главы помѣщено рѣшеніе совершенно подобной задачи. Впрочемъ, читатели найдутъ подробное изложеніе упоминаемаго вопроса у Лапласа, въ его *Théorie analytique des Probabilités* (стр. 416), гдѣ положено для простоты $A=A'$, $p'=p''$ и $q'=q''$.

Когда товарищество будетъ состоять изъ трехъ, четырехъ и вообще изъ какого ни есть числа лицъ, то, основываясь на тѣхъ же началахъ какъ выше, легко опредѣлить вѣроятнѣйшее число товариществъ, существующихъ по истеченіи извѣстнаго числа лѣтъ. Дѣйствительно, положимъ, что разсматривается значительное число s обществъ, каждое изъ r лицъ; пусть будутъ A_1, A_2, $A_3 \,..A_r$ лѣта участниковъ при учрежденіи общества. Изобразимъ чрезъ $p'\; p''\; p'''\ldots p^{(r)}$ числа, взятыя изъ таблицы смертности и соотвѣтствующія возрастамъ A_1, A_2, $A_3\ldots A_r$, а чрезъ q', q'', $q'''\ldots q^{(r)}$ показанія той же таблицы, относящіяся къ возрастамъ A_1+m, A_2+m, $A_3+m,\ldots A_r+m$. Подъ m мы разумѣемъ то́ число лѣтъ, по прошествіи которыхъ желаемъ знать, сколько изъ всѣхъ s разсматриваемыхъ обществъ, осталось нерасторгнутыхъ смертію лицъ, вступившихъ въ нихъ. Пусть это существующее число обществъ будетъ i. Найдется, подобно предъидущему,

$$i = s\cdot\frac{q'q''q'''\ldots q^{(r)}}{p'p''p'''\ldots p^{(r)}};$$

этотъ результатъ будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ s значительнѣе, и чѣмъ таблицы смертности вѣрнѣе. Если всѣ лица, составляющія товарищества, будутъ одного и того же возраста при учрежденіи его, то получимъ $p'=p''=p'''=\ldots=p^{(r)}$, $q'=q''=q'''=\ldots=q^{(r)}$, и слѣдовательно

$$i = s\cdot\frac{q'^r}{p'^r}.$$

Очевидно также, что сумма чиселъ i, соотвѣтствующихъ всѣмъ значеніямъ m, раздѣленная на s, изобразитъ среднюю продолжительность разсматриваемаго рода товариществъ.

68. Въ началѣ N° 61 мы сказали, что опредѣленіе степени точности результатовъ, получаемыхъ изъ таблицъ смертности, зависитъ отъ аналитическихъ формулъ, болѣе или менѣе сложныхъ. Эти формулы, для каждаго вопроса, выводятся изъ началъ, подробно изложенныхъ въ Главѣ VII. Пояснимъ этотъ предметъ примѣрами.

Въ N° 62 мы уже говорили о постоянномъ перевѣсѣ рожденій младенцевъ мужескаго

пола передъ женскимъ. Опредѣлимъ теперь вѣроятность, что возможность рожденій дѣтей мужескаго пола превышаетъ возможность рожденій женскаго пола.

Пусть будетъ p число мужескихъ рожденій, а q число женскихъ, наблюденныхъ въ теченіи извѣстнаго промежутка времени въ какомъ либо городѣ или странѣ. Изобразимъ чрезъ x вѣроятность, что дитя, который долженъ родиться, будетъ мальчикъ; $1-x$ изобразитъ вѣроятность, что это дитя будетъ дѣвочка. Вѣроятность *a priori*, что изъ числа $p+q$ рожденій, будетъ p мужескихъ а q женскихъ, опредѣлится произведеніемъ

$$\frac{1\,2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}\,x^p(1-x)^q.$$

Слѣдовательно, положивъ для простоты

$$x^p(1-x)^q = y,$$

и принявъ за предѣлы величины x, числа $\frac{1}{2}$ и 1, получимъ для вѣроятности P, что x заключается между предѣлами $\frac{1}{2}$ и 1, слѣдующее выраженіе [N° 54 формула (90)]:

$$P = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} ydx}{\int_0^1 ydx}.$$

Взявъ за предѣлы верхняго интеграла числа $\frac{1}{2}$ и 1, мы тѣмъ самымъ очевидно выразили, что P изображаетъ вѣроятность бо́льшей возможности рожденія младенца мужескаго пола передъ женскимъ.

Найдемъ теперь по приближенію числитель дроби, опредѣляющей величину P, то есть интегралъ

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} ydx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^p(1-x)^q dx,$$

не теряя изъ виду, что p и q означаютъ числа весьма большія. Хотя мы и вывели этотъ интегралъ въ конечномъ видѣ [N° 58 формула (100)], но, при значительныхъ числахъ p и q, вычисленіе посредствомъ упоминаемой формулы, по продолжительности своей, почти невыполнимо. И такъ, предложимъ другой, приближенный способъ. Такъ какъ

$$\int_0^1 ydx = \int_0^{\frac{1}{2}} ydx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} ydx,$$

то и найдется

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} ydx = \int_0^1 ydx - \int_0^{\frac{1}{2}} ydx,$$

или

$$P = 1 - \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} y dx}{\int_0^1 y dx}.$$

Отсюда видимъ, что вопросъ приводится къ опредѣленію двухъ интеграловъ $\int_0^{\frac{1}{2}} y dx$ и $\int_0^1 y dx$.

Для опредѣленія интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q dx,$$

полагаемъ

$$x^p (1-x)^q = \frac{1}{2^{p+q}} \cdot e^{-t}, \qquad (112)$$

такъ что при $t = 0$, x обращается въ $\frac{1}{2}$. Выведемъ теперь изъ уравненія (112) величину x въ функціи t; Маклоренова теорема доставитъ разложеніе

$$x = \frac{1}{2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 \frac{t^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

въ которомъ $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 \ldots$ изображаютъ значенія производныхъ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2} \ldots$ для $t = 0$, или, что̀ всё равно, для $x = \frac{1}{2}$.

Написавъ уравненіе (112) въ логариѳмическомъ видѣ

$$p \log. x + q \log. (1-x) = -t - (p+q) \log. 2,$$

и дифференцируя его потомъ нѣсколько разъ сряду, получимъ

$$\left(\frac{p}{x} - \frac{q}{1-x}\right) \frac{dx}{dt} = -1$$

$$-\left(\frac{p}{x^2} + \frac{q}{(1-x)^2}\right) \frac{dx^2}{dt^2} + \left(\frac{p}{x} - \frac{q}{1-x}\right) \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Для опредѣленія величинъ $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 \ldots$ изъ этихъ уравненій, должно положить въ нихъ $x = \frac{1}{2}$; тогда найдется

$$2(p-q)\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -1, \quad -4(p+q)\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + 2(p-q)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = 0, \ldots\ldots$$

откуда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -\frac{1}{2(p-q)}, \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = \frac{1}{2(p-q)} \cdot \frac{p+q}{(p-q)^2}, \ldots\ldots$$

Слѣдовательно

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(p-q)} \left\{ t - \frac{p+q}{(p-q)^2} \cdot \frac{t^2}{1.2} + \ldots. \right\};$$

дифференцируя это выраженіе, получимъ

$$dx = -\frac{1}{2(p-q)} \left\{ 1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} \cdot t + \ldots. \right\} dt.$$

Замѣтимъ теперь, что въ силу уравненія (112), предѣлы 0 и $\frac{1}{2}$ въ отношеніи къ x, замѣняются соотвѣтственно предѣлами $+\infty$ и 0 въ разсужденіи t; поэтому будетъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q dx = -\frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)} \int_{+\infty}^0 \left\{ 1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} \cdot t + \ldots. \right\} e^{-t} dt,$$

или, перемѣнивъ порядокъ предѣловъ,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q dx = \frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)} \left\{ \int_0^\infty e^{-t} dt - \frac{p+q}{(p-q)^2} \int_0^\infty e^{-t} t dt + \ldots. \right\}.$$

Но извѣстно, что

$$\int_0^\infty e^{-t} dt = 1, \quad \int_0^\infty e^{-t} t dt = 1, \ldots. \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = 1.2.3 \ldots n;$$

слѣдовательно, получимъ окончательно:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q dx = \frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)} \left\{ 1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \ldots. \right\}. \qquad (113)$$

Для вычисленія интеграла, входящаго въ знаменатель дроби, выражающей вѣроятность P, съ точностію до величинъ порядка $\frac{1}{p}$ или $\frac{1}{q}$, употребляемъ пріёмъ подобный тому, которымъ руководствовались въ N° 56; но, вмѣсто формулы (18) [ГЛАВА II, N° 21), беремъ формулу (17) того же N° 21. На такомъ основаніи получимъ

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = e \cdot \frac{p^p q^q \sqrt{2\pi pq}}{(p+q+1)^{p+q+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{12p}\right)\left(1 + \frac{1}{12q}\right)}{1 + \frac{1}{12(p+q+1)}}.$$

Такъ какъ мы условились удерживать величины порядка $\frac{1}{p}$ или $\frac{1}{q}$, то количество $(p+q+1)^{p+q+\frac{3}{2}}$ не можетъ быть замѣнено, какъ въ N° 56, произведеніемъ $(p+q)^{p+q+1} . \sqrt{p+q} . e$. Чтобъ получить его съ требуемою точностію, даемъ ему сперва видъ

$$(p+q+1)^{p+q+\frac{3}{2}} = (p+q)^{p+q+\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{p+q}\right)^{p+q} \left(1 + \frac{1}{p+q}\right)^{\frac{3}{2}},$$

и принявъ потомъ для краткости $p+q=s$, пишемъ разложеніе

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)^s=$$

$$1+1+\left(1-\frac{1}{s}\right)\frac{1}{1.2}+\left(1-\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{2}{s}\right)\frac{1}{1.2.3}+\left(1-\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{2}{s}\right)\left(1-\frac{3}{s}\right)\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots$$

Отсюда, откидывая степени дроби $\frac{1}{s}$, превышающія первую,

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)^s=e-\frac{1}{s}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1+2}{1.2.3}+\frac{1+2+3}{1.2.3.4}+\frac{1+2+3+4}{1.2.3.4.5}+\cdots\right].$$

Но, легко видѣть, что рядъ, заключающійся въ квадратныхъ скобкахъ, равенъ величинѣ $\frac{1}{2}e$; дѣйствительно, общій членъ этого ряда будетъ

$$\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{1.2.3\ldots n}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{1.2.3\ldots n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots(n-2)},$$

почему

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1+2}{1.2.3}+\frac{1+2+3}{1.2.3.4}+\frac{1+2+3+4}{1.2.3.4.5}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\right)=\frac{1}{2}e^{*)}.$$

И такъ

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)^s=e\left(1-\frac{1}{2s}\right)=e\left(1-\frac{1}{2(p+q)}\right),$$

и наконецъ

$$(p+q+1)^{p+q+\frac{3}{2}}=e(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{2(p+q)}\right)\left(1+\frac{1}{p+q}\right)^{\frac{3}{2}}=e(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{p+q}\right).$$

Если теперь въ знаменателѣ дроби $\frac{1}{12(p+q+1)}$ откинемъ 1 передъ суммою $p+q$, то, при допущенной точности, получимъ

$$\left(1+\frac{1}{p+q}\right)\left(1+\frac{1}{12(p+q)}\right)=1+\frac{13}{12(p+q)},$$

и окончательно

$$\frac{\left(1+\frac{1}{12p}\right)\left(1+\frac{1}{12q}\right)}{1+\frac{13}{12(p+q)}}=\left(1+\frac{1}{12p}\right)\left(1+\frac{1}{12q}\right)\left(1+\frac{13}{12(p+q)}\right)^{-1}=1-\frac{13pq-(p+q)^2}{12pq(p+q)}.$$

---

*) Это простое и довольно любопытное преобразованіе ряда, выражающаго трансцендентную величину $\frac{1}{2}e$, кажется не замѣченное, приводитъ также непосредственно къ безконечной строкѣ

$$e=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{1.3.4}+\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{1.3.4.5}+\frac{1}{1.2.4.5}+\frac{1}{1.2.3.5}+\cdots\right],$$

законъ которой очевиденъ.

Слѣдовательно

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx=\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q+1}}\cdot\sqrt{\frac{2\pi pq}{p+q}}\left\{1-\frac{13pq-(p+q)^2}{12pq(p+q)}+\cdots\right\}. \qquad (114)$$

И такъ, на основаніи формулъ (113) и (114), приближенное значеніе вѣроятности P будетъ:

$$P=1-\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q+\frac{3}{2}}}{(p-q)p^{p+\frac{1}{2}}.q^{q+\frac{1}{2}}.\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{p+q}{(p-q)^2}+\frac{13pq-(p+q)^2}{12pq(p+q)}-\cdots\right\}. \qquad (115)$$

Вычисленіе этой формулы по обыкновеннымъ логариѳмическимъ таблицамъ не удобно по причинѣ значительности чиселъ p и q; надобно имѣть логариѳмы чиселъ p, q и $\frac{p+q}{2}$ не менѣе какъ съ двѣнадцатью десятичными цифрами. Поэтому, выгоднѣе прямо вычислить логариѳмъ выраженія

$$\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q+\frac{3}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}.q^{q+\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p.q^q}\cdot\frac{p+q}{2}\sqrt{\frac{p+q}{2pq}},$$

или только перваго множителя

$$\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p.q^q},$$

потому что вычисленіе произведенія $\frac{p+q}{2}\sqrt{\frac{p+q}{2pq}}$ не представляетъ никакого затрудненія.

Замѣтимъ, что

$$\log.\left[\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p.q^q}\right]=(p+q)\log.\left(\frac{p+q}{2}\right)-p\log.p-q\log.q$$

$$=-p\log.\left(\frac{2p}{p+q}\right)-q\log.\left(\frac{2q}{p+q}\right),$$

и какъ сверхъ того

$$\frac{2p}{p+q}=1+\frac{p-q}{p+q},\quad \frac{2q}{p+q}=1-\frac{p-q}{p+q},$$

то получимъ

$$\log.\left[\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p.q^q}\right]=-p\log.\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)-q\log.\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right).$$

При Неперовыхъ логариѳмахъ, разложеніе второй части доставитъ:

$$\log.\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)=\frac{p-q}{p+q}-\frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4+\ldots\ldots$$

$$\log.\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right)=-\frac{p-q}{p+q}-\frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4-\ldots\ldots$$

Пусть будутъ

$$+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n-1}-\frac{1}{2n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n}$$

два смежные члена разложенія $\log.\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)$, а

$$-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n-1}-\frac{1}{2n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n}$$

два смежные члена разложенія $\log.\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right)$. Помноживъ первые на $-p$, а вторые на $-q$, и взявъ алгебрическую сумму, получимъ:

$$-\frac{p-q}{2n-1}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n-1}+\frac{p+q}{2n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n}=$$

$$-(p+q)\left[\frac{1}{2n-1}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n}-\frac{1}{2n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n}\right]=-(p+q)\cdot\frac{1}{(2n-1)2n}\cdot\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n}.$$

И такъ, искомое разложеніе логариѳма будетъ заключать только чётныя степени дроби $\frac{p-q}{p+q}$. На основаніи послѣдняго приведенія, получимъ:

$$\log.\left[\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p.q^q}\right]=-(p+q)\left\{\frac{1}{1.2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2+\frac{1}{3.4}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4+\frac{1}{5.6}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^6+\ldots\ldots\right\}. \quad (116)$$

Для перехода отъ этого логариѳма къ табличному, стоитъ только вторую часть формулы (116) помножить на модуль, то есть на число 0,43429448.... Придавъ къ этому логариѳму табличный же логариѳмъ выраженія

$$\frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}},$$

и пріискавъ число, соотвѣтствующее этой суммѣ, получимъ численное значеніе коэффиціента при безконечной строкѣ $1-\frac{p+q}{(p-q)^2}+\cdots$ [формула (115)]; наконецъ, перемноживъ между собою эти два числа, и вычтя произведеніе изъ 1, найдемъ искомую вѣроятность P.

Приложимъ теперь найденныя формулы къ рожденіямъ въ Петербургѣ. Въ теченіи десяти лѣтъ, изъ издаваемыхъ у насъ Вѣдомостей усматриваемъ, что въ Петербургѣ съ 1835 по 1844 годъ родилось младенцевъ Православнаго исповѣданія, въ томъ числѣ незаконнорожденныхъ и подкидышей: мужескаго пола 56917, а женскаго

пола 54636*). И такъ, въ нашемъ вопросѣ $p=56917$, $q=54636$. Отсюда выходитъ, что приближенное отношеніе числа рожденій мужескаго пола къ числу женскаго, для Петербурга, будетъ почти $\frac{23}{24}$.

Для вычисленія по формулѣ (115) вѣроятности P правдоподобія рожденія мальчика передъ дѣвочкой, будемъ искать послѣдовательно: Неперовъ логариѳмъ числа $\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p.q^q}$. По формулѣ (116) найдется, что онъ равенъ: $-23{,}3212701$. Табличный логариѳмъ того же числа $=-10{,}0848694$. Табличный логариѳмъ выраженія

$$\frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}} \text{ равенъ: } -1{,}3314434.$$

Сумма этихъ двухъ логариѳмовъ $=-11{,}4163128$. Если положимъ

$$\log.\frac{k}{10^{12}}=-11{,}4163128,$$

то получимъ

$$\log.k=0{,}5836872,$$

откуда $k=3{,}8343\ldots$, и слѣдовательно $\frac{k}{10^{12}}=\frac{0{,}38343\ldots}{10^{11}}$.

Рядъ $1-\frac{p+q}{(p-q)^2}+\cdots=1-0{,}02144\ldots+\ldots=0{,}97856\ldots$

Произведеніе $\frac{0{,}38343\ldots}{10^{11}}\times 0{,}97856\cdots=\frac{0{,}375209\ldots}{10^{11}}$.

Наконецъ

$$P=1-\frac{0{,}375209\ldots}{10^{11}}.$$

*) Вотъ распредѣленіе этихъ чиселъ по годамъ:

Годы:	*Мужескаго пола:*	*Женскаго пола:*	*Всего:*
1835	4520	4353	8873
1836	4414	4127	8541
1837	5649	5471	11120
1838	5600	5443	11043
1839	5793	5743	11536
1840	5919	5751	11670
1841	6162	5894	12056
1842	6408	6170	12578
1843	5711	5289	11000
1844	6741	6393	13134

Эта вѣроятность такъ близка къ единицѣ, что возможность рожденія младенца мужескаго пола преимущественно предъ женскимъ, въ Петербургѣ, должно считать въ высшей степени вѣроятною. Вообще, этотъ фактъ, подтверждающійся всюду, можно принимать за физіологическій законъ, не подверженный никакому сомнѣнію.

69. Въ № 61 мы показали какимъ образомъ, посредствомъ таблицы смертности, опредѣляется цѣлое народонаселеніе. Съ тою же цѣлію, для обширнаго Государства, можно употребить число годовыхъ рожденій; но, въ такомъ случаѣ, необходимо знать по приближенію отношеніе народонаселенія къ числу годовыхъ рожденій. Самое вѣрное средство для полученія этого отношенія состоитъ въ томъ, чтобы, на многихъ пунктахъ Государства, произвести точное народосчисленіе; сравнивая полученное показаніе съ числомъ рожденій въ тѣхъ же мѣстахъ, въ продолженіи нѣсколькихъ лѣтъ, найдется требуемое отношеніе. Потомъ уже, зная число годовыхъ рожденій для всего Государства, получится и самое его народонаселеніе посредствомъ простой пропорціи. Такое опредѣленіе будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ число избранныхъ пунктовъ или округовъ значительнѣе, и распредѣлено на бо́льшемъ пространствѣ. Дѣйствительно, при соблюденіи этихъ условій, разнообразіе климатовъ и другія мѣстныя обстоятельства, имѣющія вліяніе на плодовитость, будутъ отчасти устранены или уравновѣшены.

Такимъ образомъ Лапласъ нашелъ, что число жителей во Франціи, въ 1802 году, можно было полагать, съ достаточною степенью приближенія, равнымъ 28352845; онъ получилъ этотъ выводъ на основаніи данныхъ, которыя, по его просьбѣ, Французское Правительство предписало собрать на разныхъ пунктахъ Государства. Въ тридцати департаментахъ Франціи были выбраны общины, коихъ меры, по усердію и знанію дѣла, признаны наиболѣе способными къ доставленію точнѣйшихъ свѣдѣній. Народосчисленіе въ этихъ общинахъ, приведенное къ окончанію 22 Сентября 1802 года, доставило число 2037615 жителей обоего пола. Рожденій, браковъ и умершихъ въ теченіи трехъ лѣтъ, отъ 22 Сентября 1799 года по 22 Сентября 1802 года, для всѣхъ этихъ общинъ, оказалось:

Рожденій:	*Браковъ:*	*Умершихъ:*
110312 *муж. пола.*	46037	103659 *муж. пола.*
105287 *женск. пола.*		99443 *женск. пола.*

Изъ этихъ данныхъ выводятся слѣдующіе численные результаты для Франціи, относящіеся къ показанной выше эпохѣ: отношеніе числа рожденій мальчиковъ къ дѣвочкамъ, выходитъ какъ 22 къ 21; число браковъ къ числу рожденій какъ 3 къ 14; наконецъ,

отношеніе народонаселенія къ числу годовыхъ рожденій какъ 28,352845 къ 1. Отсюда Лапласъ, принявъ число годовыхъ рожденій во Франціи равнымъ одному милліону, а это опредѣленіе было весьма близко къ истинѣ, заключилъ, что народонаселеніе Франціи составляло въ то̀ время 28352845 жителей обоего пола. Далѣе, посредствомъ анализа вѣроятностей, онъ вычислилъ погрѣшность, которой можно опасаться при этомъ выводѣ. Предложимъ это вычисленіе придерживаясь пріёмовъ и изложенія Французскаго геометра, но прибавляя къ нимъ нѣкоторыя объясненія и необходимыя развитія.

Лапласъ воображаетъ сосудъ, заключающій въ себѣ безконечное число бѣлыхъ и чёрныхъ шаровъ, отношеніе которыхъ неизвѣстно. Положимъ, что при первомъ пріёмѣ, вынули изъ сосуда p шаровъ, въ числѣ которыхъ находилось q бѣлыхъ, а при второмъ пріёмѣ выпуто неизвѣстное число шаровъ, между которыми было q' бѣлыхъ. Для опредѣленія этого неизвѣстнаго числа, полагаемъ, что отношеніе его къ q' одинаково съ отношеніемъ p къ q, и получаемъ такимъ образомъ величину $\frac{pq'}{q}$. Такое опредѣленіе, при значительныхъ величинахъ p, q, q', будетъ мало разнствовать отъ истиннаго въ слѣдствіе теоремы *Якова Бернулли*. Теперь, предложимъ себѣ вопросъ, найти вѣроятность, что число шаровъ, вынутыхъ изъ сосуда при второмъ пріёмѣ, заключается между предѣлами $\frac{pq'}{q} \mp T$, разумѣя подъ T число, которое чувствительнымъ образомъ меньше $\frac{pq'}{q}$. Пусть будетъ x неизвѣстное отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ, заключающихся въ сосудѣ, къ полному числу шаровъ, или, иначе, простая вѣроятность появленія бѣлаго шара. Вѣроятность *a priori* сложнаго событія, наблюденнаго при первомъ пріёмѣ, изобразится членомъ, умноженнымъ на $x^q(1-x)^{p-q}$ въ разложеніи $[x+(1-x)]^p$, и слѣдовательно будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3.\cdot q.1.2.3\ldots(p-q)}\, x^q(1-x)^{p-q}.$$

Вѣроятность величины x, выведенная изъ наблюденнаго сложнаго событія, къ которому привелъ насъ первый пріёмъ, изобразится дробью

$$\frac{x^q(1-x)^{p-q}dx}{\int_0^1 x^q(1-x)^{p-q}dx}, \qquad (117)$$

что̀ слѣдуетъ изъ формулы (92), выведенной въ № 55.

Положимъ теперь, что полное число шаровъ, при второмъ пріёмѣ, равно $\frac{pq'}{q}+t$. Вѣроятность наблюденнаго числа q' бѣлыхъ, вычисленная *a priori*, будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+t\right)}{1.2.3\ldots q'.1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+t-q'\right)}.x^{q'}(1-x)^{\frac{pq'}{q}+t-q'}. \qquad (118)$$

Умножимъ вѣроятность (117) предположенія на вѣроятность (118) новаго событія, и возьмемъ сумму всѣхъ подобныхъ произведеній, распространяя ее на всѣ возможныя значенія x, отъ $x=0$ до $x=1$; получимъ въ силу N° 55 вѣроятность P', выведенную изъ наблюденныхъ двухъ событій, что полное число вынутыхъ шаровъ, при второмъ приёмѣ, равнялось $\frac{pq'}{q}+t$. И такъ

$$P'=\frac{1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+t\right)\int_0^1 x^{q+q'}(1-x)^{p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'}.dx}{1.2.3\ldots q'.1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+t-q'\right)\int_0^1 x^{q}(1-x)^{p-q}.dx}. \qquad (119)$$

Прежде нежели отъ вѣроятности P' перейдемъ къ искомой вѣроятности P, что число вынутыхъ шаровъ, при второмъ приёмѣ, заключается между предѣлами $\frac{pq'}{q}\mp T$, преобразуемъ приличнымъ образомъ вторую часть формулы (119), которая, по причинѣ значительности чиселъ p, q, q', требуетъ особеннаго приготовленія для численныхъ приложеній. На этотъ конецъ вспомнимъ, что въ силу формулъ (18) [N° 21] и (97) [N° 56], имѣемъ:

$$1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+t\right)=\left(\frac{pq'}{q}+t\right)^{\frac{pq'}{q}+t+\frac{1}{2}}.e^{-\left(\frac{pq'}{q}+t\right)}.\sqrt{2\pi}$$

$$1.2.3\ldots q'=q'^{\,q'+\frac{1}{2}}.e^{-q'}.\sqrt{2\pi}$$

$$1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+t-q'\right)=\left(\frac{pq'}{q}+t-q'\right)^{\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}}.e^{-\left(\frac{pq'}{q}+t-q'\right)}.\sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^1 x^{q+q'}(1-x)^{p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'}.dx = \sqrt{2\pi}.\frac{(q+q')^{q+q'+\frac{1}{2}}\left(p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'\right)^{p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}}}{\left(p+\frac{pq'}{q}+t\right)^{p+\frac{pq'}{q}+t+\frac{3}{2}}}$$

$$\int_0^1 x^{q}(1-x)^{p-q}dx=\sqrt{2\pi}.\frac{q^{q+\frac{1}{2}}.(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{3}{2}}}.$$

Въ слѣдствіе этихъ формулъ, получимъ послѣ всѣхъ сокращеній:

$$\frac{1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+t\right)}{1.2.3\ldots q'\ 1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+t-q'\right)}=$$

$$\frac{p^{\frac{pq'}{q}+t+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}.q'^{\frac{1}{2}}.q^{q'}(p-q)^{\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}}}.\frac{\left(1+\frac{qt}{pq'}\right)^{\frac{pq'}{q}+t+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{qt}{q'(p-q)}\right)^{\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}}}.$$

Подобнымъ образомъ найдется:

$$\frac{\int_0^1 x^{q+q'}(1-x)^{p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'}.dx}{\int_0^1 x^{q}(1-x)^{p-q}.dx}=$$

$$\frac{q^{q'+\frac{1}{2}}(p-q)^{\frac{pq'}{q}+t-q'}}{p^{\frac{pq'}{q}+t}(q+q')^{\frac{1}{2}}}.\frac{\left(1+\frac{qt}{(p-q)(q+q')}\right)^{p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{qt}{p(q+q')}\right)^{p+\frac{pq'}{q}+t+\frac{3}{2}}}.$$

Произведеніе этихъ двухъ выраженій, опредѣляющее величину P', будетъ:

$$P'=\sqrt{\frac{pq}{2\pi q'(p-q)(q+q')}}.M,$$

гдѣ, для краткости,

$$M=\frac{\left(1+\frac{qt}{pq'}\right)^{\frac{pq'}{q}+t+\frac{1}{2}}.\left(1+\frac{qt}{(p-q)(q+q')}\right)^{p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{qt}{q'(p-q)}\right)^{\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}}.\left(1+\frac{qt}{p(q+q')}\right)^{p+\frac{pq'}{q}+t+\frac{3}{2}}}.$$

Взявъ Неперовъ логариомъ числа M, получимъ:

$$\log.M=\left(\frac{pq'}{q}+t+\frac{1}{2}\right)\log.\left(1+\frac{qt}{pq'}\right)+\left(p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}\right)\log.\left(1+\frac{qt}{(p-q)(q+q')}\right)$$
$$-\left(\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}\right)\log.\left(1+\frac{qt}{q'(p-q)}\right)-\left(p+\frac{pq'}{q}+t+\frac{3}{2}\right)\log.\left(1+\frac{qt}{p(q+q')}\right).$$

Разложивъ логариомы въ ряды, и откинувъ третьи и высшія степени количества t, предполагаемаго весьма малымъ въ разсужденіи $\frac{pq'}{q}$, найдется:

$$\log.M=$$
$$\left(\frac{pq'}{q}+t+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{qt}{pq'}-\frac{q^2t^2}{2p^2q'^2}\right)+\left(p-q+\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{qt}{(p-q)(q+q')}-\frac{q^2t^2}{2(p-q)^2(q+q')^2}\right)$$
$$-\left(\frac{pq'}{q}+t-q'+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{qt}{q'(p-q)}-\frac{q^2t^2}{2q'^2(p-q)^2}\right)-\left(p+\frac{pq'}{q}+t+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{qt}{p(q+q')}-\frac{q^2t^2}{2p^2(q+q')^2}\right),$$

откуда, откинувъ въ произведеніяхъ третьи степени величины t, получимъ послѣ всѣхъ сокращеній:

$$\log. M = -\frac{q^3-2q^2q'+2pqq'}{2pq'(p-q)(q+q')}\cdot t - \frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')}\cdot t^2.$$

При составленіи коэффиціента у t^2, мы откинули тѣ члены, въ которыхъ измѣреніе знаменателя, въ отношеніи величинъ p, q, q', превосходило двумя единицами измѣреніе числителя, по причинѣ малости тѣхъ членовъ. Въ удержанномъ же коэффиціентѣ при t^2, измѣреніе знаменателя, въ отношеніи величинъ p, q, q', превосходитъ только единицею измѣреніе числителя; и дѣйствительно, $pq'(p-q)(q+q')$ состоитъ изъ четырехъ множителей, между тѣмъ какъ q^3 только изъ трехъ.

Положивъ для краткости

$$A = \frac{q^3-2q^2q'+2pqq'}{2pq'(p-q)(q+q')}, \quad B = \frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')},$$

и перейдя отъ логариѳма къ числу M, получимъ

$$M = e^{-At-Bt^2} = e^{-At}.e^{-Bt^2} = (1-At+\ldots)e^{-Bt^2}.$$

Слѣдовательно

$$P' = \sqrt{\frac{pq}{2\pi q'(p-q)(q+q')}}.(1-At+\ldots)e^{-Bt^2}. \tag{120}$$

Мы видѣли выше, что эта величина P' изображаетъ вѣроятность, выведенную изъ наблюденныхъ двухъ событій, что полное число вынутыхъ шаровъ, при второмъ пріёмѣ, равняется $\frac{pq'}{q}+t$. Но замѣтимъ вопервыхъ, что это полное число, когда разсматриваемъ его независимо отъ полученныхъ сложныхъ событій при двухъ пріёмахъ, можетъ принимать множество различныхъ значеній, какъ то:

$$\frac{pq'}{q}+t, \quad \frac{pq'}{q}+t+1, \quad \frac{pq'}{q}+t+2, \quad \text{и проч.}$$

а также

$$\frac{pq'}{q}+t-1, \quad \frac{pq'}{q}+t-2, \quad \frac{pq'}{q}+t-3 \quad \text{и проч.}$$

Сверхъ того вспомнимъ, что вѣроятность какого либо предположенія равняется вѣроятности наблюденнаго событія, вычисленной при томъ же предположеніи, и раздѣленной на сумму вѣроятностей того же событія, относящуюся ко всѣмъ возможнымъ предположеніямъ (N° 52). Примѣнивъ это правило къ настоящему случаю, мы усмотримъ, что различныя предположенія будутъ относиться къ числу $\frac{pq'}{q}+t$, которое, по смыслу вопроса, можетъ измѣняться отъ q' до $+\infty$, потому что число вынутыхъ шаровъ не можетъ быть

меньше q', и между тѣмъ можетъ простираться до безконечности. И такъ, количеству t можно будетъ приписать всѣ цѣлыя значенія отъ $t = -\left(\frac{pq'}{q}-q'\right) = -t_1$ до $t = +\infty$. Слѣдовательно, изобразивъ чрезъ P_1 вѣроятность числа $\frac{pq'}{q}+t$, при опредѣленномъ t, получимъ

$$P_1 = \frac{P'}{\sum\limits_{t=-t_1}^{t=+\infty} P'}.$$

Интегралъ въ конечныхъ разностяхъ, находящійся въ знаменателѣ этого выраженія, можно преобразовать въ обыкновенный; дѣйствительно, такъ какъ вообще имѣемъ (ПРИМѢЧАНІЕ I)

$$\Sigma yh = \int ydx - \frac{1}{2}.yh + \frac{1}{12}.\frac{dy}{dx}h^2 - \ldots,$$

гдѣ h изображаетъ конечное приращеніе перемѣнной x, то, по причинѣ показательной величины съ отрицательною степенью $-Bt^2$, входящей въ P', а также значительности предѣловъ $-t_1$ и $+\infty$ разсматриваемаго интеграла, можно, безъ ощутительной погрѣшности, откинуть члены, слѣдующіе за интеграломъ, и принять просто:

$$\sum_{t=-t_1}^{t=+\infty} P'h = \int_{-\left(\frac{pq'}{q}-q'\right)}^{+\infty} P'dt.$$

И такъ, помножая числитель и знаменатель величины P_1 на h, означающее здѣсь приращеніе перемѣнной t, и изображая это приращеніе чрезъ dt, получимъ

$$P_1 = \frac{P'dt}{\int_{-\left(\frac{pq'}{q}-q'\right)}^{+\infty} P'dt}.$$

По свойству функціи P', быстро уменьшающейся даже при посредственномъ увеличеніи перемѣнной t, предѣлъ $-\left(\frac{pq'}{q}-q'\right)$, довольно значительный по смыслу вопроса, можно замѣнить, безъ чувствительной погрѣшности, отрицательною безконечностію (ПРИМѢЧАНІЕ IV, конецъ § 2). Далѣе, подставивъ на мѣсто P' его величину, получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P'dt = \sqrt{\frac{pq}{2\pi q'(p-q)(q+q')}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bt^2}dt - A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bt^2}tdt\right\}.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bt^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bt^2}tdt = 0;$$

слѣдовательно, подставляя на мѣсто B равную ему величину, найдется

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P'dt = \frac{p}{q},$$

и, наконецъ

$$P_1 = \sqrt{\frac{q^3}{2\pi pq'(p-q)(q+q')}}.\left\{1-At+\dots\right\}e^{-Bt^2}.dt.$$

Теперь уже легко будетъ найти искомую вѣроятность P, что полное число шаровъ, вынутыхъ при второмъ пріёмѣ, заключается между предѣлами $\frac{pq'}{q}-T$ и $\frac{pq'}{q}+T$; для этого стоитъ только взять интегралъ функціи P_1 отъ $t=-T$ до $t=+T$. Получимъ

$$P = \sqrt{\frac{q^3}{2\pi pq'(p-q)(q+q')}}\left\{\int_{-T}^{+T} e^{-Bt^2}dt - A\int_{-T}^{+T} e^{-Bt^2}tdt\right\};$$

замѣтивъ же, что

$$\int_{-T}^{+T} e^{-Bt^2}tdt = 0,$$

найдемъ просто

$$P = \sqrt{\frac{q^3}{2\pi pq'(p-q)(q+q')}}\int_{-T}^{+T} e^{-\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')}.t^2}.dt.$$

Если положимъ

$$\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')}}.t = u,$$

то предъидущій интегралъ приметъ слѣдующій, весьма простой видъ:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-U}^{+U} e^{-u^2}du, \quad \text{гдѣ } U = T.\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')}}.$$

Сверхъ того, какъ подъинтегральная функція чётная, то можно замѣнить нулемъ нижній предѣлъ, удвоивъ интегралъ; тогда получимъ:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^U e^{-u^2}du.$$

Далѣе, принявъ въ соображеніе равенство

$$\int_0^\infty e^{-u^2}du = \int_0^U e^{-u^2}du + \int_U^\infty e^{-u^2}du,$$

откуда

$$\int_0^U e^{-u^2}du = \int_0^\infty e^{-u^2}du - \int_U^\infty e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_U^\infty e^{-u^2}du,$$

найдемъ окончательно:

$$\left.\begin{aligned} P &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_U^\infty e^{-u^2}du \\ \text{гдѣ } U &= T.\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')}}. \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

Эти двѣ формулы доставляютъ полное рѣшеніе занимающаго насъ вопроса. Дѣйствительно, можно предположить, что число p шаровъ, вынутыхъ при первомъ пріёмѣ, изображаетъ результатъ частныхъ народосчисленій, произведенныхъ на разныхъ пунктахъ Государства, а q число женщинъ, которыя, въ теченіи года, должны родить, или, что всё равно, q означаетъ число годовыхъ рожденій, соотвѣтствующее этому народосчисленію. Въ такомъ предположеніи, q' будетъ означать число годовыхъ рожденій для цѣлаго Государства, а P, вѣроятность, что полное его народонаселеніе заключается между предѣлами $\frac{pq'}{q} \mp T$.

По недостатку довольно точныхъ данныхъ, мы не можемъ сдѣлать приложенія формулъ (121) къ опредѣленію народонаселенія Россійскаго Государства. Для соображенія предлагаемъ численные результаты, относящіеся къ Франціи.

Лапласъ, сообразно съ приведенными выше данными, полагаетъ:

$$p = 2037615, \quad q = \frac{110313+103287}{3};$$

потомъ, принимая

$$q' = 1500000, \quad T = 500000,$$

находитъ:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_U^\infty e^{-u^2}du = \frac{1}{1162},$$

откуда

$$P = 1 - \frac{1}{1162}.$$

Изъ этого слѣдуетъ заключить, что при закладѣ, можно держать 1161 противъ единицы, что принявъ на полтора милліона рожденій 42529267 жителей, погрѣшность въ этомъ числѣ не превзойдетъ полу-милліона. При болѣе значительномъ T, вѣроятность P будетъ еще менѣе разнствовать отъ достовѣрности, въ чёмъ легко удостовѣриться, обративъ вниманіе на быстрое уменьшеніе интеграла $\int_U^\infty e^{-u^2}du$ съ увеличеніемъ U, или, что всё равно, съ возрастаніемъ T. При численномъ рѣшеніи подобныхъ задачъ, большую пользу принесетъ таблица интеграловъ $\int_T^\infty e^{-t^2}dt$, помѣщенная въ концѣ этой книги.

ГЛАВА IX.

О ПОЖИЗНЕННЫХЪ ДОХОДАХЪ, ВДОВЬИХЪ КАССАХЪ, ТОНТИНАХЪ, СБЕРЕГАТЕЛЬНЫХЪ КАССАХЪ И О СТРАХОВЫХЪ УЧРЕЖДЕНІЯХЪ ВООБЩЕ.

70. Въ предъидущей Главѣ мы разсмотрѣли съ подробностію многіе вопросы, относящіеся къ вѣроятностямъ жизни человѣческой. Теперь перейдемъ къ примѣчательнѣйшимъ примѣненіямъ изложенныхъ изслѣдованій къ разнымъ общеполезнымъ Учрежденіямъ, какъ то: къ опредѣленію пожизненныхъ доходовъ, единовременныхъ денежныхъ выдачъ, премій на застрахованія различнаго рода, зависящихъ также отъ закона смертности, и, кромѣ того, отъ нѣкоторыхъ другихъ данныхъ, опредѣляемыхъ наблюденіями. Приступая къ этому предмету, предложимъ сперва общія замѣчанія, необходимыя при рѣшеніи всякой задачи, въ которой принимаются въ расчётъ денежныя суммы и время ихъ обращенія.

Съ какою бы цѣлію не вносили лицу или Обществу извѣстную сумму для полученія со временемъ опредѣленной пенсіи или единовременной выдачи, эта сумма должна быть разсматриваема какъ капиталъ, измѣняющійся вмѣстѣ со временемъ его обращенія. И такъ, если капиталъ C_0 отданъ по c процентовъ со 100, то по истеченіи одного года онъ обратится въ $C_0+\frac{C_0.c}{100}=C_0\left(1+\frac{c}{100}\right)$; по прошествіи двухъ лѣтъ, принимая въ расчётъ сложные проценты, онъ изобразится чрезъ $C_0\left(1+\frac{c}{100}\right)^2$; по истеченіи трехъ лѣтъ, чрезъ $C_0\left(1+\frac{c}{100}\right)^3$, и такъ далѣе. Вообще, если, со времени его вклада, прошло t лѣтъ, то капиталъ C_0 обратится въ $C_0\left(1+\frac{c}{100}\right)^t$. Положимъ для краткости $k=1+\frac{c}{100}$; приращенный капиталъ, который означимъ чрезъ C_t, по истеченіи t лѣтъ будетъ:

$$\left.\begin{array}{r} C_t = k^t.C_0 \\ \text{гдѣ } k = 1+\frac{c}{100}. \end{array}\right\} \qquad (122)$$

Если бы требовалось узнать, какой капиталъ должно внести въ настоящее время, чтобы получить сумму C_t по истеченіи t лѣтъ, то, очевидно, слѣдовало бы изъ предъидущаго уравненія вывести величину C_0; слѣдовательно

$$C_0=\frac{C_t}{k^t}. \qquad (123)$$

На основаніи формулъ (122) и (123) легко приводить къ настоящему времени какъ самые вклады, такъ и выдачи денежныхъ суммъ при различныхъ срокахъ. Потомъ уже, при рѣшеніи какой либо задачи, въ которой разсматриваются капиталы, находящіеся въ обращеніи, уравниваютъ приходъ Общества съ его расходомъ, и получаютъ такимъ образомъ желаемую формулу. Впрочемъ, для покрытія издержекъ и для полученія извѣстной выгоды, Общество должно или увеличить нѣсколько платимую ему премію, или уменьшить выдаваемую имъ пенсію, противъ результата, показываемаго вычисленіемъ.

Приведеніе суммъ къ настоящему времени необходимо не только для вывода аналитическихъ формулъ, рѣшающихъ различные вопросы, которые мы приведемъ ниже, но и для самаго Общества, при общемъ сводѣ расчётовъ. Дѣйствительно, такъ какъ Общество получаетъ и выдаетъ разныя суммы въ различные сроки, то и не можетъ иначе опредѣлить, положимъ годовой результатъ своихъ дѣйствій, какъ приведя первоначально къ настоящему времени полный приходъ, и вычтя изъ него весь расходъ, отнесенный также къ настоящей эпохѣ. Впрочемъ, для надёжнаго существованія Общества, приходъ непремѣнно долженъ превышать расходъ, а это самое необходимо нарушитъ математическое равенство подобнаго оборота, склонивъ выгоду на сторону Общества. Но мы уже видѣли, говоря о *нравственномъ ожиданіи*, что не смотря на невыгоду со стороны *математическаго ожиданія* для людей, платящихъ преміи, свыше опредѣляемыхъ строгою безобидностію, они, при незначительномъ пожертвованіи, выигрываютъ въ отношеніи нравственномъ, обезпечивая самихъ себя или близкихъ имъ людей. Поэтому, при умѣренномъ избыткѣ платимой преміи противъ той, которую указываетъ правило математической безобидности, обѣ стороны, Общество и вкладчики, остаются въ выигрышѣ, первое, въ отношеніи математической выгоды, а вторые, въ разсужденіи нравственнаго ожиданія.

Пожизненные доходы, и вообще всякаго рода обороты, при которыхъ лицо вноситъ въ одинъ разъ или въ нѣсколько сроковъ извѣстныя суммы Обществу съ тѣмъ, чтобы

оно, по истеченіи опредѣленнаго времени, производило ему установленную пенсію, или выдало единовременно капиталъ, соразмѣрный вкладу, опредѣляется при пособіи надлежащихъ таблицъ смертности и вычисленія сложныхъ процентовъ. Мы приведемъ здѣсь рѣшеніе нѣсколькихъ вопросовъ, которые ознакомятъ читателя съ сущностію этого рода изслѣдованій.

71. ВОПРОСЪ I. *Человѣкъ, имѣющій* m *лѣтъ отъ роду, желаетъ получать пожизненную пенсію въ* p *рублей. Спрашивается, какой капиталъ онъ долженъ единовременно внести Обществу застрахованія жизни.*

Пусть будетъ y_m искомый капиталъ, а N значительное число лицъ, одного возраста m, желающихъ обезпечить себѣ ту же пожизненную пенсію p. Очевидно, что Страховое Общество получитъ отъ всѣхъ этихъ лицъ сумму $N.y_m$. Изъ этой суммы, по истеченіи одного года, Общество должно будетъ уплатить по p рублей каждому изъ N застрахователей, оставшихся въ живыхъ.

Сверхъ того, условимся означать знакоположеніемъ (n) показаніе употребляемой таблицы смертности, соотвѣтствующее n-лѣтнему возрасту, или, иначе, число людей, имѣющихъ отъ роду n лѣтъ, и оставшихся въ живыхъ изъ совокупности всѣхъ новорожденныхъ, показываемыхъ таблицею. Произведеніе $\frac{(m+1)}{(m)}\cdot N$ изобразитъ, приблизительно, сколько изъ числа N лицъ, останется въ живыхъ по истеченіи одного года; и такъ, Общество должно будетъ, черезъ годъ, выплатить $\frac{(m+1)}{(m)}\cdot N.p$ рублей. Съ другой стороны, полученная имъ сумма, по прошествіи одного года [формула (122)], обратится въ kNy_m; слѣдовательно, по истеченіи одного года, наличный капиталъ Общества будетъ $kNy_m - \frac{(m+1)}{(m)}\cdot Np$. Этотъ капиталъ долженъ служить для производства пожизненной пенсіи p каждому изъ $\frac{(m+1)}{(m)}\cdot N$ вкладчиковъ, оставшихся въ живыхъ изъ полнаго числа N. Но, какъ каждому изъ нихъ будетъ въ разсматриваемое время $m+1$ годъ, то взносъ каждаго изобразится чрезъ y_{m+1}, а слѣдовательно за всѣхъ $\frac{(m+1)}{(m)}\cdot N$ пришлось бы Обществу получить сумму $\frac{(m+1)}{(m)}\cdot N.y_{m+1}$. Для обоюдной безобидности оборота, эта сумма должна равняться наличному капиталу Общества, почему и будетъ

$$kNy_m - \frac{(m+1)}{(m)}\cdot Np = \frac{(m+1)}{(m)}\cdot Ny_{m+1},$$

откуда

$$y_m = \frac{1}{k}\cdot\frac{(m+1)}{(m)}\cdot\left[p + y_{m+1}\right]. \tag{124}$$

Вотъ уравненіе, изъ котораго, при пособіи таблицъ смертности, легко будетъ вывести полное рѣшеніе занимающей насъ задачи. Дѣйствительно, измѣняя въ немъ послѣдовательно m въ $m+1$, $m+2$, $m+3$, и такъ далѣе до предѣла человѣческой жизни, получимъ

$$y_{m+1} = \frac{1}{k}\cdot\frac{(m+2)}{(m+1)}\cdot\left[p + y_{m+2}\right]$$

$$y_{m+2} = \frac{1}{k}\cdot\frac{(m+3)}{(m+2)}\cdot\left[p + y_{m+3}\right]$$

....

и слѣдовательно

$$y_m = \left[\frac{(m+1)}{(m)}\cdot\frac{1}{k} + \frac{(m+2)}{(m)}\cdot\frac{1}{k^2} + \frac{(m+3)}{(m)}\cdot\frac{1}{k^3} + \cdots\right]p. \tag{125}$$

Рѣшенный нами вопросъ относится къ *пожизненнымъ доходамъ*. Для составленія таблицы вкладовъ, принимаютъ доходъ p равнымъ опредѣленной суммѣ, напримѣръ 100 рублямъ, и потомъ, посредствомъ формулы (124), находятъ вклады застрахователей для послѣдовательныхъ возрастовъ, начиная съ глубокой старости. Такъ, напримѣръ, принявъ за предѣлъ долголѣтія 100 лѣтъ, а поэтому $(100) = 0$, откуда $y_{99} = 0$, получимъ послѣдовательно

$$y_{98} = \frac{1}{k}\cdot\frac{(99)}{(98)}\cdot p$$

$$y_{97} = \frac{1}{k}\cdot\frac{(98)}{(97)}\left[p + y_{98}\right]$$

$$y_{96} = \frac{1}{k}\cdot\frac{(97)}{(96)}\left[p + y_{97}\right]$$

....

гдѣ числа (96), (97), (98), (99)... найдутся изъ таблицъ смертности, а k опредѣлится второю изъ формулъ (122).

При этомъ рѣшеніи предполагалось, что лица, пользующіяся пенсіонами, умираютъ чрезъ годовые сроки; но какъ вообще, по условію, Общество платитъ наслѣдникамъ причитающуюся часть пенсіона по расчёту за мѣсяцы, по день смерти пенсіонера, то, для бóльшей точности, можно, въ формулѣ (125),

вмѣсто: $\frac{(m+1)}{(m)}$, $\frac{(m+2)}{(m)}$, $\frac{(m+3)}{(m)}$......

поставить: $\frac{1}{2}\left[1 + \frac{(m+1)}{(m)}\right]$, $\frac{1}{2}\left[\frac{(m+1)}{(m)} + \frac{(m+2)}{(m)}\right]$, $\frac{1}{2}\left[\frac{(m+2)}{(m)} + \frac{(m+3)}{(m)}\right]$......

сообразно съ сказаннымъ въ N° 61 предъидущей Главы при выводѣ формулы (105).

Сверхъ того сдѣлаемъ еще замѣчаніе, которое, вмѣстѣ съ предъидущимъ, относится ко всѣмъ вопросамъ одного рода съ рѣшаемыми въ этой Главѣ. Должно по возможности стараться, чтобы таблицы смертности, изъ которыхъ заимствуемъ числа (m), $(m+1)$, $(m+2)\ldots$, были составлены для разсматриваемаго въ задачѣ сословія людей. Такъ напримѣръ, въ настоящемъ случаѣ, человѣкъ, который, для обезпеченія себѣ извѣстной годовой пенсіи, въ состояніи жертвовать капиталомъ довольно значительнымъ, по этому самому уже принадлежитъ къ безбѣдному классу людей; слѣдовательно и смертность въ этомъ классѣ слабѣе, чѣмъ въ общей массѣ. Такія таблицы были составлены между прочимъ *Керсбоомомъ* (*Kersboom*) для сословія, пользующагося пенсіями въ Голландіи. Изъ новѣйшихъ пособій въ этомъ родѣ, укажемъ на спеціальную таблицу смертности, составленную для Дома Призрѣнія престарѣлыхъ *Sainte-Périne*, въ Шальо. Въ это Заведеніе принимаются пенсіонеры обоего пола, которые за поступленіе платятъ извѣстную сумму въ годъ, или вносятъ единовременно капиталъ, зависящій отъ ихъ возраста. Новая таблица смертности, о которой упоминаемъ, помѣщена въ Донесеніи ГГ. *Араго*, *Ліувилля* и *Матьё* объ Домѣ Призрѣнія *Sainte-Périne*, напечатанномъ въ *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences;* Tome XX, 1845, n° 26.

Вычисленіе вклада y_m, опредѣляемаго формулою (125), можно упростить, раздѣливъ на періоды промежутокъ времени отъ m-лѣтняго возраста до предѣла долголѣтія, и допустивъ притомъ приблизительно, что число ежегодно умирающихъ постоянно въ продолженіи каждаго періода.

Положимъ, напримѣръ, что отъ возраста m до возраста m', изъ N разсматриваемыхъ лицъ, ежегодно умираетъ M человѣкъ; отъ m' до m'', умирающихъ числомъ M'; отъ m'' до m''', умирающихъ M'', и такъ далѣе до предѣла человѣческой жизни. Вычислимъ теперь часть вклада, соотвѣтствующую первому періоду; изобразимъ ее чрезъ S_1; равнымъ образомъ, пусть будутъ S_2, S_3, $S_4\ldots$ части вклада, относящіяся ко второму, третьему, четвертому... періоду. Очевидно получимъ

$$y_m = S_1+S_2+S_3+S_4+\ldots.$$

Но мы сей-часъ предположили, что въ продолженіи всѣхъ годовъ, составляющихъ первый періодъ, число умирающихъ постоянно, и для каждаго года равно M; слѣдовательно будетъ

$$\frac{(m+1)}{(m)}\cdot N = N-M,\quad \frac{(m+2)}{(m)}\cdot N = N-2M,\quad \frac{(m+3)}{(m)}\cdot N = N-3M,\ \text{и проч.}$$

Подставляя эти величины въ формулу (125), и замѣняя притомъ y_m величиною S_1, найдется

$$S_1 = \left\{\left[1-\frac{M}{N}\right]\cdot\frac{1}{k}+\left[1-2\frac{M}{N}\right]\cdot\frac{1}{k^2}+\left[1-3\frac{M}{N}\right]\cdot\frac{1}{k^3}+\cdots\right\}p.$$

Если для простоты положимъ $\frac{M}{N}=\mu$, и замѣтимъ, что первый періодъ состоитъ изъ $m'-m$ лѣтъ, то значеніе S_1 выразится разностію слѣдующихъ двухъ рядовъ:

$$S_1 = \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\cdots+\frac{1}{k^{m'-m}}\right)p-\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{3}{k^3}+\cdots+\frac{m'-m}{k^{m'-m}}\right)\mu p.$$

Сумма перваго ряда, въ конечномъ видѣ, равна

$$\frac{k^{m'-m}-1}{(k-1)k^{m'-m}}\cdot p.$$

Для опредѣленія суммы втораго ряда, придаемъ къ выраженію

$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{3}{k^3}+\cdots+\frac{m'-m}{k^{m'-m}} = s$$

рядъ

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\cdots+\frac{1}{k^{m'-m}} = \frac{k^{m'-m}-1}{(k-1)k^{m'-m}},$$

и получаемъ

$$\frac{2}{k}+\frac{3}{k^2}+\frac{4}{k^3}+\cdots+\frac{m'-m+1}{k^{m'-m}} = s+\frac{k^{m'-m}-1}{(k-1)k^{m'-m}}.$$

Раздѣливъ всё уравненіе на k, и замѣнивъ потомъ первую его часть суммою

$$s+\frac{m'-m+1}{k^{m'-m+1}}-\frac{1}{k},\quad \text{найдется}\quad s+\frac{m'-m+1}{k^{m'-m+1}}-\frac{1}{k} = \frac{s}{k}+\frac{k^{m'-m}-1}{(k-1)\,k^{m'-m+1}},$$

откуда, по сокращеніи,

$$s = \frac{k^{m'-m+1}-1}{(k-1)^2k^{m'-m}}-\frac{m'-m+1}{(k-1)k^{m'-m}}.$$

Если умножимъ теперь эту величину на μp, и вычтемъ произведеніе изъ перваго ряда, то получимъ искомую величину S_1, которая будетъ

$$S_1 = \frac{k^{m'-m}-1}{(k-1)k^{m'-m}}\cdot p-\left[\frac{k^{m'-m+1}-1}{(k-1)^2k^{m'-m}}-\frac{m'-m+1}{(k-1)k^{m'-m}}\right]\mu p,$$

гдѣ μ, какъ сказано выше, равно отношенію $\frac{M}{N}$.

Легко видѣть, что для полученія S_2, стоитъ только, въ этой формулѣ, количества

$$m\qquad m'\qquad \mu$$

замѣнить соотвѣтственно величинами

$$m'\qquad m''\qquad \mu' = \frac{M'}{N-(m'-m)M},$$

и такъ далѣе, до величины S, относящейся къ послѣднему періоду.

Замѣтимъ еще, что если не требуется особенной точности въ опредѣленіи вклада y_m, то можно довольствоваться однимъ періодомъ, сообразно съ ипотезою Моавра (N° 60), которая выражается весьма простымъ уравненіемъ $y = 86 - x$. Но, въ такомъ случаѣ, возрастъ m долженъ быть не менѣе 22 лѣтъ. Если изобразимъ, въ этомъ предположеніи, чрезъ ν предѣлъ долголѣтія по таблицѣ, то получимъ

$$y_m = \frac{k^{\nu-m}-1}{(k-1)k^{\nu-m}}.p - \left[\frac{k^{\nu-m+1}-1}{(k-1)^2k^{\nu-m}} - \frac{\nu-m+1}{(k-1)k^{\nu-m}}\right]\mu p.$$

Сообразно съ сказаннымъ выше, Общество, для покрытія издержекъ по содержанію Директоровъ, конторъ и проч., а равно для удовлетворенія вкладчиковъ въ непредвидѣнныхъ случаяхъ большой смертности, должно нѣсколько увеличить вкладъ y_m, опредѣляемый вычисленіемъ. Мѣра же этого увеличенія зависитъ отъ столькихъ неопредѣленныхъ обстоятельствъ, что разъисканіе ея не можетъ быть подвергнуто анализу.

Теперь предложимъ вопросъ, относящійся къ сложнымъ вѣроятностямъ человѣческой жизни.

72. ВОПРОСЪ II. *Мужъ желаетъ по смерти своей оставить женѣ пожизненную годовую пенсію* p. *Отъ роду ему* a *лѣтъ, а женѣ* b *лѣтъ. Спрашивается:* 1° *сколько мужъ долженъ вносить Обществу застрахованія жизни ежегодно по день своей смерти;* 2° *сколько онъ долженъ заплатить единовременно Обществу для обезпеченія женѣ сказанной пенсіи* p; 3° *какъ великъ долженъ быть взносъ мужа, чтобы жена, по смерти его, получила опредѣленную напередъ единовременную сумму.*

Вычислимъ сперва приходъ Общества, а потомъ расходъ, и, сообразно съ сказаннымъ въ N° 70, уравнимъ эти два выраженія.

Положимъ, что разсматриваемъ общій случай, представляемый задачею, именно, что мужъ вноситъ сперва единовременно нѣкоторую сумму S, а потомъ платитъ по день смерти своей ежегодно сумму s. Отъ этого предположенія очень легко будетъ перейти къ первому и ко второму требованію задачи: первое условіе выразится равенствомъ $S = s$, а второе доставитъ $s = 0$.

И такъ вообразимъ, что значительное число N мужей, желая обезпечить жёнамъ по смерти своей пенсію p, обращаются въ одно время къ Страховому Обществу. Мы допускаемъ, что каждому мужу отъ роду a лѣтъ, а каждой женѣ b лѣтъ. Ясно, что приходъ Общества отъ этихъ N мужей будетъ состоять изъ двухъ частей: 1° изъ суммы S, вносимой единовременно въ настоящее время каждымъ застрахователемъ, что составитъ капиталъ $N.S$, и 2° изъ капитала, соотвѣтствующаго въ настоящее время годовымъ уплатамъ s, съ каждаго изъ N мужей, вносимыхъ по годъ ихъ смерти. Такъ какъ число и сроки этихъ уплатъ зависятъ отъ закона смертности мужей и жёнъ, ибо по смерти жены мужъ прекращаетъ взносъ суммы s, то этотъ второй капиталъ будетъ нѣкоторою функціею величинъ a и b; поэтому мы изобразимъ чрезъ $y_{a,b}$ капиталъ, приведенный къ настоящему времени, и замѣняющій всѣ годовыя уплаты, которыя Общество получитъ отъ каждаго изъ N мужей, до смерти послѣдняго изъ нихъ.

Прежде нежели выведемъ уравненіе, опредѣляющее $y_{a,b}$, разсмотримъ внимательно что̀ случится по истеченіе одного года послѣ застрахованія. Удерживая знакоположеніе предъидущаго вопроса, ясно, что $\frac{(a+1)}{(a)}.N$ изобразитъ число мужей, оставшихся въ живыхъ изъ полнаго числа N по истеченіи одного года, а $\frac{(b+1)}{(b)}.N$ подобное число въ разсужденіи ихъ жёнъ. Для бо̀льшей точности, можно заимствовать показанія (a), $(a+1)$, ... (b), $(b+1)$ ... изъ различныхъ таблицъ, именно: (a), $(a+1)$, $(a+2)$ ... изъ таблицъ, составленныхъ для женатыхъ, а (b), $(b+1)$, $(b+2)$ ... для замужнихъ. Число умершихъ мужей будетъ очевидно $\frac{(a)-(a+1)}{(a)}.N$, а жёнъ, $\frac{(b)-(b+1)}{(b)}.N$ Далѣе, легко видѣть, что число мужей, у которыхъ жёны живы, изобразится произведеніемъ $\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.N$; дѣйствительно, дробь $\frac{(a+1)}{(a)}$ изображаетъ вѣроятность, что мужъ, имѣющій a лѣтъ, проживетъ одинъ годъ, а $\frac{(b+1)}{(b)}$ вѣроятность, что жена его, имѣющая b лѣтъ, проживетъ также одинъ годъ; произведеніе $\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}$ этихъ двухъ простыхъ вѣроятностей, равняется вѣроятности сложнаго событія, то есть, что мужъ и жена живы по истеченіи одного года. Умноживъ эту сложную вѣроятность на N, получимъ вѣроятное число супружествъ, существующихъ по истеченіи одного года. Послѣ этого легко видѣть, что число вдовцевъ будетъ

$$\frac{(a+1)}{(a)}N - \frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.N = \frac{(a+1)}{(a)}\left[1 - \frac{(b+1)}{(b)}\right].N,$$

а число вдовъ

$$\frac{(b+1)}{(b)}.N - \frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.N = \frac{(b+1)}{(b)}\left[1 - \frac{(a+1)}{(a)}\right].N.$$

И такъ, собравъ всѣ приведенные сей-часъ результаты, получимъ для N супружествъ слѣдующую таблицу, по истеченіи одного года отъ времени застрахованія:

Число мужей живыхъ: $\frac{(a+1)}{(a)}.N$ *Число жёнъ живыхъ:* $\frac{(b+1)}{(b)}.N$

Число умершихъ мужей: $\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right].N$ *Число умершихъ жёнъ:* $\left[1-\frac{(b+1)}{(b)}\right].N$

Число супружествъ, въ которыхъ мужъ и жена живы: $\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.N$

Число супружествъ, въ которыхъ мужъ и жена умерли: $\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}\right].N$

Число вдовцевъ: $\frac{(a+1)}{(a)}\left[1-\frac{(b+1)}{(b)}\right].N$ *Число вдовъ:* $\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right].N.$

При пособіи этой таблицы, которую очень легко распространить на слѣдующіе годы, не трудно будетъ составить выраженіе какъ для прихода Общества, такъ и для его расхода. На такомъ основаніи, обратимся къ опредѣленію величины $y_{a,b}$. Капиталъ, разсматриваемый въ настоящее время, и замѣняющій всѣ годовыя уплаты s, изобразится чрезъ $N.y_{a,b}$. Посмотримъ, изъ какихъ частей онъ состоитъ. По прошествіи одного года, такъ какъ число мужей, у которыхъ жёны живы, равно $\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.N$, то Общество получитъ во первыхъ сумму $\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.N.s$, которая, будучи обращена въ наличный капиталъ, приведенный къ настоящему времени, опредѣлится произведеніемъ [формула (123)]

$$\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.\frac{N.s}{k}. \tag{126}$$

Ясно, что отъ вдовцевъ, число которыхъ по истеченіи года будетъ

$$\frac{(a+1)}{(a)}\left[1-\frac{(b+1)}{(b)}\right].N,$$

Общество не получитъ никакого взноса. Такъ какъ съ окончаніемъ перваго года по застрахованіи, число мужей, у которыхъ жёны живы, равно $\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.N$, то капиталъ, замѣняющій всѣ будущіе годовые взносы сихъ послѣднихъ, изобразится, по принятому выше знакоположенію, чрезъ

$$\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.N.y_{a+1,b+1}.$$

Этотъ капиталъ, приведенный къ настоящему времени, будетъ

$$\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.\frac{N.y_{a+1,b+1}}{k}. \tag{127}$$

Если величину (127) придадимъ къ (126), то очевидно получимъ капиталъ, который означимъ чрезъ $N.y_{a,b}$; сокращая на N, найдется, для опредѣленія $y_{a,b}$, уравненіе

$$y_{a,b}=\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}\left[\frac{s}{k}+\frac{y_{a+1,b+1}}{k}\right],$$

откуда

$$y_{a+1,b+1}=\frac{(a+2)}{(a+1)}.\frac{(b+2)}{(b+1)}\left[\frac{s}{k}+\frac{y_{a+2,b+2}}{k}\right]$$

$$y_{a+2,b+2}=\frac{(a+3)}{(a+2)}.\frac{(b+3)}{(b+2)}\left[\frac{s}{k}+\frac{y_{a+3,b+3}}{k}\right]$$

....

и слѣдовательно

$$y_{a,b}=\left[\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.\frac{1}{k}+\frac{(a+2)}{(a)}.\frac{(b+2)}{(b)}.\frac{1}{k^2}+\frac{(a+3)}{(a)}.\frac{(b+3)}{(b)}.\frac{1}{k^3}+\ldots\ldots\right]s.$$

Наконецъ, означивъ чрезъ G полный приходъ Общества, и вспомнивъ, что онъ состоитъ изъ двухъ частей $N.S$ и $N.y_{a,b}$, получимъ

$$G=N.S+\left[\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.\frac{1}{k}+\frac{(a+2)}{(a)}.\frac{(b+2)}{(b)}.\frac{1}{k^2}+\frac{(a+3)}{(a)}.\frac{(b+3)}{(b)}.\frac{1}{k^3}+\ldots\ldots\right]N.s.$$

Займемся теперь опредѣленіемъ расхода Общества, который изобразимъ чрезъ D. Этотъ расходъ можно разсматривать какъ бы состоящимъ изъ совокупности пенсій, приведенныхъ къ настоящему времени, и которыя Общество должно выплачивать по истеченіи одного года, двухъ, трехъ... лѣтъ, по день смерти послѣдней вдовы. Такъ какъ по истеченіи одного года число вдовъ будетъ

$$\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right]N,$$

то выплаченная Обществомъ сумма изобразится чрезъ

$$\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right]N.p,$$

и какъ эта сумма должна быть приведена къ настоящему времени, то первая часть расхода D равна

$$\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right]\frac{N.p}{k}.$$

Вторая часть изобразится совокупностію пенсій, приведенныхъ къ настоящему времени, и уплачиваемыхъ всѣмъ вдовамъ, оставшимся въ живыхъ по истеченіи двухъ лѣтъ. Легко видѣть, что число ихъ будетъ

$$\frac{(b+2)}{(b)}.N-\frac{(b+2)}{(b)}.\frac{(a+2)}{(a)}.N=\frac{(b+2)}{(b)}\left[1-\frac{(a+2)}{(a)}\right]N;$$

слѣдовательно, капиталъ, приведенный къ настоящему времени, и составляющій вторую уплату Общества, изобразится чрезъ

$$\frac{(b+2)}{(b)}\left[1-\frac{(a+2)}{(a)}\right]\frac{N.p}{k^2}.$$

Третья уплата будетъ

$$\frac{(b+3)}{(b)}\left[1-\frac{(a+3)}{(a)}\right]\frac{N.p}{k^3},$$

и такъ далѣе до того года, который соотвѣтствуетъ смерти послѣдней вдовы. Слѣдовательно

$$D=\left\{\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right].\frac{1}{k}+\frac{(b+2)}{(b)}\left[1-\frac{(a+2)}{(a)}\right].\frac{1}{k^2}+\frac{(b+3)}{(b)}\left[1-\frac{(a+3)}{(a)}\right].\frac{1}{k^3}+\ldots\ldots\right\}N.p.$$

Но какъ, для взаимной безобидности, приходъ долженъ равняться расходу, или $G=D$, то по раздѣленіи на N обѣихъ величинъ G и D, получимъ

$$\left.\begin{aligned}&S+\left\{\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.\frac{1}{k}+\frac{(a+2)}{(a)}.\frac{(b+2)}{(b)}.\frac{1}{k^2}+\frac{(a+3)}{(a)}.\frac{(b+3)}{(b)}.\frac{1}{k^3}+\ldots\right\}s\\&=\left\{\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right].\frac{1}{k}+\frac{(b+2)}{(b)}\left[1-\frac{(a+2)}{(a)}\right].\frac{1}{k^2}+\frac{(b+3)}{(b)}\left[1-\frac{(a+3)}{(a)}\right].\frac{1}{k^3}+\ldots\right\}p.\end{aligned}\right\}\quad(128)$$

Этому уравненію можно дать видъ

$$S+A(s+p)=Bp,\qquad(129)$$

когда для краткости положимъ

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{(a+1)}{(a)}.\frac{(b+1)}{(b)}.\frac{1}{k}+\frac{(a+2)}{(a)}.\frac{(b+2)}{(b)}.\frac{1}{k^2}+\frac{(a+3)}{(a)}.\frac{(b+3)}{(b)}.\frac{1}{k^3}+\ldots\\B&=\frac{(b+1)}{(b)}.\frac{1}{k}+\frac{(b+2)}{(b)}.\frac{1}{k^2}+\frac{(b+3)}{(b)}.\frac{1}{k^3}+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(130)$$

Формулы (129) и (130) заключаютъ въ себѣ полное рѣшеніе занимающаго насъ вопроса. Въ уравненіе (129) входятъ двѣ неизвѣстныя величины S и s; одна изъ нихъ остается совершенно произвольною. Условившись, напримѣръ, съ Обществомъ въ единовременномъ вкладѣ S, получимъ, для опредѣленія ежегоднаго взноса s, формулу

$$s=\frac{Bp-S}{A}-p.$$

Если, напротивъ того, условились въ суммѣ s, то для S найдется величина

$$S=Bp-A(s+p).$$

Уравненіе (129) можетъ также служить для опредѣленія пенсіи p по даннымъ S и s; дѣйствительно будетъ

$$p=\frac{S+As}{B-A}.$$

Если мужъ желаетъ платить ежегодно извѣстную сумму s, не дѣлая единовременнаго вклада S, то будетъ $S=s$, и тогда уравненіе (129) приметъ видъ

$$s+A(s+p)=Bp,$$

откуда

$$s=\frac{(B-A)p}{A+1};$$

Когда же, напротивъ того, застрахователь вноситъ единовременно капиталъ S, не уплачивая ежегодно суммы s, то, для опредѣленія S, должно будетъ, въ уравненіи (129) или (128), положить $s=0$; въ такомъ случаѣ получимъ

$$S=[B-A]p,$$

или

$$S=\left\{\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right].\frac{1}{k}+\frac{(b+2)}{(b)}\left[1-\frac{(a+2)}{(a)}\right].\frac{1}{k^2}+\frac{(b+3)}{(b)}\left[1-\frac{(a+3)}{(a)}\right].\frac{1}{k^3}+\ldots\right\}p.$$

Еслибъ, при прежнихъ условіяхъ относительно возраста супруговъ при застрахованіи, мужъ желалъ, чтобы по смерти его, Общество выдало женѣ единовременно извѣстную сумму S', за единовременный же взносъ его S, то, для опредѣленія этого капитала S, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: приходъ Общества, въ настоящее время, получаемый отъ N мужей, равенъ $N.S$; что касается до расхода, приведеннаго къ настоящему времени, то онъ будетъ:

по истеченіи одного года: $\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right].N.\frac{S'}{k}$;

двухъ лѣтъ: $\frac{(b+2)}{(b)}\left[1-\frac{(a+2)}{(a)}\right].N.\frac{S'}{k^2}$;

трехъ лѣтъ: $\frac{(b+3)}{(b)}\left[1-\frac{(a+3)}{(a)}\right].N.\frac{S'}{k^3}$,

и такъ далѣе, до смерти послѣдней вдовы. Слѣдовательно

$$S=\left\{\frac{(b+1)}{(b)}\left[1-\frac{(a+1)}{(a)}\right].\frac{1}{k}+\frac{(b+2)}{(b)}\left[1-\frac{(a+2)}{(a)}\right].\frac{1}{k^2}+\frac{(b+3)}{(b)}\left[1-\frac{(a+3)}{(a)}\right].\frac{1}{k^3}+\ldots\right\}S'.$$

Мы не будемъ останавливаться на численныхъ приложеніяхъ выведенныхъ нами формулъ. Читатели найдутъ желаемыя подробности по этому предмету въ сочиненіи Эйлера: *Caisses des veuves*, а также въ Разсужденіи подъ заглавіемъ: *Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts avec la description d'une nou-*

velle espèce de tontine aussi favorable au public qu'utile à l'État, calculés sous la direction de Mr. Léonard Euler par Mr. Nicolas Fuss.

73. Скажемъ теперь нѣсколько словъ о доходахъ, называемыхъ *тонтиной* (*tontine*), по имени Флорентинца *Лаврентія Тонти*, предложившаго въ первый разъ этого рода оборотъ. Во Франціи, первая тонтина была введена въ 1653 году.

Когда нѣсколько лицъ, составивъ нѣкоторый общій капиталъ, условились въ томъ, что переживающіе изъ нихъ пользуются пенсіями изъ этого капитала, увеличивающагося по мѣрѣ смерти участниковъ, то подобнаго рода обезпеченіе переживающихъ, называется *тонтиною*, а пользующіеся при этомъ пенсіями — *тонтинёрами*. Замѣтимъ, что простота и уравнительность расчётовъ требуетъ, чтобы число тонтинёровъ оставалось по возможности постояннымъ, и чтобы лѣта ихъ мало разнились между собою. Изъ сказаннаго также усматриваемъ, что выгода тонтинёровъ, достигающихъ преклонныхъ лѣтъ, состоитъ въ томъ, что они пользуются извѣстною частію вкладовъ тѣхъ изъ участниковъ Общества, которыхъ они пережили.

Вопросы о тонтинахъ весьма разнообразны. Приведемъ одинъ простой случай, который впрочемъ, вмѣстѣ съ сказаннымъ въ предъидущемъ N°, вполнѣ достаточенъ для соображенія при рѣшеніи другихъ, болѣе сложныхъ задачъ, относящихся къ этому роду оборотовъ.

Положимъ, что Общество состоитъ изъ N тонтинёровъ, почти ровесниковъ между собою, и что каждый изъ нихъ вноситъ единовременно, при учрежденіи тонтины, нѣкоторую сумму $\frac{S}{N}$; поэтому полный приходъ Общества будетъ S. Изобразимъ чрезъ s ту постоянную сумму, которую Общество будетъ выдавать ежегодно тонтинёрамъ, оставшимся въ живыхъ. Можно предложить себѣ вопросы: 1° по извѣстному s, найти S, и, сверхъ того, 2° опредѣлить приблизительно, сколько будетъ получать каждый тонтинёръ по истеченіи перваго, втораго, третьяго и вообще котораго ни есть года.

Первая часть вопроса рѣшается точно такъ, какъ обыкновенная задача объ *годовыхъ уплатахъ* (*annuités*). Дѣйствительно, изобразимъ чрезъ ν предѣлъ человѣческой жизни, а чрезъ n возрастъ, общій всѣмъ тонтинёрамъ, или, если между ихъ лѣтами есть незначительная разница, то среднюю ариѳметическую всѣхъ ихъ возрастовъ. По истеченіи одного года, выдача будетъ s, и, приведя ее къ настоящему времени, получимъ $\frac{s}{k}$. Выдача на второй годъ та же s: въ настоящее же время ея значеніе есть $\frac{s}{k^2}$; настоящее значеніе третей выдачи будетъ $\frac{s}{k^3}$, и такъ далѣе. Наконецъ, послѣдняя выдача, соотвѣтствующая предѣлу человѣческой жизни, и приведенная къ настоящему времени, изобразится чрезъ $\frac{s}{k^{\nu-n}}$. Слѣдовательно

$$S = \frac{s}{k} + \frac{s}{k^2} + \frac{s}{k^3} + \dots + \frac{s}{k^{\nu-n}} = \frac{s}{k}\left[1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^{\nu-n-1}}\right],$$

или наконецъ

$$S = \frac{k^{\nu-n}-1}{(k-1)k^{\nu-n}} \cdot s.$$

Для приблизительнаго опредѣленія пенсіи, приходящейся на каждаго изъ тонтинёровъ по прошествіи одного года, двухъ, трехъ... лѣтъ, замѣтимъ, что вѣроятное число оставшихся въ живыхъ изъ всѣхъ участниковъ N будетъ:

послѣ перваго года: $\frac{(n+1)}{(n)} \cdot N$,

послѣ втораго: $\frac{(n+2)}{(n)} \cdot N$,

послѣ третьяго: $\frac{(n+3)}{(n)} \cdot N$,

и такъ далѣе; числа (n), $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$... должно заимствовать изъ таблицъ смертности, составленныхъ для разсматриваемаго сословія людей. Слѣдовательно, каждый изъ тонтинёровъ, оставшихся въ живыхъ, получитъ по окончаніи перваго года пенсію

$$\frac{s}{\frac{(n+1)}{(n)} \cdot N} = \frac{(n)}{(n+1)} \cdot \frac{s}{N};$$

по истеченіи втораго года, каждый тонтинёръ получитъ

$$\frac{(n)}{(n+2)} \cdot \frac{s}{N},$$

по истеченіи третьяго

$$\frac{(n)}{(n+3)} \cdot \frac{s}{N},$$

и такъ далѣе. Такимъ образомъ, каждый годъ, по мѣрѣ уменьшенія числа тонтинёровъ, пенсіи будутъ увеличиваться.

Положимъ еще, что Общество выдаетъ ежегодно не полную сумму s, слѣдующую по расчёту вкладовъ всѣхъ умершихъ, а мéньшую, соотвѣтствующую опредѣленной части числа умершихъ, напримѣръ половинной. Опредѣлимъ въ этомъ предположеніи пенсіи тонтинёровъ по истеченіи каждаго года. При допущенномъ сей-часъ условіи, Общество, вмѣсто суммы s, соотвѣтствующей полному числу N застрахователей, должно выдать, послѣ пер-

ваго года, только такую, которая соотвѣтствуетъ числу живыхъ тонтинёровъ съ половиннымъ числомъ умершихъ. Но вѣроятное число живыхъ по истеченіи одного года будетъ $\frac{(n+1)}{(n)}\cdot N$, а число умершихъ $N-\frac{(n+1)}{(n)}\cdot N$; слѣдовательно, число живыхъ съ половиннымъ числомъ умершихъ изобразится чрезъ

$$\frac{(n+1)}{(n)}\cdot N+\frac{1}{2}\left[N-\frac{(n+1)}{(n)}\cdot N\right]=\frac{(n)+(n+1)}{2(n)}\cdot N.$$

И такъ, для опредѣленія той суммы, которую Общество должно выдать по истеченіи перваго года, стоитъ только найти число, которое относилось бы къ $\frac{(n)+(n+1)}{2(n)}\cdot N$, какъ s къ N; это число будетъ $\frac{(n)+(n+1)}{2(n)}\cdot s$.

По истеченіи втораго года число живыхъ тонтинёровъ, вмѣстѣ съ половиннымъ числомъ умершихъ, опредѣлится выраженіемъ

$$\frac{(n+2)}{(n)}\cdot N+\frac{1}{2}\left[N-\frac{(n+2)}{(n)}\cdot N\right]=\frac{(n)+(n+2)}{2(n)}\cdot N;$$

слѣдовательно сумма, которую Общество должно выдать по истеченіи втораго года, будетъ

$$\frac{(n)+(n+2)}{2(n)}\cdot s.$$

Подобнымъ образомъ найдется, что по истеченіи третьяго года, выдаваемая на пенсіи сумма, равна

$$\frac{(n)+(n+3)}{2(n)}\cdot s,$$

и такъ далѣе. Приведя всѣ эти годовыя выдачи къ настоящему времени, и изобразивъ чрезъ S' капиталъ, соотвѣтствующій имъ въ настоящее же время, получимъ

$$S=\left\{\left[1+\frac{(n+1)}{(n)}\right]\cdot\frac{1}{k}+\left[1+\frac{(n+2)}{(n)}\right]\cdot\frac{1}{k^2}+\left[1+\frac{(n+3)}{(n)}\right]\cdot\frac{1}{k^3}+\cdots\right\}\frac{s}{2}.$$

Что касается до величины пенсіи, получаемой каждымъ тонтинёромъ, то очевидно, что въ первый годъ она будетъ:

$$\frac{\frac{(n)+(n+1)}{2(n)}\cdot s}{\frac{(n+1)}{(n)}\cdot N}=\frac{(n)+(n+1)}{2(n+1)}\cdot\frac{s}{N};$$

во второй годъ: $\frac{(n)+(n+2)}{2(n+2)}\cdot\frac{s}{N}$;

въ третій годъ: $\frac{(n)+(n+3)}{2(n+3)}\cdot\frac{s}{N}$,

и такъ далѣе.

Въ сочиненіи: *Éclaircissemens sur les établissemens publics* и проч. о которомъ упомянуто въ концѣ N° 72, читатели найдутъ описаніе одной весьма примѣчательной тонтины, со всѣми надлежащими подробностями.

74. Расчёты по *сохраннымъ* или *сберегательнымъ кассамъ* основаны совершенно на однихъ началахъ съ опредѣленіемъ пожизненныхъ пенсій (N° 71). Вкладчики вносятъ или единовременно извѣстный капиталъ, или ежегодно нѣкоторую сумму съ тѣмъ, чтобы впослѣдствіи, по достиженіи ими преклонныхъ лѣтъ, получать опредѣленную пенсію.

Положимъ, напримѣръ, *что* N *вкладчиковъ, одинаковаго возраста* a, *внесли единовременно каждый сумму* S. *Требуется узнать, на какую пожизненную пенсію* s *они имѣютъ право по истеченіи* n *лѣтъ.*

Для рѣшенія вопроса замѣтимъ, что по истеченіи n лѣтъ, вѣроятное число живыхъ изобразится чрезъ $\frac{(a+n)}{(a)}\cdot N$; слѣдовательно Общество должно выдать сумму $\frac{(a+n)}{(a)}\cdot N.s$. Эта сумма, отнесенная къ настоящему времени, будетъ

$$\frac{(a+n)}{(a)}\cdot N\cdot\frac{s}{k^n}.$$

Подобнымъ образомъ найдется, что по истеченіи $n+1$ лѣтъ, Общество употребитъ на выдачу пенсій сумму, которая, по приведеніи къ настоящему времени, выразится чрезъ

$$\frac{(a+n+1)}{(a)}\cdot N\cdot\frac{s}{k^{n+1}},$$

и такъ далѣе. Слѣдовательно, какъ Общество получило отъ всѣхъ вкладчиковъ капиталъ NS, то будетъ

$$NS=\frac{(a+n)}{(a)}\cdot N\cdot\frac{s}{k^n}+\frac{(a+n+1)}{(a)}\cdot N\cdot\frac{s}{k^{n+1}}+\cdots,$$

или, по сокращеніи на N,

$$S=\left[\frac{(a+n)}{(a)}\cdot\frac{1}{k^n}+\frac{(a+n+1)}{(a)}\cdot\frac{1}{k^{n+1}}+\frac{(a+n+2)}{(a)}\cdot\frac{1}{k^{n+2}}+\cdots\right]s.$$

Если бы каждый вкладчикъ внесъ единовременно капиталъ S, а въ послѣдующіе годы вносилъ бы дополнительныя суммы S_1, S_2, $S_3\ldots$, то надлежало бы очевидно предъидущее уравненіе замѣнить слѣдующимъ:

$$S+\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{S_1}{k}+\frac{(a+2)}{(a)}\cdot\frac{S_2}{k^2}+\frac{(a+3)}{(a)}\cdot\frac{S_3}{k^3}+\cdots$$

$$=\left[\frac{(a+n)}{(a)}\cdot\frac{1}{k^n}+\frac{(a+n+1)}{(a)}\cdot\frac{1}{k^{n+1}}+\frac{(a+n+2)}{(a)}\cdot\frac{1}{k^{n+2}}+\cdots\right]s.$$

Иногда сохранныя кассы учреждаются для доставленія денежныхъ пособій больнымъ. Въ такомъ случаѣ, для опредѣленія отношеній $\frac{(a+1)}{(a)}$, $\frac{(a+2)}{(a)}$,... $\frac{(a+n)}{(a)}$, $\frac{(a+n+1)}{(a)}$..., входя-

щихъ въ предъидущія двѣ формулы, необходимо имѣть наблюденія надъ числомъ и среднею продолжительностію того рода болѣзней, отъ которыхъ вкладчики застраховываютъ себя.

75. Въ предъидущихъ пяти нумерахъ этой Главы, застрахованія относились къ вѣроятностямъ жизни человѣческой. Теперь перейдемъ къ застрахованію предметовъ. Вообще застрахованіе всякаго имущества производится заплативъ опредѣленную сумму лицу или Обществу, отвѣчающему за цѣлость застрахованнаго предмета. Такъ напримѣръ, когда застраховываемъ домъ отъ огня, или судно отъ морскихъ опасностей, или всякій другой предметъ отъ утраты или поврежденія, то беремъ съ Общества обязательство, что въ случаѣ пожара, или погибели судна, или утраты и порчи предмета, оно вознаградитъ насъ за понесенные убытки. Кромѣ поименованныхъ сей-часъ застрахованій, есть еще многія другія, какъ то: застрахованія отъ града, отъ неурожая, отъ скотскаго падежа и проч.

Главное условіе обоюдной выгоды всякаго застрахованія состоитъ въ томъ, чтобы премія, то есть проценты, платимые Обществу лицемъ, отдающимъ на страхъ, была умѣренная. Когда это условіе выполнено, то застрахователь, безъ пожертвованія слишкомъ чувствительнаго для себя, обезпечиваетъ рискуемое имущество, а Общество, съ своей стороны, если только кругъ дѣйствія обширенъ, имѣетъ вѣрную выгоду. При несоразмѣрной же преміи, никакое учрежденіе этого рода не можетъ упрочиться.

Страховая премія зависитъ преимущественно отъ вѣроятности, что застраховываемый предметъ можетъ подвергнуться потерѣ или поврежденію. Для математической безобидности застрахованія, надлежало бы установить премію, которая равнялась бы *цѣнѣ* вещи, отдаваемой на страхъ, помноженной на *вѣроятность* ея утраты или порчи. Напримѣръ, застраховывая на одинъ годъ домъ, оцѣненный въ 100 тысячь рублей, и предполагая 5 пожаровъ на 1000 домовъ въ теченіи года, застрахователь долженъ заплатить Страховому отъ огня Обществу, въ строгомъ смыслѣ, только $\frac{5}{1000}.100000$ рублей $=500$ рублей; но онъ можетъ заплатить болѣе этой суммы, и сохранить притомъ выгоду со стороны *нравственнаго ожиданія*, что̀ объяснено съ подробностію въ Главѣ IV. Если бы Страховое Общество получало только преміи, вычисленныя по упоминаемому правилу безобидности математической, то оно скоро бы рушилось, потому что не могло бы покрыть издержекъ, сопряженныхъ съ содержаніемъ такого рода заведенія, и, сверхъ того, не имѣло бы излишка на обезпеченіе непредвидѣнныхъ случаевъ, каковы напримѣръ большіе пожары, истребляющіе иногда цѣлыя части городовъ, или сильныя бури, уничтожающія вдругъ множество кораблей и т. п.

И такъ, нѣтъ сомнѣнія, что главную данную, входящую въ опредѣленіе преміи, составляетъ вѣроятность истребленія или поврежденія предмета, отдаваемаго на страхъ. Эта вѣроятность зависитъ отъ столькихъ разнообразныхъ и вообще продолжительныхъ наблюденій, что опредѣленіе ея, съ достаточною точностію, въ бо́льшей части случаевъ почти невозможно. Чаще всего, должно довольствоваться показаніями весьма неполными, и даже иногда, за неимѣніемъ надлежащихъ наблюденій, дѣйствовать почти на-удачу. Но, замѣтимъ, въ подобныхъ случаяхъ, неточность получаемыхъ результатовъ будетъ проистекать не отъ теоріи, которая очень проста и вполнѣ удовлетворительна, но единственно отъ недостатка данныхъ.

Вотъ общія замѣчанія, относящіяся къ застрахованіямъ имуществъ. Для поясненія же аналитическихъ пріёмовъ, употребляемыхъ при рѣшеніи задачъ этого рода, предложимъ одинъ примѣръ, который, въ совокупности съ сказаннымъ въ предъидущихъ N°N°, а также въ Главахъ III и IV объ ожиданіяхъ математическомъ и нравственномъ, достаточно ознакомитъ читателя съ теоріею застрахованій. Положимъ, напримѣръ, что *купецъ застраховываетъ* m *кораблей, каждый на сумму* a, *платя за страхъ корабля нѣкоторую премію* b. *Требуется опредѣлить обстоятельства подобнаго застрахованія:* 1° *относительно Страховаго Общества и* 2° *въ отношеніи къ лицу, отдающему корабли на страхъ.* Замѣтимъ, для упрощенія вопроса, мы предполагаемъ здѣсь возможными только два случая, именно: корабль или погибнетъ, или благополучно дойдетъ до мѣста назначенія. Другихъ предположеній, какъ то поврежденія части груза, или самаго корабля, мы не будемъ принимать въ соображеніе.

Пусть будетъ p вѣроятность, что корабль претерпитъ крушеніе; въ этомъ случаѣ Общество должно выдать купцу сумму a, получивъ отъ него премію b. Разность $1-p$ изобразитъ вѣроятность, что судно достигнетъ благополучно мѣста назначенія, и, въ этомъ предположеніи, Общество не произведетъ никакой выдачи, получивъ за страхъ ту же премію b. Съ другой стороны, по условію вопроса, число застрахованныхъ кораблей есть m; слѣдовательно, въ силу N° 9, сумма первыхъ $\mu+1$ членовъ разложенія $[(1-p)+p]^m$ изобразитъ вѣроятность, что число кораблекрушеній не превзойдетъ μ. Означивъ эту вѣроятность чрезъ P, получимъ

$$\left.\begin{aligned} P = (1-p)^m + m(1-p)^{m-1}.p + \frac{m(m-1)}{1.2}(1-p)^{m-2}\,p^2 + \cdots \\ + \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-\mu).1.2.3\ldots\mu}(1-p)^{m-\mu}.p^\mu. \end{aligned}\right\} \quad (131)$$

Вычислимъ теперь наибольшую возможную потерю Общества при вѣроятности P. Такъ какъ, по предположенію, число кораблекрушеній не свыше μ, то наибольшая выдача

Общества будетъ μa, а сборъ премій за всѣ m кораблей доставитъ сумму mb. Поэтому, потеря Общества можетъ простираться до суммы $\mu a - mb$, которую изобразимъ чрезъ c; и такъ

$$\mu a - mb = c. \tag{132}$$

На такомъ основаніи, величина P, изображающая вѣроятность, что число кораблекрушеній не превзойдетъ μ, опредѣлитъ вмѣстѣ съ тѣмъ и вѣроятность, что убытокъ Общества не превзойдетъ суммы c. Если эта сумма c значительна, то благоразуміе требуетъ такого распоряженія со стороны Страховаго Общества, при которомъ вѣроятность P невозможности потери, превышающей c, мало разнствуетъ отъ достовѣрности или единицы. Если изобразимъ чрезъ μ' значеніе для μ, приводящее вторую часть формулы (131) къ величинѣ не меньшей той вѣроятности P', которой Общество признало благоразумнымъ придерживаться, то получимъ

$$\mu' a - mb = c',$$

гдѣ c' есть предполагаемая наибольшая потеря Общества при вѣроятности P'. Иначе, величина P', весьма близкая къ достовѣрности, изобразитъ вѣроятность, что Общество не потерпитъ убытка, превышающаго сумму c'.

Изъ послѣдняго уравненія выведемъ для преміи b слѣдующее значеніе:

$$b = \frac{\mu' a - c'}{m}. \tag{133}$$

Изобразимъ чрезъ g прибыль Страховаго Общества, соотвѣтствующую тому случаю, когда число кораблекрушеній будетъ только μ'', разумѣя подъ μ'' число, вообще значительно меньшее μ'. Получимъ

$$mb - \mu'' a = g.$$

Исключивъ mb посредствомъ уравненія (133), найдемъ

$$\mu'' = \mu' - \frac{c'+g}{a}. \tag{134}$$

Въ силу этой формулы, μ'' опредѣлится посредствомъ μ' и g. Подставивъ μ'' на мѣсто μ въ уравненіе (131), опредѣлимъ значеніе вѣроятности P; потомъ, соображаясь съ степенью близости P къ достовѣрности или къ единицѣ, Общество можетъ разсудить, выгодно ли будетъ для него принимать на страхъ предлагаемые корабли. Если окажется, что вѣроятность P слишкомъ слаба, то можно увеличить её распространеніемъ круга дѣйствія Общества, именно, принятіемъ на страхъ бо́льшаго числа кораблей. По мѣрѣ увели-

ченія этого числа m, отношеніе $\frac{\mu'-\mu''}{m}$ будетъ уменьшаться, а равно и сумма членовъ, заключающихся между двумя слѣдующими:

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-\mu').1.2.3\ldots\mu'}(1-p)^{m-\mu'}.p^{\mu'} \quad \text{и} \quad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-\mu'').1.2.3\ldots\mu''}(1-p)^{m-\mu''}.p^{\mu''},$$

и изображающая разность вѣроятностей убытка и прибыли.

Чтобы сдѣлать совершенно вразумительнымъ сказанное нами объ употребленіи формулы (131), считаемъ не излишнимъ привести численный примѣръ; съ этою цѣлію воспользуемся выкладками, приведенными у *Лакроа*, въ третьемъ изданіи его *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités* (стр. 243 и слѣдующія).

Положимъ сперва, что число застрахованныхъ кораблей $m = 200$; вѣроятность кораблекрушенія $p = \frac{1}{100}$; слѣдовательно, противная вѣроятность $1 - p = \frac{99}{100}$. Численныя значенія первыхъ 12 членовъ разложенія $\left(\frac{99}{100} + \frac{1}{100}\right)^{200}$, а также и суммъ, происходящихъ отъ сложенія послѣдовательныхъ членовъ, заключаются въ слѣдующей таблицѣ:

Число кораблекрушеній	Вѣроятности	Сумма вѣроятностей	Число кораблекрушеній	Вѣроятности	Сумма вѣроятностей
0	0,133980	0,133980	6	0,011727	0,995706
1	0,270667	0,404647	7	0,003283	0,998989
2	0,272034	0,676681	8	0,000800	0,999789
3	0,181355	0,858036	9	0,000172	0,999961
4	0,090220	0,948256	10	0,000033	0,999994
5	0,035723	0,983979	11	0,000005	0,999999

Такъ напримѣръ, если бы по этой таблицѣ желали узнать вѣроятность погибели 6 кораблей изъ числа 200, то нашли бы, что искомая вѣроятность равна 0,011727. Вѣроятность же P, что число кораблекрушеній не превзойдетъ 6-ти, будетъ равняться суммѣ предшествующихъ шести членовъ, вмѣстѣ съ седьмымъ, то есть дроби 0,995706.

Войдемъ еще въ нѣкоторыя подробности относительно употребленія этой таблицы. Положимъ, напримѣръ, что наибольшая потеря, которой Общество рѣшается подвергаться, есть цѣнность 7-ми кораблей, то есть $7a$, съ вѣроятностію $\frac{99999}{100000}$, что потеря не превзойдетъ этой суммы. Въ такомъ предположеніи будетъ $c' = 7a$, $P' = 0,99999$. Для полученія этой вѣроятности, должно дойти до такого члена таблицы, относительно кото-

раго сумма вѣроятностей не меньше 0,99999, то есть до 11-го въ настоящемъ случаѣ, соотвѣтствующаго 10 кораблекрушеніямъ. Поэтому найдемъ $P = 0{,}999994$; слѣдовательно, $\mu' = 10$, и формула (133) доставитъ для преміи

$$b = \frac{\mu' a - c'}{m} = \frac{10a - 7a}{200} = \frac{1\frac{1}{2}}{100}.a,$$

то есть *полтора* процента цѣнности a каждаго корабля.

Если бы, сверхъ того, желали найти вѣроятность, что прибыль Общества не будетъ ниже извѣстной суммы, напримѣръ десятой части отъ $c' = 7a$, то надлежало бы взять $g = \frac{7a}{10}$, и тогда, изъ уравненія (134), вывели бы

$$\mu'' = \mu' - \frac{c' + g}{a} = 10 - \frac{7a + 0{,}7.a}{a} = 2{,}3.$$

Такъ какъ эта величина заключается между 2 и 3, то пріискавъ по таблицѣ въ столбцѣ суммъ вѣроятностей показанія, соотвѣтствующія 2-мъ и 3-мъ кораблекрушеніямъ, найдемъ дроби 0,676681 и 0,858036. И такъ, можно принять приблизительно дробь 0,75 или $\frac{3}{4}$ за значеніе вѣроятности, что прибыль Страховаго Общества будетъ не ниже $0{,}7.a$. Эту вѣроятность можно еще увеличить, возвысивъ цѣну страховой преміи b.

Въ сдѣланномъ сей-часъ предположеніи, достаточно было дойти до 4-го члена таблицы, то есть до потери 3-хъ кораблей, чтобы сумма $200b$, полученная Обществомъ за страхъ, уравновѣшивала потерю его, именно сумму $3a$, которую оно обязано выдать за крушеніе 3-хъ кораблей. Поэтому, на сторонѣ Общества будетъ вѣроятность $0{,}858036 > \frac{5}{6}$, что капиталъ его останется непропутымъ.

При большемъ числѣ застрахованныхъ кораблей, предѣлъ наибольшей потери, которой подвергается Общество съ равною вѣроятностію какъ и выше, то есть 100000 противъ 1, возрастаетъ, но несравненно медленнѣе чѣмъ число застрахованныхъ кораблей. Въ то же время вѣроятность постоянной прибыли, а равно и вѣроятность, что Общество не тронетъ своихъ капиталовъ, увеличивается. Эти результаты прямо ведутъ къ слѣдствію, что выгода Страховаго Общества состоитъ въ возможномъ распространеніи своего круга дѣйствія.

Въ подтвержденіе упоминаемыхъ результатовъ, приведемъ еще, для сличенія, другіе численные примѣры, которые мы также заимствуемъ у Лакроа. Положимъ, что при прежнихъ данныхъ, число застрахованныхъ кораблей увеличилось, и простирается до 400; и такъ $m = 400$. Если премія b останется по прежнему въ полтора процента, то найдется, что предѣлъ наибольшей потери Общества, при вѣроятности 0,99999, соотвѣтствуетъ крушенію отъ 14 до 15 кораблей, и слѣдовательно будетъ равняться суммѣ, заключающейся между $14a$ и $15a$; но какъ выручка Общества за страхъ 400 кораблей равняется $400.\frac{1\frac{1}{2}}{100}.a = 6a$, то предѣлъ потери будетъ только отъ $8a$ до $9a$. Чтобы эта потеря не превосходила $7a$, надобно, или нѣсколько увеличить полутора-процентную премію, или же довольствоваться вѣроятностію, нѣсколько меньшею дроби 0,99999. Эта меньшая вѣроятность соотвѣтствовала бы крушенію числа кораблей, не превосходящаго 13-ти, и равнялась бы суммѣ первыхъ 14-ти членовъ разложенія $\left(\frac{99}{100} + \frac{1}{100}\right)^{400}$. Непосредственное вычисленіе ихъ доставило бы для этой вѣроятности дробь 0,9999321, мало разствующую отъ 0,99999.

Чтобы опредѣлить вѣроятность прибыли, равняющейся, напримѣръ, десятой части $9a$, стоитъ только положить въ формулѣ (134) $\mu' = 15$, $c' = 9.a$, $g = \frac{9a}{10}$; получимъ

$$\mu'' = 5{,}1 \text{ или, въ цѣлыхъ числахъ, } \mu'' = 5.$$

Сумма вѣроятностей, соотвѣтствующая крушенію числа кораблей, не превышающаго 5-ти, будетъ 0,7859190, или, приближенно, $\frac{4}{5}$.

Вѣроятность, что капиталъ Общества останется неприкосновеннымъ, опредѣлится суммою первыхъ 7-ми членовъ разложенія $\left(\frac{99}{100} + \frac{1}{100}\right)^{400}$, ибо потеря 6-ти кораблей вознаграждается преміями, вырученными за страхъ 400 кораблей. Произведя означенное вычисленіе, найдется, что искомая вѣроятность равна 0,8903749, или почти $\frac{9}{10}$.

Если положимъ, что число застрахованныхъ кораблей $m = 4000$, то получимъ слѣдующіе результаты: найдется, что прежняя вѣроятность 0,99999 соотвѣтствуетъ крушенію отъ 68 до 69 кораблей; дѣйствительно, сумма первыхъ 69 членовъ разложенія $\left(\frac{99}{100} + \frac{1}{100}\right)^{4000}$ нѣсколько меньше 0,99999, а 70-ти членовъ, нѣсколько больше. И такъ, можно принять, что число кораблекрушеній не превзойдетъ 69 съ вѣроятностію 100000 противъ 1. Этому наибольшему числу крушеній будетъ соотвѣтствовать потеря Общества, равная $69.a$; но какъ число застрахованныхъ кораблей есть 4000, за которые выручено $4000.\frac{1\frac{1}{2}}{100}.a = 60.a$, то дѣйствительная потеря Общества будетъ не болѣе $69a - 60a = 9a$. Замѣтимъ, что этотъ результатъ весьма мало разствуетъ отъ того, который получили при застрахованіи 400 судовъ.

Для прибыли, равной по крайней мѣрѣ десятой доли $9a$, получится

$$\mu'' = 69 - \frac{9a + 0{,}9.a}{a} = 59{,}1 \text{ или просто } \mu'' = 59;$$

этому значенію μ'', опредѣляемому суммою 60-ти первыхъ членовъ разложенія $\left(\frac{99}{100} + \frac{1}{100}\right)^{4000}$, соотвѣтствуетъ вѣроятность 0,9982161, то есть слишкомъ 500 противъ 1.

Наконецъ, такъ какъ вырученная Обществомъ сумма по преміямъ покрываетъ издержки за погибель 60 кораблей, то вѣроятность, что капиталъ Общества останется неприкосновеннымъ, выразится суммою 61-го члена разложенія $\left(\frac{99}{100}+\frac{1}{100}\right)^{4000}$, которая будетъ 0,9988661, или слишкомъ 800 противъ 1.

При такомъ обширномъ кругѣ дѣйствія, какъ напримѣръ при оборотѣ, обнимающемъ 4000 застрахованныхъ кораблей, предполагаемая прибыль $\frac{9a}{10}$ конечно покажется слишкомъ маловажною. Въ этомъ отношеніи должно замѣтить, что дѣйствительная прибыль, по всей вѣроятности, будетъ несравненно значительнѣе. Такъ напримѣръ, если положимъ, что число крушеній не превзойдетъ 48, а это предположеніе утверждается вѣроятностію $0{,}9086204 > \frac{9}{10}$, то прибыль Общества будетъ уже $60a-48a=12a$.

Приведенные три случая относительно застрахованія 200, 400 и 4000 кораблей при одинаковыхъ условіяхъ, ясно показываютъ, что съ увеличеніемъ круга дѣйствія, выгодныя статочности Общества возрастаютъ несравненно быстрѣе, чѣмъ невыгодныя. Это очевидно слѣдуетъ изъ того, что при переходѣ отъ $m=200$ къ $m=400$ и къ $m=4000$, вѣроятность прибыли приближалась къ достовѣрности довольно быстро, между тѣмъ какъ величина c' наибольшей предполагаемой потери возрастала очень мало.

Замѣтимъ еще, что численныя выкладки, относящіяся къ застрахованіямъ, какъ мы уже отчасти видѣли изъ предъидущаго, основаны преимущественно на употребленіи формулы (131). Но вычисленіе вѣроятности P по этой формулѣ, или, что́ всё равно, суммованіе первыхъ $\mu+1$ членовъ разложенія $[(1-p)+p]^m$, при m и μ значительныхъ, будетъ весьма утомительно по продолжительности выкладокъ. Поэтому, при большомъ числѣ слагаемыхъ членовъ, употребляются вычисленія приблизительныя, основанныя на особенныхъ пріёмахъ аналитическихъ. Читатели найдутъ въ *Théorie analytique des Probabilités* Лапласа (стр. 149) указанія на рѣшеніе этой задачи по приближенію, а въ сочиненіи Поассона *Recherches sur la probabilité des jugements* (стр. 189 и слѣдующія) всѣ подробности, относящіяся къ этому рѣшенію.

Переходимъ теперь къ опредѣленію статочностей лица, отдающаго на страхъ.

Вспомнимъ, что по сдѣланному предположенію, купецъ, отправляющій m кораблей, подвергаетъ риску капиталъ, равный ma. Положимъ, сверхъ того, что эта сумма должна быть въ обращеніи s лѣтъ, и что проценты, которые купецъ могъ бы получить безъ всякаго риска, простираются до d со ста. Слѣдовательно, настоящее значеніе капитала ma будетъ $ma\left(1+\frac{d}{100}\right)^s$, или mar^s, принявъ для краткости $1+\frac{d}{100}=r$. Пусть будетъ h барышъ или выручка, которую купецъ ожидаетъ съ груза каждаго корабля, какъ возмездіе за труды свои, независимо отъ упомянутыхъ сей-часъ процентовъ. Поэтому $m[ar^s+h]$ изобразитъ ту сумму, которую онъ въ правѣ ожидать отъ своего предпріятія по истеченіи s лѣтъ, а $m[ar^s+h]-ma$ полное приращеніе первоначальнаго капитала ma. Наконецъ, пусть будетъ B дѣйствительный барышъ въ случаѣ успѣха; излишекъ этого барыша предъ ожидаемою выгодою, очевидно изобразится разностію

$$B-[m(ar^s+h)-ma]=B-m[a(r^s-1)+h].$$

Вотъ та сумма, которую купецъ можетъ жертвовать для обезпеченія успѣха своего предпріятія. Слѣдовательно премія b, которую онъ можетъ платить Страховому Обществу за страхъ каждаго корабля, опредѣлится формулою

$$b=\frac{B}{m}-a(r^s-1)-h. \qquad (135)$$

Но здѣсь можетъ еще представиться вопросъ, а именно: при какихъ условіяхъ выгоднѣе будетъ для купца отправить корабли безъ застрахованія, то есть безъ платы премій, и въ какомъ случаѣ, напротивъ того, благоразуміе требуетъ, чтобъ онъ застраховалъ ихъ, платя за страхъ каждаго судна найденную сей-часъ премію b?

Пусть будутъ по прежнему $1-p$ и p вѣроятности успѣха и неуспѣха, то есть достиженія корабля въ цѣлости до мѣста назначенія и его погибели. Разсмотримъ первые $\mu+1$ члена разложенія $[(1-p)+p]^m$; означивъ ихъ сумму чрезъ P, получимъ, какъ и выше, формулу (131). Въ такомъ предположеніи P очевидно изобразитъ вѣроятность, что изъ числа m отправляемыхъ кораблей, достигающихъ благополучно до мѣста назначенія будетъ не менѣе $m-\mu$, а погибающихъ, не болѣе μ. И такъ, допустивъ самое невыгодное событіе для купца, именно, потерю μ кораблей, прибыль его выразится чрезъ

$$(m-\mu)\left[\frac{B}{m}-a(r^s-1)-h\right],$$

а потеря чрезъ

$$\mu\left[ar^s+h\right];$$

поэтому, чистая выручка, сверхъ процента d на капиталъ и барыша h за каждый грузъ, будетъ

$$(m-\mu)\left[\frac{B}{m}-a(r^s-1)-h\right]-\mu\left[ar^s+h\right].$$

Покамѣстъ эта величина положительная, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, вѣроятность P этой

выручки довольно близка къ достовѣрности, купецъ не будетъ имѣть выгоды застрахо-
вывать свои корабли. Но когда

$$(m-\mu)\left[\frac{B}{m}-a(r^s-1)-h\right]-\mu\left[ar^s+h\right]<0,$$

то есть

$$\frac{\mu}{m-\mu}>\frac{\frac{B}{m}-a(r^s-1)-h}{ar^s+h},$$

или еще, когда вѣроятность P слишкомъ слаба для того, чтобъ купецъ могъ подвергаться
риску, то по всему благоразумію, онъ долженъ будетъ застраховать свои корабли, сообра-
жаясь притомъ въ платѣ преміи съ найденными двумя предѣлами, опредѣляемыми форму-
лами (133) и (135).

Замѣтимъ, что если бы, напротивъ того, допустили условіе

$$\frac{\mu}{m-\mu}<\frac{\frac{B}{m}-a(r^s-1)-h}{ar^s+h}, \tag{136}$$

при которомъ купецъ можетъ имѣть выгоду не страховать кораблей, то вывели бы изъ
него наибольшее значеніе для μ, при данной величинѣ B. По извѣстному же μ опредѣ-
лится и P изъ формулы (131). Тогда можно видѣть, по степени близости P къ еди-
ницѣ, благоразумно-ли не отдавать кораблей на страхъ. Если примемъ P извѣстнымъ, то,
чрезъ сложеніе послѣдовательныхъ членовъ формулы (131), найдемъ μ, и, въ такомъ
случаѣ, посредствомъ неравенства (136), не трудно будетъ опредѣлить предѣлъ величины
B, отъ котораго выгоднѣе для купца отправить корабли, застраховавъ ихъ предварительно.

Мы не будемъ входить въ другія подробности, относящіяся къ застрахованіямъ. По-
казаннаго нами достаточно для того, чтобы составить себѣ ясное понятіе о пріёмахъ, на
основаніи которыхъ рѣшаются подобнаго рода задачи. Прибавимъ только къ этому, что
главная данная, вѣроятность p погибели корабля или другаго какого либо застраховывае-
маго имущества, опредѣляется посредствомъ наблюденій, по возможности многочисленнѣй-
шихъ. Эти-то наблюденія, чаще всего, недостаточны. Еслибъ имѣли, для разныхъ морей
и для разныхъ временъ года, вѣрныя таблицы погибели кораблей, то, по полному ихъ
числу и по числу погибшихъ изъ нихъ, при однихъ и тѣхъ же обстоятельствахъ, нашли
бы приближенно вѣроятность кораблекрушенія. Дѣйствительно, пусть M изображаетъ это
полное число, а N число погибшихъ кораблей; вѣроятность крушенія будетъ приближенно
$\frac{N}{M}$, или, вѣрнѣе, $\frac{N+1}{M+2}$, какъ объяснено въ N° 59. Но принявъ $p=\frac{N+1}{M+2}$, должно на-
блюдать, чтобы число застрахованныхъ кораблей m было значительнымъ образомъ менѣе
M (ГЛАВА VII, N° 57).

Сдѣлаемъ еще одно замѣчаніе: суммы, какъ получаемыя Страховымъ Обществомъ, такъ
и выдаваемыя имъ страхователямъ, должны быть приведены къ одной и той же эпохѣ,
что̀ можетъ также представить не малое затрудненіе по причинѣ неизвѣстности въ кото-
рой находимся, когда именно корабль претерпитъ крушеніе, и слѣдовательно, когда Об-
щество должно будетъ заплатить за него. И въ этомъ отношеніи должно обратиться къ
наблюденіямъ, и принять за основаніе расчётовъ средній срокъ кораблекрушеній.

Изъ всего сказаннаго о застрахованіяхъ видимъ, что этого рода оборотъ можетъ быть
разсматриваемъ какъ бы условіе, заключенное между значительнымъ числомъ лицъ съ
обязательствомъ взаимно вознаграждать потери, претерпѣваемыя отъ разныхъ случайностей
нѣкоторыми изъ договаривающихся. Въ такомъ видѣ, Страховое Общество служитъ какъ
бы посредникомъ между договаривающимися, и за это посредничество, въ видѣ возна-
гражденія за труды, Общество пользуется преміею, превосходящею ту, которую надлежало
бы платить, еслибъ руководствовались правиломъ математической безобидности. Когда
устранимъ это посредничество, то страхователи очевидно выиграютъ отъ пониженія цѣны
платимой преміи; таково основаніе *обществъ взаимнаго застрахованія*, безъ сомнѣнія
самыхъ благодѣтельныхъ изъ учрежденій этого рода. При взаимномъ застрахованіи, кромѣ
нѣкоторыхъ неизбѣжныхъ расходовъ, капиталъ, составленный изъ наращенія премій, почти
во всей цѣлости своей, употребленъ для достиженія прямой цѣли товарищества, именно,
вознагражденія случайныхъ убытковъ, претерпѣваемыхъ нѣкоторыми изъ участниковъ.

76. Въ заключеніе этой Главы докажемъ, что какъ бы частная прибыль Общества на
каждое застрахованіе не была мала, оно, почти съ достовѣрностію, получитъ выгоду тѣмъ
значительнѣе, чѣмъ кругъ его дѣйствія будетъ обширнѣе. Если означимъ чрезъ s полное
число застрахованій, а чрезъ β вѣроятную выручку Общества по каждому застрахованію,
то чистая его прибыль будетъ очень мало разниться отъ $s.\beta$ съ тѣмъ бо̀льшею вѣроят-
ностію, чѣмъ s будетъ становиться значительнѣе.

Въ Главѣ III (N° 31) уже было предложено доказательство этого предложенія. Дѣй-
ствительно, что̀ доказано въ N° 31 относительно двухъ игроковъ, играющихъ весьма
значительное число m партій, то̀ самое можно примѣнить, безъ малѣйшей перемѣны, къ
Страховому Обществу, котораго кругъ дѣйствія обнимаетъ m застрахованій. При малѣй-
шемъ перевѣсѣ благопріятныхъ статочностей, выгода Общества возрастаетъ вмѣстѣ съ
числомъ застрахованій, точно такъ какъ и выгода того игрока, на сторонѣ котораго болѣе
статочностей для выигрыша, отъ искусства ли его, или отъ другой причины. Но, замѣ-
тимъ, что въ N° 31 вѣроятность событія предполагалась извѣстною *a priori*, что̀ вообще

не имѣетъ мѣста при застрахованіяхъ, гдѣ вѣроятности ожидаемыхъ событій, благопріятныхъ или неблагопріятныхъ, опредѣляются только *a posteriori*. И такъ, для полноты, распространимъ доказательство Главы III на тотъ случай, когда вѣроятности событій, доставляющихъ прибыль или потерю, неизвѣстны.

Для большей вразумительности положимъ, что рѣчь идетъ, какъ и выше, объ застрахованіяхъ отъ морскихъ опасностей. Пусть изъ предшествующихъ, весьма многочисленныхъ наблюденій, оказалось, что изъ m отправленныхъ кораблей, n достигли благополучно мѣста назначенія, а остальные $m-n$ погибли. Сверхъ того допустимъ, что на страхъ Общества поступило s кораблей, съ платою за каждый преміи b; въ случаѣ же погибели корабля, Общество платитъ страхователю опредѣленную сумму a. При такихъ условіяхъ, будемъ искать вѣроятную выгоду Страховаго Общества.

Положимъ, что изъ числа s застрахованныхъ кораблей, $\frac{n}{m}s+z$ достигли мѣста назначенія, и слѣдовательно $\frac{m-n}{m}s-z$ погибли. Въ силу теоремы Якова Бернулли, z будетъ число довольно малое въ сравненіи съ $\frac{n}{m}s$ и $\frac{m-n}{m}s$. Такъ какъ выручка за страхъ полнаго числа s кораблей есть $s.b$, а выдача за погибшіе корабли $\left(\frac{m-n}{m}s-z\right)a$, то чистая прибыль Общества будетъ

$$sb-\left(\frac{m-n}{m}s-z\right)a=\left(b-\frac{m-n}{m}a\right)s+za. \qquad (137)$$

Опредѣлимъ теперь вѣроятность P этой выгоды.

Пусть будетъ x вѣроятность достиженія корабля до мѣста назначенія. Вѣроятность этой величины x, выведенной изъ наблюденныхъ событій, изобразится дробью [№ 55 формула (92)]

$$\frac{x^n(1-x)^{m-n}dx}{\int_0^1 x^n(1-x)^{m-n}dx}.$$

Вѣроятность, *a priori*, что изъ s кораблей, $\frac{n}{m}s+z$ достигнутъ мѣста назначенія, будетъ

$$\frac{1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots\left(\frac{n}{m}s+z\right).1.2.3\ldots\left(\frac{m-n}{m}s-z\right)}.x^{\frac{n}{m}s+z}(1-x)^{\frac{m-n}{m}s-z}.$$

Произведеніе послѣднихъ двухъ величинъ, интегрированное въ разсужденіи x отъ $x=0$ до $x=1$, изобразитъ (№ 55) вѣроятность P', выведенную изъ наблюденныхъ событій, что изъ числа s отправленныхъ кораблей, $\frac{n}{m}s+z$ достигнутъ благополучно мѣста назначенія. И такъ

$$P'=\frac{1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots\left(\frac{n}{m}s+z\right).1.2.3\ldots\left(\frac{m-n}{m}s-z\right)}.\frac{\int_0^1 x^{\frac{n}{m}s+z+n}(1-x)^{\frac{m-n}{m}s-z+m-n}.dx}{\int_0^1 x^n(1-x)^{m-n}.dx}.$$

Преобразовавъ вторую часть этой формулы точно такъ какъ показано подробно въ № 69, получимъ:

$$P'=\sqrt{\frac{ms}{2\pi n(m-n)(m+s)}}.M,$$

гдѣ, для краткости,

$$M=\frac{\left(1+\frac{mz}{n(m+s)}\right)^{\frac{n}{m}s+z+n+\frac{1}{2}}.\left(1-\frac{mz}{(m-n)(m+s)}\right)^{\frac{m-n}{m}s-z+m-n+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{mz}{ns}\right)^{\frac{n}{m}s+z+\frac{1}{2}}.\left(1-\frac{mz}{s(m-n)}\right)^{\frac{m-n}{m}s-z+\frac{1}{2}}}.$$

Возьмемъ теперь, какъ въ томъ же № 69, Неперовъ логариѳмъ числа M; ограничиваясь тою же степенью приближенія, найдемъ послѣ всѣхъ сокращеній:

$$\log.M=\frac{(2n-m)m^2}{2ns(m-n)(m+s)}.z-\frac{m^3}{2ns(m-n)(m+s)}.z^2,$$

откуда

$$P'=\sqrt{\frac{ms}{2\pi n(m-n)(m+s)}}.\left\{1+\frac{(2n-m)m^2}{2ns(m-n)(m+s)}.z\right\}.e^{-\frac{m^3}{2ns(m-n)(m+s)}.z^2}.$$

Далѣе, разсуждая опять какъ въ упомянутомъ №, увидимъ, что величина z можетъ принять всѣ слѣдующія значенія:

$$-\frac{ns}{m},\ -\frac{ns}{m}+1,\ -\frac{ns}{m}+2,\ldots\ldots\ s-\frac{ns}{m}-1,\ s-\frac{ns}{m},$$

почему настоящая вѣроятность числа $\frac{n}{m}s+z$, при опредѣленномъ z, изобразится отношеніемъ (№ 52)

$$P_1=\frac{P'}{\Sigma P'}.$$

Конечный интегралъ $\Sigma P'$ долженъ быть взятъ относительно всѣхъ возможныхъ цѣлыхъ значеній z, именно, отъ $z=-\frac{ns}{m}$, до $z=s-\frac{ns}{m}$ включительно.

Руководствуясь замѣчаніемъ, сдѣланнымъ въ № 69, можно, безъ ощутительной погрѣшности, замѣнить конечный интегралъ $\Sigma P'$ обыкновеннымъ интеграломъ, взятымъ между тѣми же предѣлами. Поэтому получимъ

$$P_1=\frac{P'dz}{\int_{-\frac{ns}{m}}^{s-\frac{ns}{m}}P'dz}$$

Съ небольшимъ вниманіемъ увидимъ, что функція P' такого свойства, что даже для посредственной величины перемѣнной z, она очень мала; поэтому предѣлы $-\frac{ns}{m}$ и $s-\frac{ns}{m}$, при значительномъ s, можно соотвѣтственно замѣнить отрицательною и положительною безконечностію, безъ ощутительной погрѣшности. Чтобы удостовѣриться въ этомъ, стоитъ только обратить вниманіе на тó, что предѣлы $-\frac{ns}{m}$ и $s-\frac{ns}{m}$, при значительномъ s, будутъ числа не очень малыя, въ особенности же первое изъ нихъ. Что касается до разности $s-\frac{ns}{m}$, то хотя бы она не превышала даже четырехъ или пяти единицъ, то и въ такомъ случаѣ, при вычисленіи интеграла, можно будетъ, безъ чувствительной погрѣшности, замѣнить этотъ предѣлъ положительною безконечностію. И такъ

$$P_1 = \frac{P'dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} P'dz}.$$

Опредѣляя интегралъ, находящійся въ знаменателѣ, какъ показано въ N° 69, получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P'dz = \frac{s}{m};$$

и слѣдовательно

$$P_1 = \sqrt{\frac{m^3}{2\pi ns(m-n)(m+s)}}.\left\{1-\frac{(2n-m)m^2}{2ns(m-n)(m+s)}z.\right\}.e^{-\frac{m^3}{2ns(m-n)(m+s)}.z^2}.dz.$$

Для опредѣленія вѣроятности P, что выгода Общества будетъ заключаться между предѣлами

$$\left(b-\frac{m-n}{m}a\right)s \pm Za,$$

стоитъ только взять интегралъ функціи P_1 между предѣлами $z=-Z$ и $z=+Z$. Руководствуясь анализомъ N° 69, найдемъ окончательно

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-U}^{+U} e^{-u^2}du,$$

разумѣя подъ U величину

$$U = Z\sqrt{\frac{m^3}{2ns(m-n)(m+s)}}.$$

Замѣтимъ теперь, что найденная вѣроятность P будетъ очень мало разниться отъ единицы или достовѣрности, даже при посредственной величинѣ U, какъ напримѣръ при $U=4$ или 5 и проч. Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ, интегралъ $\int_{-U}^{+U} e^{-u^2}du$

чрезвычайно мало разствуетъ отъ интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$, почему и самая величина P стремится неопредѣленно къ предѣлу 1.

Чтобы составить себя ясное понятіе объ значеніи Z, допустимъ, что по значительности числа собранныхъ наблюденій, порядокъ величинъ m и n не ниже порядка количества s, или даже, что m и n значительно превосходятъ s. По сущности вопроса, разность $m-n$ можно считать одного порядка съ m и n. Сверхъ того, такъ какъ U предполагается числомъ посредственной величины, то ясно что количество Z будетъ одного порядка съ $\sqrt{s}$, ибо имѣемъ уравненіе

$$Z = U\sqrt{\frac{2ns(m-n)(m+s)}{m^3}},$$

которому можемъ дать видъ

$$Z = U\sqrt{\frac{2n}{m}.\frac{m-n}{m}.\frac{m+s}{m}}.\sqrt{s}.$$

Но отношенія $\frac{2n}{m}$, $\frac{m-n}{m}$, $\frac{m+s}{m}$, по самому смыслу вопроса, суть величины посредственныя, независимыя отъ порядка количествъ m, n и s; тò же самое можно сказать и о коэффиціентѣ U въ силу сдѣланнаго выше предположенія. Слѣдовательно Z будетъ порядка $\sqrt{s}$, а поэтому несравненно меньше s.

На основаніи такого замѣчанія о величинѣ Z заключаемъ непосредственно, что членъ Za, составляющій вторую часть выгоды

$$\left(b-\frac{m-n}{m}a\right)s \pm Za,$$

будетъ несравненно меньше перваго члена $\left(b-\frac{m-n}{m}a\right)s$. Слѣдовательно, при весьма большомъ числѣ s застрахованій, дѣйствительная прибыль Общества, какъ бы впрочемъ ни была мала математическая выгода $b-\frac{m-n}{m}a$ по каждому застрахованію, неопредѣленно приближается къ значительной суммѣ

$$\left(b-\frac{m-n}{n}a\right)s,$$

возрастающей пропорціонально числу страховыхъ оборотовъ.



ГЛАВА X.

О НАИВЫГОДНѢЙШИХЪ РЕЗУЛЬТАТАХЪ НАБЛЮДЕНІЙ.

77. При изслѣдованіи различныхъ явленій природы, Естественная Философія основываетъ почти всѣ свои результаты на опытахъ или наблюденіяхъ. Чѣмъ эти опыты или наблюденія многочисленнѣе, и вмѣстѣ съ тѣмъ точнѣе, тѣмъ законы разсматриваемаго явленія обнаруживаются съ бóльшею опредѣлительностію. Поэтому, для достиженія возможнаго совершенства въ наукахъ наблюдательныхъ, необходимо подвергать изслѣдуемое явленіе значительному числу тщательныхъ наблюденій, производить ихъ при благопріятныхъ условіяхъ, и выбирать самые способы съ большою осмотрительностію.

При всемъ возможномъ стараніи устранить погрѣшности въ наблюденіяхъ, мы никогда, въ строгомъ смыслѣ, не достигаемъ этой цѣли. Такъ напримѣръ, самое тщательное послѣдовательное измѣреніе одной и той же величины, положимъ разстоянія, угла и т. п. приводитъ насъ къ результатамъ, хотя мало разнствующимъ между собою, но однакожъ не тождественнымъ, не смотря ни на искусство наблюдателей, ни на удовлетворительность употребляемыхъ ими способовъ, ни на точность инструментовъ. Хотя причины погрѣшностей наблюденій и должно отнести преимущественно къ недостаточности пріёмовъ наблюдателя, отчасти происходящей отъ несовершенства его чувствъ, и къ бóльшей или мéньшей степени неточности употребляемыхъ имъ инструментовъ, но тѣмъ не менѣе вліяніе такого рода причинъ не можетъ быть подвергнуто *a priori* математическому анализу; поэтому и эти причины, наровнѣ съ другими, которыхъ мы даже часто и не подозрѣваемъ, останутся для насъ неизвѣстными. И такъ, точное опредѣленіе какой бы то ни было величины по сдѣланнымъ надъ нею наблюденіямъ, есть задача невозможная. Умъ человѣческій можетъ только предпринять приблизиться къ точному значенію величины,

надъ которою произведены многочисленныя наблюденія, чрезъ совокупленіе сихъ послѣднихъ извѣстнымъ, наивыгоднѣйшимъ образомъ. Рѣшеніе этого важнаго вопроса зависитъ отъ Анализа Вѣроятностей.

Чтобы придать возможную степень ясности изложенію главнаго предмета этой Главы — опредѣленія наивыгоднѣйшихъ результатовъ наблюденій, — мы предложимъ сперва рѣшеніе нѣсколькихъ частныхъ вопросовъ, которые ознакомятъ читателей съ терминами и аналитическими пріёмами, употребительнѣйшими въ этой теоріи.

78. Положимъ, что производится s наблюденій, какого бы то ни было рода, и что при каждомъ пріёмѣ можно получить или точный результатъ, или ошибиться на единицу, положительную или отрицательную, безразлично. Допустимъ сверхъ того, что вѣроятность каждой изъ этихъ трехъ случайностей извѣстна *a priori*, именно, что изъ числа $a+2b$ случаевъ, a приводятъ къ точному результату, b къ погрѣшности $+1$ и b къ погрѣшности -1. Спрашивается, какъ велика вѣроятность P, что сумма погрѣшностей всѣхъ s наблюденій будетъ равна нулю*).

Такъ какъ въ этомъ вопросѣ простыя вѣроятности трехъ случайностей предполагаются извѣстными *a priori*, и будутъ соотвѣтственно $\frac{a}{a+2b}$, $\frac{b}{a+2b}$ и $\frac{b}{a+2b}$, то можно предложить задачу въ слѣдующемъ, болѣе ясномъ видѣ: *Дано* s *многогранниковъ или костей, совершенно одинаковыхъ, изъ которыхъ каждая имѣетъ* $a+2b$ *граней; на* a *граняхъ выставленъ* нуль, *на* b, $+1$, *на остальныхъ* b *граняхъ*, -1. *Всѣ* s *костей бросаютъ разомъ; спрашивается, какъ велика вѣроятность, что сумма вскрывшихся очковъ будетъ равняться* нулю.

Въ № 35 (ГЛАВА III) предложено рѣшеніе подобнаго вопроса. Разсуждая какъ тамъ, усмотримъ, что если означимъ чрезъ y_0 коэффиціентъ нулевой степени x, или, что̀ всё равно, членъ независимый отъ x въ разложеніи

$$[(x^0+x^0+\ldots+x^0)+(x^1+x^1+\ldots+x^1)+(x^{-1}+x^{-1}+\ldots+x^{-1})]^s=[a+b(x^1+x^{-1})]^s,$$

а чрезъ P искомую вѣроятность, то получимъ

$$P=\frac{y_0}{(a+2b)^s}.$$

Такимъ образомъ вопросъ приводится къ опредѣленію величины y_0. Разлагая $[a+b(x^1+x^{-1})]^s$ по Нютоновой теоремѣ, найдется

*) Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin, années 1770—1773, мемуаръ Лагранжа: *Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations*; стр. 168.

$$[a+b(x^1+x^{-1})]^s = a^s+sa^{s-1}b(x^1+x^{-1})+\frac{s(s-1)}{1.2}a^{s-2}b^2(x^1+x^{-1})^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}a^{s-3}b^3(x^1+x^{-1})^3+\ldots.$$

Въ этомъ разложеніи должно удержать только члены, независящіе отъ x. Весьма легко найти ихъ замѣтивъ, что ни одна нечётная степень двучленнаго количества x^1+x^{-1} не заключаетъ въ себѣ такихъ членовъ, а каждая чётная, вообще $(x^1+x^{-1})^{2k}$, доставитъ только одинъ средній членъ

$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots k},$$

независящій отъ x. На такомъ основаніи получимъ

$$y_0 = a^s+\frac{2}{1}\cdot\frac{s(s-1)}{1.2}a^{s-2}b^2+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}a^{s-4}b^4 + \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)}{1.2.3.4.5.6}a^{s-6}b^6+\ldots.$$

Слѣдовательно, изобразивъ чрезъ p простую вѣроятность $\frac{a}{a+2b}$ вскрытія *нуля* при бросаніи одной кости, и замѣтивъ сверхъ того, что вѣроятность вскрытія $+1$, а также -1, будетъ $\frac{b}{a+2b}=\frac{1-p}{2}$, найдемъ, въ силу формулы $P=\frac{y_0}{(a+2b)^s}$,

$$P = p^s+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{s(s-1)}{1.2}\cdot p^{s-2}(1-p)^2+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}\cdot p^{s-4}(1-p)^4+\ldots.$$

Положимъ въ частности, что вѣроятности получить какъ точный результатъ, такъ равно и ошибиться на $+1$ или на -1, одинаковы; тогда будетъ $a=b$, и слѣдовательно $p=\frac{a}{a+2b}=\frac{1}{3}$. Въ этомъ предположеніи найдется:

$$P = \frac{1}{3^s}\left[1+\frac{2}{1}\cdot\frac{s(s-1)}{1.2}+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}+\ldots\right].$$

Полагая послѣдовательно въ этой формулѣ $s=1, 2, 3, 4,\ldots$, получимъ:

Число наблюденій s:	*Вѣроятность P:*
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{7}{27}$
4	$\frac{19}{81}$
5	$\frac{51}{243}$
6	$\frac{141}{729}$
.....	

Сдѣлаемъ здѣсь одно необходимое замѣчаніе. Принявъ въ соображеніе, что, начиная съ двухъ наблюденій, рядъ вѣроятностей есть убывающій, ибо

$$\frac{1}{3}>\frac{7}{27}>\frac{19}{81}>\frac{51}{243}>\frac{141}{729}>\ldots,$$

мы въ правѣ будемъ заключить, что въ разсматриваемомъ случаѣ вѣроятность получить сумму погрѣшностей, равную нулю, уменьшается съ увеличеніемъ числа наблюденій.

Если условимся называть *среднею ариѳметическою погрѣшностію*, или просто *среднею погрѣшностію* сумму показаній всѣхъ наблюденій, раздѣленную на ихъ число s, то въ приведенномъ сей-часъ примѣрѣ окажется, что вѣроятность средней погрѣшности, равной нулю, уменьшается при возрастающемъ числѣ наблюденій. Дѣйствительно, при одномъ или двухъ наблюденіяхъ, вѣроятность средней погрѣшности, равной нулю, есть $\frac{1}{3}$, между тѣмъ какъ при трехъ, четырехъ и вообще бо́льшемъ числѣ наблюденій, вѣроятность той же средней погрѣшности будетъ постепенно уменьшаться, ибо $\frac{7}{27}<\frac{1}{3}$, $\frac{19}{81}<\frac{7}{27}<\frac{1}{3}$, и такъ далѣе. Отсюда, повидимому, надлежало бы заключить, что въ настоящемъ случаѣ выгоднѣе довольствоваться среднимъ результатомъ одного или двухъ наблюденій, чѣмъ допускать ихъ въ бо́льшемъ числѣ. Такое заключеніе покажется прямо противорѣчащимъ общепринятому правилу наблюдателей, допускающихъ средній результатъ тѣмъ съ бо́льшимъ довѣріемъ, чѣмъ число наблюденій, изъ котораго онъ выведенъ, будетъ значительнѣе. Правило среднихъ результатовъ, о которомъ мы упоминаемъ теперь, подтверждается и самою теоріею, какъ показано будетъ съ возможною подробностію въ этой же Главѣ. Поэтому, и встрѣтившееся сей-часъ противорѣчіе должно объясниться. Рѣшеніе слѣдующаго за симъ вопроса обнаружитъ самымъ удовлетворительнымъ образомъ, въ чёмъ собственно состоитъ этотъ кажущійся парадоксъ.

79. Допуская условія предъидущаго вопроса, *найти вѣроятность* P, *что численная величина средней погрѣшности, выведенной изъ* s *наблюденій, не превзойдетъ дроби* $\frac{m}{s}$, *то есть будетъ заключаться между предѣлами* $-\frac{m}{s}$ *и* $+\frac{m}{s}$, *включительно, предполагая* $m<s$.

Такъ какъ при каждомъ наблюденіи погрѣшность можетъ быть 0, съ вѣроятностію $\frac{a}{a+2b}$, или $+1$, или -1, съ вѣроятностію $\frac{b}{a+2b}$, то ясно, что средняя погрѣшность s наблюденій, получаемая чрезъ раздѣленіе на s суммы всѣхъ погрѣшностей, можетъ быть только одна изъ слѣдующихъ $2s+1$:

$$-\frac{s}{s},\quad -\frac{s-1}{s}\ldots.\ -\frac{2}{s},\quad -\frac{1}{s},\ 0,\quad +\frac{1}{s},\quad +\frac{2}{s},\ldots\ +\frac{s-1}{s},\quad +\frac{s}{s}.$$

Каждая изъ этихъ среднихъ погрѣшностей будетъ имѣть свою вѣроятность. Легко видѣть, что вѣроятность средней погрѣшности, положимъ $+\frac{\mu}{s}$, изобразится коэффиціентомъ степени x^{μ} въ разложеніи

$$\frac{[a+b(x^1+x^{-1})]^s}{(a+2b)^s},$$

разумѣя подъ μ какое ни есть цѣлое число, положительное, отрицательное или нуль, начиная отъ $\mu=-s$ до $\mu=+s$.

Обратимся теперь къ опредѣленію вѣроятности P. По условію вопроса, она будетъ равняться суммѣ вѣроятностей, что средняя погрѣшность принимаетъ послѣдовательно всѣ $2m+1$ значеній:

$$-\frac{m}{s},\quad -\frac{m-1}{s}\ldots.-\frac{1}{s},\quad 0,\quad +\frac{1}{s}\ldots.+\frac{m-1}{s},\quad +\frac{m}{s},$$

или, что̀ всё равно, всѣ слѣдующія:

$$0,\ \pm\frac{1}{s},\ \pm\frac{2}{s},\ \pm\frac{3}{s},\ldots.\pm\frac{m}{s}.$$

Пусть будетъ $\pm\frac{\mu}{s}$ одинъ изъ этихъ членовъ. Мы сей-часъ замѣтили, что вѣроятность средней погрѣшности $+\frac{\mu}{s}$ изобразится коэффиціентомъ степени x^{μ} въ разложеніи $[a+b(x^1+x^{-1})]^s$, раздѣленнымъ на $(a+2b)^s$. Для одинаковой средней погрѣшности, но съ отрицательнымъ знакомъ, именно для $-\frac{\mu}{s}$, найдется очевидно та̀ же величина. Слѣдовательно, изобразивъ чрезъ y_{μ} коэффиціентъ, о которомъ говоримъ, вѣроятность погрѣшности

$$\pm\frac{\mu}{s}\quad \text{будетъ}\quad \frac{2y_{\mu}}{(a+2b)^s}.$$

На такомъ основаніи, величину P можно представить въ видѣ

$$P=\frac{y_0+2(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_m)}{(a+2b)^s}. \tag{138}$$

Членъ y_0 найденъ уже въ предъидущемъ вопросѣ. Для опредѣленія дальнѣйшихъ коэффиціентовъ y_1, y_2, y_3 и вообще y_{μ}, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: по принятому сей-часъ знакоположенію, будетъ:

$$\left.\begin{aligned}[a+b(x^1+x^{-1})]^s = y_0+y_1(x^1+x^{-1})+y_2(x^2+x^{-2})+y_3(x^3+x^{-3})+\ldots.\\ +y_{\mu}(x^{\mu}+x^{-\mu})+\ldots.+y_s(x^s+x^{-s}).\end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Если возьмемъ логариѳмъ этого уравненія, а потомъ производную, и умножимъ ее на x, то получимъ

$$\frac{sb(x^1-x^{-1})}{a+b(x^1+x^{-1})}=\frac{y_1(x^1-x^{-1})+2y_2(x^2-x^{-2})+3y_3(x^3-x^{-3})+\ldots.+sy_s(x^s-x^{-s})}{y_0+y_1(x^1+x^{-1})+y_2(x^2+x^{-2})+\ldots.+y_s(x^s+x^{-s})}.$$

Освободясь отъ знаменателей, найдется

$$\begin{aligned}&sby_0(x^1-x^{-1})+sby_1(x^2-x^{-2})+sby_2(x^3-x^{-3}-x^1+x^{-1})+sby_3(x^4-x^{-4}-x^2+x^{-2})+\ldots.\\ &\quad= ay_1(x^1-x^{-1})+2ay_2(x^2-x^{-2})+3ay_3(x^3-x^{-3})+\ldots.\\ &\qquad+by_1(x^2-x^{-2})+2by_2(x^3-x^{-3}+x^1-x^{-1})+3by_3(x^4-x^{-4}+x^2-x^{-2})+\ldots.\end{aligned}$$

Сравнимъ теперь коэффиціенты одинакихъ степеней x; получимъ равенства:

$$\begin{aligned}sb(y_0-y_2) &= ay_1+2by_2\\ sb(y_1-y_3) &= 2ay_2+b(y_1+3y_3)\\ sb(y_2-y_4) &= 3ay_3+b(2y_2+4y_4)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ sb(y_{m-2}-y_m) &= (m-1)ay_{m-1}+b[(m-2)y_{m-2}+my_m].\end{aligned}$$

Наконецъ, положивъ для краткости $\frac{a}{b}=k$, выведемъ изъ предъидущихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}y_2 &= \frac{sy_0-ky_1}{s+2}\\ y_3 &= \frac{(s-1)y_1-2ky_2}{s+3}\\ y_4 &= \frac{(s-2)y_2-3ky_3}{s+4}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_m &= \frac{(s-m+2)y_{m-2}-(m-1)ky_{m-1}}{s+m}.\end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Изъ этихъ формулъ видимъ, что по извѣстнымъ двумъ величинамъ y_0 и y_1, весьма легко опредѣлить всѣ остальныя y_2, y_3, $y_4\ldots.y_m$. Но въ предъидущемъ N° 78 уже найдено

$$y_0=a^s+\frac{2}{1}\cdot\frac{s(s-1)}{1.2}\cdot a^{s-2}b^2+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}\cdot a^{s-4}b^4+\ldots. \tag{141}$$

Сверхъ того, непосредственное разложеніе первой части уравненія (139) доставитъ коэффиціентъ y_1 при x^1 или x^{-1}; произведя это разложеніе, получимъ:

$$y_1=sa^{s-1}b+\frac{3}{1}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\cdot a^{s-3}b^3+\frac{5.4}{1.2}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{1.2.3.4.5}\cdot a^{s-5}b^5+\ldots. \tag{142}$$

Формулы (138), (140), (141) и (142) заключаютъ въ себѣ полное рѣшеніе занимающаго насъ вопроса. Положимъ въ частности, какъ въ концѣ N° 78, $a=b$, и слѣдова-

тельно $k=1$; сверхъ того, принявъ $a=1$, что́ очевидно позволительно, найденныя формулы доставятъ:

$$P = \frac{y_0+2(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_m)}{3^s}$$

$$y_0 = 1+\frac{2}{1}\cdot\frac{s(s-1)}{1.2}+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}+\cdots$$

$$y_1 = s+\frac{3}{1}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}+\frac{5.4}{1.2}\cdot\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{1.2.3.4.5}+\cdots$$

$$y_2 = \frac{sy_0-y_1}{s+2}, \qquad y_3 = \frac{(s-1)y_1-2y_2}{s+3},$$

$$y_4 = \frac{(s-2)y_2-3y_3}{s+4}, \ldots y_m = \frac{(s-m+2)y_{m-2}-(m-1)y_{m-1}}{s+m}.$$

Приложимъ эти формулы къ опредѣленію вѣроятности, что средняя погрѣшность не превзойдетъ дроби $\frac{1}{2}$, положительной или отрицательной. Прежде всего замѣтимъ, что допуская предѣлы $\pm\frac{1}{2}$, должно будетъ разсматривать только *чётное* число наблюденій, потому что дробь вида $\frac{m}{s}$ не можетъ иначе обратиться въ $\frac{1}{2}$, какъ полагая s чётнымъ, иначе не получимъ цѣлаго значенія для m*). Итакъ, полагая послѣдовательно $s=2$, 4, 6, 8, найдемъ слѣдующія величины для вѣроятности P:

Число наблюденій s:	2	4	6	8
Вѣроятность P:	$\frac{7}{9}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{673}{729}$	$\frac{6247}{6561}$,

или, приведя всѣ дроби къ одному знаменателю для удобнѣйшаго сравненія ихъ между собою,

s:	2	4	6	8
P:	$\frac{5103}{6561}$	$\frac{5751}{6561}$	$\frac{6057}{6561}$	$\frac{6247}{6561}$.

*) *Лагранжъ*, въ своемъ Мемуарѣ (стр. 187) [смот. выноску въ нашей книгѣ на стр. 245], при рѣшеніи этой самой задачи, выразился, какъ намъ кажется, не совсѣмъ опредѣлительно, и это произошло отъ того что при разсматриваніи *нечётнаго* числа s наблюденій, вмѣсто предѣловъ $\pm\frac{1}{2}$, получаются очевидно тѣснѣйшіе, именно $\pm\frac{\frac{1}{2}(s-1)}{s}$. Такъ, напримѣръ, при *четырехъ* наблюденіяхъ, средняя погрѣшность можетъ быть равна $\frac{1}{2}$, а при *пяти* не можетъ равняться этой дроби; должно будетъ принять мéньшее значеніе, но вмѣстѣ съ тѣмъ ближайшее къ $\frac{1}{2}$, именно $\frac{2}{5}$. [illegible] такомъ случаѣ нѣтъ никакого противорѣчія въ томъ что вѣроятность средней погрѣшности, не превосходящей $\pm\frac{1}{2}$, равная $\frac{71}{81}$ или $\frac{213}{243}$ при *четырехъ* наблюденіяхъ, превышаетъ вѣроятность $\frac{201}{243}$ средней погрѣшности, не превосходящей $\pm\frac{2}{5}$, при *пяти* наблюденіяхъ.

Итакъ, вѣроятность P, что средняя погрѣшность не превзойдетъ дроби $\frac{1}{2}$, положительной или отрицательной, возрастаетъ съ числомъ наблюденій. Сверхъ того, если бы продолжили рядъ вѣроятностей, то усмотрѣли бы что онѣ неопредѣленно приближаются къ единицѣ или достовѣрности. На такомъ основаніи не трудно объяснить то́ противорѣчіе, о которомъ упомянуто въ концѣ предъидущаго N° 78. Тамъ мы видѣли, что при одномъ и двухъ наблюденіяхъ, вѣроятность средней ошибки, равной 0, есть $\frac{1}{3}$, а при бóльшемъ числѣ наблюденій, вѣроятность эта уменьшается, и даже довольно быстро. Совершенно противное тому случилось, когда, вмѣсто опредѣленной средней погрѣшности *нуль*, предположили только, что она заключается между двумя предѣлами $\pm\frac{1}{2}$, и искали вѣроятность этого предположенія. Въ послѣднемъ случаѣ, вѣроятность, что средняя погрѣшность не выходитъ изъ упомянутыхъ предѣловъ, возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ наблюденій, и уже, при 8-ми наблюденіяхъ, разнствуетъ отъ 1 или достовѣрности дробью, мéньшею $\frac{1}{20}$, ибо $1-\frac{6247}{6561}=\frac{314}{6561}<\frac{1}{20}$. Итакъ, представляется теперь вопросъ, что́ надёжнѣе, довольствоваться-ли вѣроятностію равною только $\frac{1}{3}$, что средняя погрѣшность одного или двухъ наблюденій равна 0, между тѣмъ какъ она можетъ быть и $+1$ и -1, или же произвести напримѣръ 8 наблюденій, и достигнуть вѣроятности $\frac{6247}{6561}>\frac{19}{20}$, что средняя погрѣшность не будетъ превышать $\pm\frac{1}{2}$. Здравый разсудокъ непремѣнно остановится на второмъ предположеніи, и сочтётъ болѣе надёжнымъ допустить 8 наблюденій, и вообще увеличить ихъ число по возможности, чтобы только получить бóльшую степень вѣроятности ошибиться не свыше извѣстныхъ предѣловъ.

Къ этому самому слѣдствію привело бы насъ разсматриваніе вѣроятностей, относящихся къ среднимъ погрѣшностямъ при другихъ предѣлахъ, какъ напримѣръ при $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{5}$.... Во всякомъ случаѣ заключили бы, что вѣроятность однихъ и тѣхъ же предѣловъ, въ отрицательную и положительную сторону, возрастаетъ съ числомъ наблюденій. При одномъ и томъ же числѣ наблюденій, предположеніе болѣе тѣсныхъ предѣловъ ослабляетъ вѣроятность ихъ; напротивъ того, вѣроятность увеличивается, когда расширяемъ предѣлы средней погрѣшности. Всѣ эти заключенія получатъ полную ясность и общность при дальнѣйшемъ развитіи излагаемой нами теоріи.

80. Переходимъ теперь къ задачѣ болѣе сложной, которая послужитъ намъ приготовленіемъ къ рѣшенію общаго вопроса.

Положимъ, что *производимъ* s *наблюденій, изъ которыхъ каждое можетъ привести къ одной изъ слѣдующихъ* 2n+1 *равновозможныхъ ошибокъ:*

—n, —(n—1), —(n—2),.... —2, —1, 0, +1, +2,....+(n—2), +(n—1), +n;

спрашивается, какъ велика вѣроятность, что средняя ошибка, и слѣдовательно сумма всѣхъ s *погрѣшностей, равна нулю.*

Легко видѣть, что этотъ вопросъ, по своимъ условіямъ, ни чѣмъ не отличается отъ слѣдующаго: *дано* s *совершенно одинаковыхъ многогранниковъ или костей; каждая имѣетъ* 2n+1 *граней, на которыя кость можетъ падать безразлично; на граняхъ написаны нумера:*

—n, —(n—1),....—1, 0, +1,.... +(n—1), +n.

Всѣ кости бросаютъ разомъ; требуется опредѣлить вѣроятность, что сумма вскрывшихся очковъ равна нулю.

Сообразно съ сказаннымъ въ N° 35 (ГЛАВА III) удостовѣримся, что изобразивъ чрезъ A_0 членъ, независящій отъ x въ разложеніи

$$(x^{-n}+x^{-(n-1)}+\ldots+x^{-1}+1+x^1+\ldots+x^{n-1}+x^n)^s = X^s, \qquad (143)$$

искомая вѣроятность, которую назовемъ P, опредѣлится формулою

$$P = \frac{A_0}{(2n+1)^s}. \qquad (144)$$

Непосредственное опредѣленіе точной величины A_0 чрезъ возвышеніе въ степень s суммы $x^{-n}+\ldots+x^{-1}+1+x^1+\ldots+x^n$, при значительномъ s, приведетъ къ формулѣ до такой степени сложной, что численное ея приложеніе можно считать невозможнымъ. Поэтому должно обратиться къ другимъ пріёмамъ, и искать простѣйшаго выраженія для A_0, тѣмъ ближе подходящаго къ точному его значенію, чѣмъ число s наблюденій будетъ значительнѣе. Займемся теперь подробнымъ рѣшеніемъ этого вопроса. Если выраженіе (143) напишемъ въ видѣ

$$[1+(x^1+x^{-1})+(x^2+x^{-2})+\ldots+(x^n+x^{-n})]^s,$$

и положимъ $x=e^{\varphi\sqrt{-1}}$, то, по причинѣ $x^m+x^{-m}=e^{m\varphi\sqrt{-1}}+e^{-m\varphi\sqrt{-1}}=2\mathrm{Cos}.m\varphi$, получимъ

$$X^s = [1+2(\mathrm{Cos}.\varphi+\mathrm{Cos}.2\varphi+\mathrm{Cos}.3\varphi+\ldots+\mathrm{Cos}.n\varphi)]^s.$$

Положимъ теперь, что вторая часть этого уравненія разложена въ рядъ, расположенный по косинусамъ кратныхъ дугъ φ, и пусть будетъ

$$X^s = A_0+2A_1\mathrm{Cos}.\varphi+2A_2\mathrm{Cos}.2\varphi+\ldots+2A_{sn}\mathrm{Cos}.sn\varphi.$$

Ясно, что здѣсь A_0 будетъ имѣть то́ же значеніе какъ и выше; дѣйствительно, замѣнивъ въ этой формулѣ косинусы кратныхъ дугъ ихъ выраженіями въ x, получимъ рядъ

$$X^s = A_0+A_1(x^1+x^{-1})+A_2(x^2+x^{-2})+\ldots+A_{sn}(x^{sn}+x^{-sn}),$$

въ которомъ, кромѣ A_0, нѣтъ ни одного коэффиціента, не сопровождающаго положительной или отрицательной степени x.

Для опредѣленія A_0 помножаемъ величину X^s на $d\varphi$, и интегрируемъ отъ $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$; получимъ

$$\int_0^\pi X^s d\varphi = A_0\pi+2A_1\int_0^\pi \mathrm{Cos}.\varphi.d\varphi+2A_2\int_0^\pi \mathrm{Cos}.2\varphi.d\varphi+\ldots+2A_{sn}\int_0^\pi \mathrm{Cos}.(sn\varphi).d\varphi.$$

Но всѣ интегралы, входящіе во вторую часть этого уравненія, равны нулю; дѣйствительно, при m цѣломъ, отличномъ отъ нуля, имѣемъ всегда

$$\int_0^\pi \mathrm{Cos}.m\varphi.d\varphi = \left(\frac{\mathrm{Sin}.m\varphi}{m}\right)_0^\pi = 0;$$

слѣдовательно

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi X^s d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [1+2(\mathrm{Cos}.\varphi+\mathrm{Cos}.2\varphi+\ldots+\mathrm{Cos}.n\varphi)]^s d\varphi.$$

Легко дать этому интегралу видъ болѣе простой, замѣтивъ что

$$1+2(\mathrm{Cos}.\varphi+\mathrm{Cos}.2\varphi+\ldots+\mathrm{Cos}.n\varphi) = \frac{\mathrm{Sin}.\frac{2n+1}{2}\varphi}{\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}\varphi},$$

[ПРИМѢЧАНІЕ X]; въ слѣдствіе этого равенства получимъ

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{\mathrm{Sin}.\frac{2n+1}{2}\varphi}{\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}\varphi}\right]^s d\varphi,$$

или, замѣнивъ $\frac{1}{2}\varphi$ угломъ φ,

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\mathrm{Sin}.(2n+1)\varphi}{\mathrm{Sin}.\varphi}\right]^s d\varphi. \qquad (145)$$

И такъ, рѣшеніе занимающаго насъ вопроса приводится къ опредѣленію этого интеграла по приближенію, въ возможно-простѣйшемъ видѣ. На сей конецъ, принявъ въ соображеніе что

$$\frac{\mathrm{Sin}.y}{\mathrm{Sin}.z} = \frac{y}{z}\cdot\frac{1-\frac{y^2}{\pi^2}}{1-\frac{z^2}{\pi^2}}\cdot\frac{1-\frac{y^2}{2^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}}\cdot\frac{1-\frac{y^2}{3^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}}\ldots\ldots$$

[ПРИМѢЧАНІЕ II, § 1], и положивъ для простоты $2n+1=m$, получимъ

$$\left(\frac{\text{Sin.}(2n+1)\varphi}{\text{Sin.}\varphi}\right)^s = (2n+1)^s\cdot\left(\frac{1-\frac{m^2\varphi^2}{\pi^2}}{1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}}\right)^s\cdot\left(\frac{1-\frac{m^2\varphi^2}{2^2\pi^2}}{1-\frac{\varphi^2}{2^2\pi^2}}\right)^s\cdot\left(\frac{1-\frac{m^2\varphi^2}{3^2\pi^2}}{1-\frac{\varphi^2}{3^2\pi^2}}\right)^s\ldots\ldots$$

Пусть для краткости будетъ

$$T_1=\left(\frac{1-\frac{m^2\varphi^2}{\pi^2}}{1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}}\right)^s,\quad T_2=\left(\frac{1-\frac{m^2\varphi^2}{2^2\pi^2}}{1-\frac{\varphi^2}{2^2\pi^2}}\right)^s \quad \text{и проч.}$$

Для удобнѣйшаго разложенія этихъ степеней, мы представимъ каждую изъ величинъ T_1, $T_2\ldots$ въ показательномъ видѣ на основаніи тождествъ

$$T_1=e^{\log.T_1},\quad T_2=e^{\log.T_2},\ldots$$

Поэтому найдется

$$\left(\frac{\text{Sin.}(2n+1)\varphi}{\text{Sin.}\varphi}\right)^s=(2n+1)^s.e^{\log.T_1+\log.T_2+\log.T_3+\cdots}.$$

Но

$$\log.T_1=s\left[\log.\left(1-\frac{m^2\varphi^2}{\pi^2}\right)-\log.\left(1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\right],$$

или, по разложеніи логариѳмовъ,

$$\log.T_1=-s\left[(m^2-1)\frac{\varphi^2}{\pi^2}+\frac{1}{2}(m^4-1)\frac{\varphi^4}{\pi^4}+\frac{1}{3}(m^6-1)\frac{\varphi^6}{\pi^6}+\cdots\right].$$

Совершенно подобнымъ образомъ получимъ:

$$\log.T_2=-s\left[(m^2-1)\frac{\varphi^2}{2^2\pi^2}+\frac{1}{2}(m^4-1)\frac{\varphi^4}{2^4\pi^4}+\frac{1}{3}(m^6-1)\frac{\varphi^6}{2^6\pi^6}+\cdots\right]$$

$$\log.T_3=-s\left[(m^2-1)\frac{\varphi^2}{3^2\pi^2}+\frac{1}{2}(m^4-1)\frac{\varphi^4}{3^4\pi^4}+\frac{1}{3}(m^6-1)\frac{\varphi^6}{3^6\pi^6}+\cdots\right]$$

....

Слѣдовательно

$$\log.T_1+\log.T_2+\log.T_3+\ldots=-s\left\{(m^2-1)\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right]\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(m^4-1)\left[1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right]\frac{\varphi^4}{\pi^4}+\frac{1}{3}(m^6-1)\left[1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right]\frac{\varphi^6}{\pi^6}+\cdots\right\}.$$

Съ другой же стороны, если примемъ въ соображеніе, что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}$$

....

[ПРИМѢЧАНІЕ II, § 3], и замѣнимъ m равною ему величиною $2n+1$, то получимъ

$$\log.T_1+\log.T_2+\log.T_3+\ldots=$$

$$-\frac{2n(n+1)}{3}.s.\varphi^2-\frac{(2n+1)^4-1}{180}.s.\varphi^4-\frac{(2n+1)^6-1}{2835}.s.\varphi^6-\ldots$$

Положимъ для краткости

$$\frac{(2n+1)^4-1}{180}=L,\quad \frac{(2n+1)^6-1}{2835}=M\ldots;$$

будетъ

$$\left(\frac{\text{Sin.}(2n+1)\varphi}{\text{Sin.}\varphi}\right)^s=(2n+1)^s.e^{-\frac{2n(n+1)}{3}.s.\varphi^2-L.s\varphi^4-M.s\varphi^6-\ldots},$$

и слѣдовательно

$$A_0=\frac{2(2n+1)^s}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2n(n+1)}{3}.s\varphi^2}.e^{-L.s\varphi^4-M.s\varphi^6-\ldots}d\varphi.$$

Но

$$e^{-L.s\varphi^4-M.s\varphi^6-\ldots}=1-L.s\varphi^4-M.s\varphi^6-\ldots,$$

почему и найдется

$$A_0=\frac{2(2n+1)^s}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}e^{-\frac{2n(n+1)}{3}.s\varphi^2}d\varphi$$

$$-\frac{2(2n+1)^s}{\pi}.L.s\int_0^{\frac{1}{2}\pi}e^{-\frac{2n(n+1)}{3}.s\varphi^2}.\varphi^4d\varphi$$

$$-\frac{2(2n+1)^s}{\pi}.M.s\int_0^{\frac{1}{2}\pi}e^{-\frac{2n(n+1)}{3}.s\varphi^2}.\varphi^6d\varphi$$

$-$ ....

Пусть

$$\frac{2n(n+1)}{3}.s.\varphi^2=t^2 \quad \text{или} \quad \varphi=\frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).s}};$$

предѣлы предъидущихъ интеграловъ, въ отношеніи къ перемѣнной t, будутъ 0 и $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2n(n+1).s}{3}}$. По причинѣ же значительности числа s и свойства функціи e^{-t^2}, быстро уменьшающейся съ увеличеніемъ t, можно замѣнить этотъ верхній предѣлъ положительною безконечностію. И такъ, получимъ

$$A_0=\frac{2(2n+1)^s\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2n(n+1).s}}\left[\int_0^\infty e^{-t^2}dt-\frac{9L}{4n^2(n+1)^2\,s}\int_0^\infty e^{-t^2}t^4dt-\frac{27M}{8n^3(n+1)^3.s^2}\int_0^\infty e^{-t^2}t^6dt-\cdots\right].$$

Но извѣстно [ПРИМѢЧАНІЕ IV, § 1], что

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad \int_0^\infty e^{-t^2}t^4dt = \tfrac{1.3}{2^2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad \int_0^\infty e^{-t^2}t^6dt = \tfrac{1.3.5}{2^3}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\ldots$$

Слѣдовательно, подставивъ на мѣсто L, M.... ихъ величины, и положивъ для краткости

$$B = \frac{3}{320}.\frac{(2n+1)^4-1}{n^2(n+1)^2},\quad C = \frac{1}{448}.\frac{(2n+1)^6-1}{n^3(n+1)^3},\ldots.$$

получимъ

$$A_0 = \frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}\left(1-\frac{B}{s}-\frac{C}{s^2}-\ldots.\right).$$

При весьма значительномъ числѣ s наблюденій, члены $\frac{B}{s}$, $\frac{C}{s^2}$.... будутъ чрезвычайно малы въ сравненіи съ единицею, какова бы притомъ ни была величина n; въ этомъ легко удостовѣриться чрезъ непосредственное разсмотрѣніе приведенныхъ выше значеній B, C,.... И такъ, откидывая члены порядка $\frac{1}{s}$ предъ единицею, получимъ просто

$$A_0 = \frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}. \tag{146}$$

Въ силу же формулы (144) вѣроятность P, что сумма погрѣшностей всѣхъ s наблюденій будетъ *нуль*, или, что средняя погрѣшность равна нулю, опредѣлится уравненіемъ

$$P = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}. \tag{147}$$

Если въ частности положимъ, какъ въ N° 78 и N° 79, что погрѣшности наблюденій могутъ быть безразлично -1, 0, $+1$, то вѣроятность средней погрѣшности, равной нулю, при числѣ s наблюденій, опредѣлится среднимъ членомъ разложенія $(x^{-1}+1+x^1)^s$, раздѣленнымъ на 3^s. Приближенная величина этого средняго члена, при значительномъ s, получится изъ формулы (146), положивъ въ ней $n=1$. Слѣдовательно

$$A_0 = \frac{3^s\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi s}},$$

а вѣроятность P, что средняя ошибка равна нулю, будетъ

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi s}}.$$

Вспомнимъ, что въ упоминаемомъ N° 79, мы нашли для точной величины средняго члена разложенія $(x^{-1}+1+x^1)^s$ сумму

$$y_0 = 1+\frac{2}{1}.\frac{s(s-1)}{1.2}+\frac{4.3}{1.2}.\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}+\ldots.$$

Но численное приложеніе этого ряда, при значительномъ s, приведетъ къ выкладкамъ до такой степени продолжительнымъ, что эта формула вовсе не можетъ служить для рѣшенія

задачи. И такъ, должно будетъ обратиться къ приближенной величинѣ суммы предъидущаго ряда, выражающейся весьма простою формулою $\frac{3^s\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi s}}$, тѣмъ болѣе точною, чѣмъ s значительнѣе. Мы уже имѣли случай замѣтить и при рѣшеніи нѣкоторыхъ другихъ задачъ (N°N° 68, 69, 76), какимъ важнымъ пособіемъ могутъ служить приближенныя величины выраженій, зависящихъ отъ весьма большихъ чиселъ. Излагаемая въ этой Главѣ теорія, вся основана на употребленіи такого рода формулъ.

81. Вопросъ предъидущаго N° можетъ быть предложенъ въ болѣе общемъ видѣ. Положимъ, требуется найти, при прежнихъ условіяхъ, вѣроятность, что средняя погрѣшность весьма значительнаго числа s наблюденій, будетъ равняться $\frac{l}{s}$, разумѣя подъ l цѣлое положительное число.

Вопросъ очевидно приводится къ опредѣленію коэффиціента степени x^l въ разложеніи

$$X^s = (x^{-n}+x^{-(n-1)}+\ldots.+x^{-1}+1+x^1+\ldots.+x^{n-1}+x^n)^s;$$

раздѣливъ этотъ коэффиціентъ на $(2n+1)^s$, получится искомая вѣроятность. И такъ, если положимъ

$$X^s = A_0+A_1(x^1+x^{-1})+A_2(x^2+x^{-2})+\ldots.+A_l(x^l+x^{-l})+\ldots.+A_{sn}(x^{sn}+x^{-sn}),$$

то искомая вѣроятность изобразится дробью $\frac{A_l}{(2n+1)^s}$. Подставимъ, какъ въ предъидущемъ N°, $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ на мѣсто x; найдется

$$[1+2(\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}2\varphi+\ldots.+\text{Cos.}n\varphi)]^s = \left(\frac{\text{Sin.}\frac{2n+1}{2}\varphi}{\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi}\right)^s =$$

$$A_0+2A_1\text{Cos.}\varphi+2A_2\text{Cos.}2\varphi+\ldots.+2A_l\text{Cos.}l\varphi+\ldots.+2A_{sn}\text{Cos.}sn\varphi.$$

Теперь легко видѣть, что для полученія коэффиціента A_l, стоитъ только умножить обѣ части послѣдняго уравненія на $\text{Cos.}l\varphi.d\varphi$, и потомъ взять интегралъ отъ $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$. При такомъ дѣйствіи, всѣ интегралы второй части, за исключеніемъ

$$2A_l\int_0^\pi \text{Cos.}^2 l\varphi.d\varphi,$$

уничтожатся, и останется просто

$$\int_0^\pi\left(\frac{\text{Sin.}\frac{2n+1}{2}\varphi}{\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi}\right)^s\text{Cos.}l\varphi.d\varphi = 2A_l\int_0^\pi\text{Cos.}^2l\varphi.d\varphi = 2A_l\int_0^\pi\left(\tfrac{1}{2}\text{Cos.}2l\varphi+\tfrac{1}{2}\right)d\varphi = A_l.\pi,$$

откуда

$$A_l = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\text{Sin.}\frac{2n+1}{2}\varphi}{\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi}\right)^s \text{Cos.}l\varphi\,.\,d\varphi. \qquad (148)$$

Мы сказали, что всѣ интегралы, за исключеніемъ $\int_0^{\pi}\text{Cos.}^2 l\varphi\ d\varphi$, уничтожаются; и дѣйствительно, пусть будетъ

$$\int_0^{\pi}\text{Cos.}m\varphi\,.\,\text{Cos.}l\varphi\,.\,d\varphi$$

одинъ изъ нихъ. Такъ какъ

$$\text{Cos.}m\varphi\,.\,\text{Cos.}l\varphi = \tfrac{1}{2}\text{Cos.}(m+l)\varphi + \tfrac{1}{2}\text{Cos.}(m-l)\varphi,$$

то и получимъ

$$\int_0^{\pi}\text{Cos.}m\varphi\,.\,\text{Cos.}l\varphi\ d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\text{Cos.}(m+l)\varphi\,.\,d\varphi + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\text{Cos.}(m-l)\varphi\ d\varphi$$

$$= \left(\frac{\text{Sin.}(m+l)\varphi}{2\,m+l)}\right)_0^{\pi} + \left(\frac{\text{Sin.}(m-l)\varphi}{2(m-l)}\right)_0^{\pi}.$$

Но разность $m-l$, по предположенію, не равна нулю; слѣдовательно, каждое изъ послѣднихъ двухъ выраженій уничтожится между предѣлами; поэтому будетъ

$$\int_0^{\pi}\text{Cos.}m\varphi\,.\,\text{Cos.}l\varphi\,.\,d\varphi = 0.$$

Если въ уравненіи (148) замѣнимъ $\frac{1}{2}\varphi$ угломъ φ, то получимъ

$$A_l = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{\text{Sin.}(2n+1)\varphi}{\text{Sin.}\varphi}\right)^s \text{Cos.}(2l\varphi)\,.\,d\varphi.$$

Для опредѣленія этого интеграла вспомнимъ, что въ предъидущемъ N° найдено

$$\left(\frac{\text{Sin}\,(2n+1)\varphi}{\text{Sin.}\varphi}\right)^s = (2n+1)^s\,.\,e^{-\frac{2n(n+1)}{3}\,.\,s\varphi^2}\left[1 - L\,.\,s\varphi^4 - M\ s\varphi^6 - \ldots\right];$$

слѣдовательно

$$A_l = \frac{2(2n+1)^s}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\frac{2n(n+1)}{3}\,.\,s\varphi^2}\left[1 - L\ s\varphi^4 - M\,.\,s\varphi^6 - \ldots\right]\text{Cos.}(2l\varphi)\,.\,d\varphi.$$

Положимъ какъ и выше

$$\frac{2n(n+1)}{3}\,.\,s\varphi^2 = t^2;$$

предѣлы въ отношеніи къ t будутъ 0 и весьма значительное число $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2n(n+1)\,.\,s}{3}}$, которое можетъ быть замѣнено положительною безконечностію. Получимъ

$$A_l = \frac{2(2n+1)^s\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\left[\int_0^{\infty} e^{-t^2}\text{Cos.}\left(\frac{2lt\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\right)\cdot dt - \frac{G}{s}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,.\,t^4\,.\,\text{Cos.}\left(\frac{2lt\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\right)\cdot dt\right.$$
$$\left. - \frac{H}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,.\,t^6\,.\,\text{Cos.}\left(\frac{2lt\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\right)\cdot dt - \ldots\right],$$

гдѣ для краткости положили

$$G = \frac{9L}{4n^2(n+1)^2}, \qquad H = \frac{27M}{8n^3(n+1)^3}, \ldots.$$

Но въ предъидущемъ N° замѣчено, что интегралы

$$\frac{G}{s}\int_0^{\infty} e^{-t^2}.\,t^4 dt, \qquad \frac{H}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-t^2}.\,t^6 dt, \ldots.$$

какъ количества порядковъ $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}\ldots$, могутъ быть откинуты. То̀ же самое замѣчаніе относится и къ двумъ послѣднимъ интеграламъ выведенной сей-часъ формулы. И въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что

$$\frac{G}{s}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,.\,t^4.\,\text{Cos.}\left(\frac{2lt\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\right)\cdot dt < \frac{G}{s}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,.\,t^4 dt,$$

потому что каждый элементъ перваго изъ этихъ двухъ интеграловъ меньше соотвѣтствующаго ему элемента втораго интеграла, по причинѣ множителя $\text{Cos.}\left(\frac{2lt\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\right)$, численная величина котораго имѣетъ предѣломъ единицу. Подобнымъ образомъ удостовѣримся, что

$$\frac{H}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,.\,t^6\,.\,\text{Cos.}\left(\frac{2lt\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\right)\cdot dt < \frac{H}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,.\,t^6 dt,$$

въ слѣдствіе чего, въ найденной выше величинѣ для A_l, можно будетъ удержать только первый членъ. И такъ

$$A_l = \frac{2(2n+1)^s\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}.\,\text{Cos.}\left(\frac{2lt\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}}\right).\,dt.$$

Опредѣлимъ теперь этотъ послѣдній интегралъ. Если положимъ для краткости

$$\frac{2l\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)\,.\,s}} = \alpha,$$

и изобразимъ чрезъ y величину искомаго интеграла, то получимъ

$$y = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\text{Cos.}(\alpha t)\,.\,dt.$$

Взявъ дифференціалъ по измѣняемости α, найдемъ

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,.\,t\,.\,\text{Sin.}(\alpha t)\,.\,dt\,.$$

Съ другой стороны, интегрированіе по частямъ доставитъ

$$\int_0^\infty e^{-t^2}.t.\text{Sin.}(\alpha t).dt = \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}.\text{Sin.}(\alpha t)\right)_0^\infty + \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\text{Cos.}(\alpha t).dt = \frac{\alpha}{2}y.$$

Слѣдовательно

$$\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\alpha}{2}.y = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\alpha}{2}d\alpha \quad \text{или} \quad y = C\,e^{-\frac{\alpha^2}{4}},$$

разумѣя подъ C постоянную величину. Для опредѣленія C, полагаемъ $\alpha = 0$; найдется въ одно время

$$y = C \quad \text{и} \quad y = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = C,$$

въ слѣдствіе чего

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\text{Cos.}(\alpha t).dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.e^{-\frac{\alpha^2}{4}}. \qquad (149)$$

И такъ

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\text{Cos.}\left(\frac{2lt\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).s}}\right).dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}}.$$

На основаніи этой формулы, найдемъ

$$A_l = \frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}.e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}},$$

послѣ чего, самая вѣроятность P, что средняя погрѣшность наблюденій равна $+\frac{l}{s}$, будетъ

$$P = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}.e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}}. \qquad (150)$$

Очевидно, что вѣроятность средней погрѣшности $-\frac{l}{s}$, опредѣлится этою самою формулою.

82. Перейдемъ теперь къ опредѣленію вѣроятности, что сумма погрѣшностей всѣхъ s наблюденій будетъ заключаться между предѣлами $\pm l$, или, иначе, что упоминаемая сумма имѣетъ безразлично одно изъ слѣдующихъ $2l+1$ значеній: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm(l-1), \pm l$. Для опредѣленія этой новой вѣроятности, которую означимъ чрезъ p, должно будетъ вычислить послѣдовательныя величины второй части формулы (150), подставляя въ нее по порядку $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm l$ на мѣсто l, и сложить потомъ всѣ найденныя такимъ образомъ величины. Или, какъ функція (150) чётная, то достаточно будетъ подставить въ нее положительныя величины $0, +1, +2, \ldots +l$, и потомъ, удвоивъ результатъ сложенія, отнять отъ него значеніе той же функціи при $l=0$. Такимъ образомъ получимъ:

$$p = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}\left[1 + e^{-\frac{3.1^2}{2n(n+1)s}} + e^{-\frac{3.2^2}{2n(n+1)s}} + \ldots + e^{-\frac{3.l^2}{2n(n+1)s}}\right] - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}.$$

Для опредѣленія суммы

$$1 + e^{-\frac{3.1^2}{2n(n+1).s}} + \ldots + e^{-\frac{3.l^2}{2n(n+1)s}},$$

должно взять интегралъ въ разностяхъ

$$\Sigma e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}},$$

и придать къ нему послѣдній членъ, то есть $e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}}$. Слѣдовательно, положивъ для простоты

$$y_l = e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}},$$

и замѣтивъ что $y_0 = 1$, получимъ

$$p = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}\left[\sum_0^l y_l + y_l - \frac{1}{2}\right].$$

Для опредѣленія $\sum_0^l y_l$, возьмемъ извѣстную формулу [ПРИМѢЧАНІЕ I]:

$$\sum_0^l y_l = \int_0^l y_l dl - \frac{1}{2}(y_l - y_0) + \frac{1}{12}\left(\frac{dy_l}{dl} - \frac{dy_0}{dl}\right) - \ldots$$

Найдется

$$p = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}\left[\int_0^l y_l dl + \frac{1}{2}y_l + \frac{1}{12}\left(\frac{dy_l}{dl} - \frac{dy_0}{dl}\right) - \ldots\right].$$

Но

$$\frac{dy_l}{dl} = -\frac{3l}{n(n+1)s}.e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}}, \quad \frac{dy_0}{dl} = 0;$$

слѣдовательно, $\frac{dy_l}{dl}$ будетъ количество порядка $\frac{1}{s}$, и при s весьма значительномъ, оно, въ сравненіи съ y_l, можетъ быть откинуто. Поэтому получимъ

$$p = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1).\pi s}}\left[\int_0^l e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}}dl + \frac{1}{2}e^{-\frac{3l^2}{2n(n+1)s}}\right]. \qquad (151)$$

Пусть будетъ

$$\frac{3l^2}{2n(n+1)s} = t^2, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)s}};$$

выраженіе p приметъ видъ

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{3}.e^{-t^2}}{\sqrt{2n(n+1).\pi s}}.$$

Послѣдній членъ этой формулы, при значительныхъ величинахъ s и n, будетъ чрезвычайно малъ, почему можетъ быть откинутъ безъ ощутительной погрѣшности. Тогда получимъ просто

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

разумѣя подъ p, какъ и выше, вѣроятность, что сумма погрѣшностей заключается между предѣлами

$$-\frac{t\sqrt{2n(n+1)s}}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad +\frac{t\sqrt{2n(n+1)s}}{\sqrt{3}},$$

или еще, что *средняя ариѳметическая погрѣшность* содержится между предѣлами

$$\mp\frac{t\sqrt{2n(n+1)s}}{s\sqrt{3}}=\mp\frac{t\sqrt{2n(n+1)}}{\sqrt{3}.\sqrt{s}}.$$

Положимъ, что число n весьма велико; въ такомъ случаѣ $\sqrt{2n(n+1)s}$ изобразится, весьма приближенно, величиною $n\sqrt{2s}$. Сверхъ того, такъ какъ число l выражено въ тѣхъ же единицахъ какъ и n, и заключаетъ вообще очень много такихъ единицъ, то оба члена отношенія $\frac{l}{n}$ можно будетъ замѣнить величинами, имъ пропорціональными, но которыя соотвѣтственно будутъ несравненно меньше l и n. Такъ напримѣръ допустивъ, что промежутокъ между крайними погрѣшностями $-n$ и $+n$ пропорціоналенъ числу $2a$, можно положить $n=a$; тогда l будетъ заключать въ себѣ величину a, повторенную бо̀льшее или мѐньшее число разъ, смотря по обстоятельствамъ. Что̀ же касается до промежутковъ между двумя послѣдовательными погрѣшностями, то каждый изъ нихъ выразится числомъ чрезвычайно малымъ $\frac{a}{n}$; дѣйствительно, такъ какъ число всѣхъ промежутковъ отъ *нуля* до n, равно n, и какъ полный промежутокъ отъ 0 до n мы условились изображать конечною величиною a, то разность между двумя послѣдовательными погрѣшностями очевидно опредѣлится дробью $\frac{a}{n}$.

И такъ, замѣняя въ формулѣ

$$t=\frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)s}}$$

$\sqrt{2n(n+1)s}$ величиною $n\sqrt{2s}$, получимъ равенство

$$t=\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{l}{n}.\frac{1}{\sqrt{s}},$$

въ которомъ отношеніе $\frac{l}{n}$ достигаетъ порядка $\sqrt{s}$, когда количеству t приписываемъ величину, сравнимую съ числомъ посредственной величины.

Если вмѣсто n напишемъ a, то получимъ для вѣроятности, что сумма погрѣшностей заключается между предѣлами

$$-\frac{2at\sqrt{s}}{\sqrt{6}} \quad \text{и} \quad +\frac{2at\sqrt{s}}{\sqrt{6}},$$

формулу

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty e^{-t^2}dt-\int_t^\infty e^{-t^2}dt\right]=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-t^2}dt,$$

вычисленіе которой очень просто при пособіи таблицъ, помѣщенныхъ въ концѣ этой книги.

Изъ доказанныхъ нами формулъ, легко вывести *правило ариѳметической средины*, которое, далѣе, получитъ еще бо̀льшую степень общности.

Раздѣлимъ на s предѣлы

$$-\frac{2at\sqrt{s}}{\sqrt{6}} \quad \text{и} \quad +\frac{2at\sqrt{s}}{\sqrt{6}},$$

относящіеся къ суммѣ погрѣшностей наблюденій. Получимъ для предѣловъ средней погрѣшности:

$$-\frac{2at}{\sqrt{6}.\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad +\frac{2at}{\sqrt{6}.\sqrt{s}}.$$

Вѣроятность же, что *средняя ариѳметическая погрѣшность* заключается между этими предѣлами, будетъ, какъ мы видѣли выше,

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-t^2}dt,$$

или еще

$$p=\sqrt{\frac{6}{\pi}}\int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2}dr,$$

принимая за предѣлы средней погрѣшности

$$-\frac{ar}{\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad +\frac{ar}{\sqrt{s}}.$$

Соображаясь съ этими результатами, очень легко видѣть, что средняя погрѣшность, при возрастающемъ числѣ наблюденій, неопредѣленно стремится къ нулю съ вѣроятностію, быстро приближающеюся къ единицѣ или достовѣрности. Дѣйствительно, принявъ s весьма значительнымъ, а t равнымъ посредственной величинѣ, напримѣръ 3, 4, 5..., предѣлы средней погрѣшности будутъ очень тѣсны, заключая между собою нуль; въ то̀ же время вѣроятность p этихъ предѣловъ достигнетъ значенія весьма близкаго къ 1, ибо, даже при $t=3$, она уже будетъ

$$p = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}(0,00014\ldots) = 0,99985\ldots.$$

что̀ можно видѣть изъ таблицы интеграловъ $\int_t^\infty e^{-t^2}dt$, о которой мы сей-часъ упомянули.

Изъ сказаннаго легко заключить, что при равновозможныхъ ошибкахъ, и при значительномъ числѣ прямыхъ наблюденій, правило средней ариѳметической должно считать самымъ выгоднымъ. Дѣйствительно, положимъ, что нѣкоторый элементъ, котораго точную величину изобразимъ чрезъ x, опредѣленъ s наблюденіями; пусть будутъ $a_1, a_2, a_3 \ldots a_s$ ихъ показанія. Всѣ эти наблюденія сопровождаются нѣкоторыми неизвѣстными погрѣшностями, положительными или отрицательными, которыя очевидно изобразятся разностями:

$$a_1 - x, \quad a_2 - x, \quad a_3 - x, \ldots \quad a_s - x.$$

Въ слѣдствіе приведеннаго сей-часъ правила, сумма погрѣшностей

$$(a_1 - x) + (a_2 - x) + (a_3 - x) + \ldots + (a_s - x),$$

съ увеличеніемъ числа s наблюденій, будетъ неопредѣленно приближаться къ нулю. Слѣдовательно, предположивъ s чрезвычайно большимъ, получимъ очень приближенно

$$(a_1 - x) + (a_2 - x) + (a_3 - x) + \ldots + (a_s - x) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_s}{s}.$$

И такъ, повторяемъ, правдоподобнѣйшій результатъ, при равновѣроятныхъ погрѣшностяхъ, опредѣляется среднею ариѳметическою изъ всѣхъ наблюденій, когда число сихъ послѣднихъ весьма значительно. Въ слѣдующихъ нумерахъ мы распространимъ это правило доказавъ, что оно справедливо и въ томъ случаѣ, когда погрѣшности не предполагаются равновозможными, а подчинены, съ нѣкоторыми ограниченіями, какому ни есть закону.

Формулы, выведенныя въ этомъ N° въ томъ предположеніи, что всякая погрѣшность, между извѣстными предѣлами, равновѣроятна, могутъ получить многоразличныя примѣчательныя приложенія. Ихъ можно употреблять всякій разъ, какъ при значительномъ числѣ наблюденій, не имѣемъ *a priori* никакой причины полагать, чтобы изъ числа наблюденныхъ явленій, нѣкоторыя были вѣроятнѣе другихъ. Читатели найдутъ между прочимъ у Лапласа (*Théorie anal. des Prob.* n° 13) любопытное численное приложеніе къ опредѣленію вѣроятности, что сумма наклоненій кометныхъ орбитъ къ эклиптикѣ заключается между извѣстными предѣлами. Разборъ этого вопроса приводитъ къ слѣдствію, что нѣтъ никакой надобности прибѣгать къ ипотезѣ о существованіи первоначальной причины, имѣвшей

вліяніе на степень наклоненія кометныхъ путей, какое предположеніе, напротивъ того, непремѣнно должно быть допущено для планетныхъ орбитъ.

Приступаемъ теперь къ рѣшенію вопроса о наивыгоднѣйшихъ результатахъ наблюденій при какомъ ни есть законѣ вѣроятности погрѣшностей.

83. Положимъ какъ и въ N° 80, что производится весьма значительное число s наблюденій, погрѣшности которыхъ могутъ быть

$$-n, \quad -(n-1), \quad \ldots -2, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad +2, \quad \ldots +(n-1), \quad +n.$$

Относительно же этихъ погрѣшностей, мы не ограничимся теперь предположеніемъ, что онѣ всѣ равновѣроятны, какъ предполагали въ предъидущихъ нумерахъ. Допустимъ только, что при каждомъ изъ s наблюденій, вѣроятность одной и той же ошибки, положительной или отрицательной, не перемѣняется. Поэтому, какое бы изъ s наблюденій не разсматривалось, число случаевъ, приводящихъ къ опредѣленной погрѣшности $\pm x$, одно и то̀ же. Сверхъ того, не имѣя *a priori* никакой причины предполагать чтобы погрѣшности, напримѣръ положительныя, были болѣе или менѣе правдоподобны чѣмъ отрицательныя, мы допустимъ, что число статочностей, приводящихъ къ погрѣшности $+x$, равно числу статочностей, приводящихъ къ погрѣшности $-x$. Впрочемъ, въ N° 91 мы скажемъ нѣсколько словъ и о томъ случаѣ, когда вѣроятности положительныхъ и отрицательныхъ погрѣшностей не предполагаются равными между собою.

Изобразимъ чрезъ $f(x)$ число случаевъ, приводящихъ къ погрѣшности $+x$, или, что̀ всё равно, къ $-x$. Функція $f(x)$, зависящая очевидно отъ перемѣнной погрѣшности x, будетъ также вообще зависѣть и отъ нѣсколькихъ постоянныхъ величинъ, вводимыхъ способомъ наблюденія. Если предположимъ число $2n+1$ погрѣшностей чрезвычайно большимъ, то ясно, что отношеніе $f(x)$ къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ, изображающее вѣроятность ошибки $\pm x$, будетъ чрезвычайно мало. Дѣйствительно, сумма $Sf(x)$, распространенная на всѣ значенія x отъ $x = -n$ до $x = +n$, и раздѣленная потомъ на совокупность всѣхъ возможныхъ случаевъ, изобразитъ вѣроятность какой либо изъ возможныхъ погрѣшностей, и поэтому будетъ равна достовѣрности или единицѣ. Что̀ же касается до вѣроятности опредѣленной погрѣшности $\pm x$, то она составитъ только весьма незначительную часть достовѣрности, почему и будетъ чрезвычайно малою дробью.

Хотя $f(x)$, а слѣдовательно и вѣроятность ошибки $\pm x$, которую означимъ чрезъ $F(x)$, намъ неизвѣстны, но мы можемъ, посредствомъ здраваго соображенія, опредѣлить нѣкоторыя свойства обѣихъ этихъ функцій, именно: 1° Мы знаемъ, что численная величина $F(x)$ чрезвычайно мала. 2° Когда не имѣемъ *a priori* никакихъ данныхъ объ этихъ функціяхъ,

то должны принимать $F(+x)=F(-x)$, а равно $f(+x)=f(-x)$; это показываетъ, что обѣ функціи $F(x)$ и $f(x)$ *чётныя.* 3° Сумма $SF(x)$ всѣхъ значеній $F(x)$ отъ $x=-n$ до $x=+n$, равна единицѣ. 4° Такъ какъ тщательность, съ которою вообще производятся наблюденія, а равно совершенство способовъ и употребляемыхъ инструментовъ, даетъ право предполагать, что мѣньшія уклоненія отъ истиннаго результата болѣе правдоподобны, чѣмъ бо́льшія, то $F(x)$ будетъ убывать съ возрастаніемъ численной величины x, и наконецъ, при значеніи x, превосходящемъ допускаемый предѣлъ погрѣшностей, сдѣлается совершенно нечувствительною. Подъ предѣломъ погрѣшностей мы разумѣемъ такую величину, которая, какъ явно погрѣшительная, и поэтому не заслуживающая никакого довѣрія, заставила бы насъ отбросить соотвѣтственное ей наблюденіе. Въ слѣдствіе этого замѣчанія, наибольшее значеніе функціи $F(x)$ соотвѣтствуетъ предположенію $x=0$, почему и имѣемъ $F(0)=maximum$. Изъ того, что функція $F(x)$ убывающая, заключаемъ также, что производная ея $F'(x)<0$. Легко видѣть, что эти свойства равно относятся и къ функціи $f(x)$, такъ что $f(0)=maximum$ и $f'(x)<0$.

Послѣ сихъ предварительныхъ объясненій, посмотримъ какимъ образомъ рѣшается вопросъ N° 81, предполагая законъ вѣроятностей ошибокъ неизвѣстнымъ. И такъ положимъ, ищется вѣроятность P, что средняя погрѣшность s наблюденій будетъ $+\frac{l}{s}$.

Разсуждая какъ въ N°N° 80 и 81, увидимъ, что искомая вѣроятность опредѣлится формулой:

$$P=\frac{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(f(0)+2f(1)\text{Cos}.\varphi+2f(2)\text{Cos}.2\varphi+\ldots+2f(n)\text{Cos}.n\varphi\right)^s\text{Cos}.l\varphi.d\varphi}{\left(f(0)+2f(1)+2f(2)+\ldots+2f(n)\right)^s}. \quad (152)$$

Для преобразованія этого выраженія въ другое, простѣйшее, пусть будетъ

$$\Phi(n)=f(0)+2f(1)+2f(2)+\ldots+2f(n).$$

Такъ какъ по Тайлоровой теоремѣ имѣемъ

$$f(0)=f(0)$$

$$2f(1)=2\left[f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{1.2}+\frac{f'''(0)}{1.2.3}+\cdots\right]$$

$$2f(2)=2\left[f(0)+f'(0).2+\frac{f''(0)}{1.2}.2^2+\frac{f'''(0)}{1.2.3}.2^3+\ldots\right]$$

....

$$2f(n)=2\left[f(0)+f'(0).n+\frac{f''(0)}{1.2}.n^2+\frac{f'''(0)}{1.2.3}.n^3+\ldots\right],$$

то, сложивъ эти уравненія, получимъ

$$\Phi(n)=f(0)+2\left[f(0).n+f'(0).Sn+\frac{f''(0)}{1.2}.Sn^2+\frac{f'''(0)}{1.2.3}.Sn^3+\ldots\right],$$

разумѣя вообще подъ знакоположеніемъ $S(n^m)$ сумму $1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m$. Если положимъ, какъ и выше, что n изображаетъ число чрезвычайно большое, то промежутки между двумя послѣдовательными погрѣшностями будутъ чрезвычайно малы въ сравненіи съ n; въ такомъ предположеніи можно будетъ, на основаніи извѣстной формулы, служащей для преобразованія интеграла въ конечныхъ разностяхъ въ обыкновенный (**ПРИМѢЧАНІЕ I**), замѣнить сумму $S(n^m)$, безъ ощутительной погрѣшности, интеграломъ $\int_0^n n^m dn=\frac{n^{m+1}}{m+1}$. Сверхъ того, откинувъ въ предъидущей формулѣ величину $f(0)$, нечувствительную въ сравненіи съ суммою остальныхъ членовъ, получимъ

$$\Phi(n)=2\left[f(0)n+f'(0).\frac{n^2}{2}+\frac{f''(0)}{1.2}.\frac{n^3}{3}+\ldots\right].$$

Дифференцируя это выраженіе, будетъ

$$\Phi'(n)=2\left[f(0)+f'(0).n+\frac{f''(0)}{1.2}.n^2+\ldots\right]=2f(n).$$

И такъ

$$\Phi(n)=2\int_0^n f(n)dn.$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдется

$$f(0)+2f(1)\text{Cos}.\varphi+2f(2)\text{Cos}.2\varphi+\ldots+2f(n)\text{Cos}.n\varphi=2\int_0^n f(n)\text{Cos}.n\varphi.dn,$$

и формула (152) приметъ слѣдующій, простѣйшій видъ:

$$P=\frac{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\int_0^n f(n)\text{Cos}.n\varphi.dn\right]^s\text{Cos}.l\varphi.d\varphi}{\left[\int_0^n f(n)dn\right]^s}.$$

Подставимъ на мѣсто $\text{Cos}.n\varphi$ его разложеніе, которое, какъ извѣстно, составляетъ всегда рядъ сходящійся [**ПРИМѢЧАНІЕ III, § 4**]; получимъ

$$\int_0^n f(n)\text{Cos}.n\varphi.dn=\int_0^n f(n)dn-n^2\varphi^2.\frac{\int_0^n f(n).n^2dn}{2.n^2}+n^4\varphi^4.\frac{\int_0^n f(n).n^4dn}{2.3.4.n^4}-\ldots.$$

Слѣдовательно, положивъ для краткости,

$$\int_0^n f(n)dn=k,\quad \frac{\int_0^n f(n).n^2dn}{2.n^2}=k'',\quad \frac{\int_0^n f(n).n^4dn}{2.3.4.n^4}=k^{IV},\ldots$$

гдѣ k, k'', $k^{IV}\ldots$ будутъ выраженія однородныя между собой, найдемъ

$$P=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{k''}{k}.n^2\varphi^2+\frac{k^{IV}}{k}.n^4\varphi^4-\ldots\right)^s\text{Cos}.l\varphi.d\varphi.$$

Но такъ какъ

$$\left(1-\frac{k''}{k}\cdot n^2\varphi^2+\frac{k^{IV}}{k}\cdot n^4\varphi^4-\cdots\right)^s=e^{s\log.\left(1-\frac{k''}{k}\cdot n^2\varphi^2+\frac{k^{IV}}{k}\cdot n^4\varphi^4-\cdots\right)},$$

а

$$\log.\left(1-\frac{k''}{k}\cdot n^2\varphi^2+\frac{k^{IV}}{k}\cdot n^4\varphi^4-\cdots\right)=-\frac{k''}{k}\cdot n^2\varphi^2-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot n^4\varphi^4-\cdots,$$

то и получимъ

$$P=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-\frac{k''}{k}\cdot sn^2\varphi^2}\left(1-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot sn^4\varphi^4-\cdots\right)\text{Cos.}l\varphi\,.\,d\varphi.$$

Въ N° 81 уже доказано, что второй изъ интеграловъ, составляющихъ вторую часть этого уравненія, есть величина порядка $\frac{1}{s}$ въ отношеніи къ первому интегралу, а поэтому, при весьма значительномъ s, можетъ быть откинутъ. И такъ, получимъ просто

$$P=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-\frac{k''}{k}\cdot sn^2\varphi^2}\text{Cos.}l\varphi\,.\,d\varphi.$$

Принявъ же

$$\frac{k''}{k}\cdot sn^2\varphi^2=t^2,$$

найдемъ, какъ въ томъ же N° 81,

$$P=\frac{1}{\pi n}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_0^T e^{-t^2}\text{Cos.}\left(\frac{lt}{n}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right)dt,$$

гдѣ

$$T=\pi n\sqrt{\frac{k''s}{k}}.$$

Такъ какъ n и s предполагаются чрезвычайно большими числами, то T можно принять равнымъ безконечности, и тогда, въ силу формулы (149), получимъ

$$P=\frac{1}{\pi n}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_0^\infty e^{-t^2}\text{Cos.}\left(\frac{lt}{n}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right)dt=\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{k}{k''.\pi s}}\cdot e^{-\frac{k}{4k''s}\cdot\frac{l^2}{n^2}}.$$

Чтобы найти вѣроятность, что сумма погрѣшностей наблюденій заключается между предѣлами $-l$ и $+l$, поступаемъ точно такъ, какъ было объяснено съ надлежащими подробностями въ N° 82. Если изобразимъ эту новую вѣроятность чрезъ p, и ограничимся тою же степенью приближенія какъ въ упомянутомъ N°, то получимъ

$$p=\int_{-l}^{+l}Pdl,$$

или, замѣтивъ что P есть функція чётная,

$$p=2\int_0^l Pdl.$$

Слѣдовательно вѣроятность, что сумма погрѣшностей наблюденій заключается между $\mp l$, будетъ

$$p=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{k''.\pi s}}\int_0^l e^{-\frac{k}{4k''s}\cdot\frac{l^2}{n^2}}dl.$$

Эта самая величина p очевидно изобразитъ и вѣроятность, что *средняя ариѳметическая* всѣхъ погрѣшностей наблюденій содержится между предѣлами $\mp\frac{l}{s}$.

Чтобъ подчинить закону непрерывности погрѣшности наблюденій, замѣнимъ, какъ въ N° 82, безконечное число n конечною величиною a; тогда единицы, на которыя n разложено, или иначе, промежутки между двумя послѣдовательными погрѣшностями, будутъ безконечно малы въ отношеніи къ a. Сверхъ того, пусть

$$\frac{l}{n\sqrt{s}}=r;$$

въ такомъ случаѣ формула

$$p=\sqrt{\frac{k}{k''\pi}}\int_0^r e^{-\frac{k}{4k''}\cdot r^2}.\,dr \tag{153}$$

изобразитъ вѣроятность, что сумма погрѣшностей наблюденій заключается между $\mp ar\sqrt{s}$, или, иначе, что *средняя погрѣшность* не выходитъ изъ предѣловъ

$$\mp\frac{ar\sqrt{s}}{s}=\mp\frac{ar}{\sqrt{s}}. \tag{154}$$

Если положимъ

$$\frac{k}{4k''}r^2=t^2 \quad\text{или}\quad r=2t\sqrt{\frac{k''}{k}},$$

то получимъ

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

а предѣлы средней погрѣшности будутъ:

$$-\frac{2at\sqrt{\frac{k''}{k}}}{\sqrt{s}}\quad\text{и}\quad+\frac{2at\sqrt{\frac{k''}{k}}}{\sqrt{s}}.$$

Но мы знаемъ, что даже для посредственной величины t, напримѣръ для $t=4$, интегралъ $\int_0^t e^{-t^2}dt$ очень мало разнствуетъ отъ $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, и тогда вѣроятность p будетъ очень близка къ единицѣ. Слѣдовательно, съ увеличеніемъ числа s наблюденій, средняя погрѣшность неопредѣленно приближается къ нулю съ вѣроятностію, какъ угодно мало разнствующею отъ достовѣрности. Отсюда должно заключить, какъ въ концѣ N° 82, что средняя ариѳметическая, при значительномъ числѣ прямыхъ наблюденій, есть наивыгоднѣйшій ре-

зультатъ, каковъ бы ни былъ притомъ законъ вѣроятности погрѣшностей, изображенный у насъ функціею $F(x)$.

Постоянныя величины k и k'', входящія въ послѣднія наши формулы, зависятъ отъ вида функціи $F(x)$ или $\mathfrak{f}(x)$. Если положимъ, что всѣ ошибки равновѣроятны, то $F(x)$ и $\mathfrak{f}(x)$ будутъ величины постоянныя. Тогда найдется, что отношеніе $\frac{k''}{k}=\frac{1}{6}$. Дѣйствительно, положивъ $\mathfrak{f}(x)=\lambda$, получимъ

$$k=\int_0^n \mathfrak{f}(n)dn=\lambda n, \quad k''=\frac{\int_0^n \mathfrak{f}(n)n^2 dn}{2n^2}=\frac{\lambda n}{6},$$

откуда $\frac{k''}{k}=\frac{1}{6}$, и слѣдовательно

$$p=\sqrt{\frac{6}{\pi}}\int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2}dr,$$

при тѣхъ же предѣлахъ $\mp\frac{ar}{\sqrt{s}}$ средней погрѣшности. Эта самая формула найдена въ N° 82.

Легко видѣть, что отношеніе $\frac{k''}{k}$, равное дроби $\frac{1}{6}$ когда функція $F(x)$ или $\mathfrak{f}(x)$ постоянная, будетъ менѣе $\frac{1}{6}$ при $F(x)$ или $\mathfrak{f}(x)$ уменьшающейся съ увеличеніемъ x, что естественно должно допустить, какъ уже было замѣчено въ началѣ этого нумера. Чтобы показать, что при допущенномъ условіи, дѣйствительно будетъ $\frac{k''}{k}<\frac{1}{6}$, разсмотримъ вторую часть уравненія

$$\frac{k''}{k}=\frac{\int_0^n \mathfrak{f}(n)n^2 dn}{2n^2\int_0^n \mathfrak{f}(n)dn}.$$

Чрезъ интегрированіе по частямъ получимъ

$$\frac{k''}{k}=\frac{\frac{n^3}{3}\mathfrak{f}(n)-\frac{1}{3}\int_0^n \mathfrak{f}'(n)n^3 dn}{2n^2\left(n\,\mathfrak{f}(n)-\int_0^n \mathfrak{f}'(n)n\,dn\right)},$$

или

$$\frac{k''}{k}=\frac{1-\frac{1}{\mathfrak{f}(n)n^3}\int_0^n \mathfrak{f}'(n)n^3 dn}{6\left(1-\frac{1}{\mathfrak{f}(n)n^3}\cdot n^2\int_0^n \mathfrak{f}'(n)n\,dn\right)}.$$

Вспомнимъ теперь, что производная $\mathfrak{f}'(x)$, отъ $n=0$ до $n=n$, постоянно отрицательная, потому что функція $\mathfrak{f}(x)$ убывающая. Слѣдовательно, оба интеграла

$$\int_0^n \mathfrak{f}'(n)n^3 dn \quad \text{и,} \quad \int_0^n \mathfrak{f}'(n)n\,dn$$

отрицательные. Если первому изъ нихъ дадимъ видъ

$$\int_0^n \mathfrak{f}'(n)n^2.\,ndn,$$

то онъ можетъ быть замѣненъ произведеніемъ [ПРИМѢЧАНІЕ IX, § 2]

$$n_1^2\int_0^n \mathfrak{f}'(n)ndn,$$

разумѣя подъ n_1 величину, заключающуюся между 0 и n. И такъ, предположивъ

$$\frac{1}{\mathfrak{f}(n)n^3}\int_0^n \mathfrak{f}'(n)ndn=-\delta,$$

гдѣ δ есть величина положительная, предъидущее выраженіе для $\frac{k''}{k}$ приметъ видъ

$$\frac{k''}{k}=\frac{1+n_1^2.\delta}{6(1+n^2.\delta)}.$$

Надобно доказать теперь, что

$$\frac{1+n_1^2\,\delta}{6(1+n^2.\delta)}<\frac{1}{6} \quad \text{или} \quad 1+n_1^2.\delta<1+n^2.\delta;$$

но какъ $n_1<n$, то поэтому и послѣднее неравенство справедливо. Слѣдовательно, при допущенномъ условіи относительно свойства функціи $\mathfrak{f}(x)$, будетъ всегда $\frac{k''}{k}<\frac{1}{6}$.

84. Въ предъидущемъ N° мы искали вѣроятность, что сумма погрѣшностей заключается между данными предѣлами; опредѣлимъ теперь вѣроятность, что какая ни есть линейная функція этихъ самыхъ погрѣшностей заключается между тѣми же предѣлами. Пусть будутъ

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3\ldots\ldots\ldots\varepsilon_s$$

погрѣшности произведенныхъ s наблюденій; ищется вѣроятность P, что линейная функція

$$\frac{m_1}{\mu}\varepsilon_1+\frac{m_2}{\mu}\varepsilon_2+\frac{m_3}{\mu}\varepsilon_3+\cdots+\frac{m_s}{\mu}\varepsilon_s \tag{155}$$

будетъ равна числу $+\frac{l}{\mu}$, предполагая что $m_1, m_2, m_3\ldots m_s$ изображаютъ числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя, а μ, число цѣлое положительное, впрочемъ произвольное по своей величинѣ. Положимъ, какъ и въ предъидущихъ N°N°, что погрѣшности могутъ имѣть всѣ слѣдующія $2n+1$ значеній:

$$-n,\ -(n-1),\ldots-2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ldots+(n-1),\ +n,$$

а число случаевъ, приводящихъ къ какой ни есть погрѣшности x, изобразимъ чрезъ $\mathfrak{f}(x)$. Сверхъ того, пусть будетъ

$$X_1=\mathfrak{f}(-n)e^{-m_1n.\frac{\varphi}{\mu}\sqrt{-1}}+\mathfrak{f}(-n+1)e^{-m_1(n-1).\frac{\varphi}{\mu}\sqrt{-1}}+\ldots+\mathfrak{f}(-1)e^{-m_1.\frac{\varphi}{\mu}\sqrt{-1}}+\mathfrak{f}(0)$$
$$+\mathfrak{f}(1)e^{m_1\frac{\varphi}{\mu}\sqrt{-1}}+\ldots+\mathfrak{f}(n-1)e^{m_1(n-1).\frac{\varphi}{\mu}\sqrt{-1}}+\mathfrak{f}(n)e^{m_1n.\frac{\varphi}{\mu}\sqrt{-1}}.$$

Степени величины $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ въ этомъ ряду показываютъ всѣ возможныя значенія перваго члена $\frac{m_1\varepsilon_1}{\mu}$ суммы (155). Слѣдовательно, если составимъ величины X_2, $X_3 \ldots X_s$ относительно членовъ $\frac{m_2\varepsilon_2}{\mu}$, $\frac{m_3\varepsilon_3}{\mu} \ldots \frac{m_s\varepsilon_s}{\mu}$, подобныя выраженію X_1, и найдемъ потомъ произведеніе $X_1X_2X_3 \ldots X_s$, то коэффиціентъ при показательномъ количествѣ $e^{l\cdot\frac{\varphi}{\mu}\sqrt{-1}}$ въ этомъ разложеніи, изобразитъ число случаевъ, при которыхъ сумма (155) обратится въ $+\frac{l}{\mu}$. Означимъ это число случаевъ чрезъ A_l, а совокупность всѣхъ возможныхъ чрезъ $[\Phi(n)]^s$, какъ въ N° 83. Найдется

$$P = \frac{A_l}{[\Phi(n)]^s},$$

и какъ $\Phi(n) = 2\int_0^n \mathrm{f}(n)dn = 2k$, то получимъ

$$P = \frac{A_l}{2^s k^s}. \tag{156}$$

Съ другой стороны, на основаніи сужденій подобныхъ тѣмъ, которыми руководствовались въ N°N° 80 и 81, удостовѣримся, что величина A_l опредѣлится формулою

$$A_l = \frac{1}{\mu\pi}\int_0^{\mu\pi} X_1X_2X_3 \ldots X_s . \mathrm{Cos.}\left(l\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right)d\varphi. \tag{157}$$

Займемся теперь приведеніемъ къ простѣйшему виду выраженій X_1, X_2, X_3. X_s. Такъ какъ вѣроятности погрѣшности x, положительной и отрицательной, предполагаются одинаковыми, и слѣдовательно $\mathrm{f}(+x) = \mathrm{f}(-x)$, то и будетъ

$$X_1 = \mathrm{f}(0) + 2\mathrm{f}(1)\mathrm{Cos.}\left(m_1\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right) + 2\mathrm{f}(2)\mathrm{Cos.}\left(2m_1\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right) + \ldots + 2\mathrm{f}(n)\mathrm{Cos.}\left(nm_1\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right).$$

Въ предъидущихъ же нумерахъ показано, что допустивъ непрерывность измѣненія въ погрѣшностяхъ, или иначе, предположивъ, что n состоитъ изъ безчисленнаго множества единицъ, предъидущая сумма изобразится интеграломъ

$$X_1 = 2\int_0^n \mathrm{f}(n)\mathrm{Cos.}\left(nm_1\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right)dn.$$

Измѣняя послѣдовательно въ выраженіи X_1 число m_1 въ m_2, въ $m_3 \ldots$ въ m_s, получимъ величины X_2, $X_3 \ldots X_s$. И такъ

$$X_2 = 2\int_0^n \mathrm{f}(n)\mathrm{Cos.}\left(nm_2\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right)dn$$

$$X_3 = 2\int_0^n \mathrm{f}(n)\mathrm{Cos.}\left(nm_3\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right)dn$$

. . . .

$$X_s = 2\int_0^n \mathrm{f}(n)\mathrm{Cos.}\left(nm_s\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right)dn.$$

Разлагая $\mathrm{Cos.}\left(nm_1\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right)$ въ безконечный рядъ, который, какъ извѣстно, будетъ сходящійся, получимъ

$$X_1 = 2\left[\int_0^n \mathrm{f}(n)dn - n^2m_1^2\cdot\frac{\varphi^2}{\mu^2}\cdot\frac{\int_0^n \mathrm{f}(n)n^2dn}{2.n^2} + n_1^4m_1^4\cdot\frac{\varphi^4}{\mu^4}\cdot\frac{\int_0^n \mathrm{f}(n)n^4dn}{2.3.4.n^4} - \ldots\right].$$

При означеніяхъ предъидущаго N°, именно

$$\int_0^n \mathrm{f}(n)dn = k, \quad \frac{\int_0^n \mathrm{f}(n)n^2dn}{2.n^2} = k'', \quad \frac{\int_0^n \mathrm{f}(n)n^4dn}{2.3.4.n^4} = k^{IV} \ldots,$$

величина X_1 приметъ видъ

$$X_1 = 2k\left[1 - \frac{k''}{k}\cdot\frac{m_1^2}{\mu^2}\cdot n^2\varphi^2 + \frac{k^{IV}}{k}\cdot\frac{m_1^4}{\mu^4}\cdot n^4\varphi^4 - \ldots\right].$$

Такъ какъ логариѳмъ второй части этого уравненія равенъ

$$\log.2k - \frac{k''}{k}\cdot\frac{m_1^2}{\mu^2}\cdot n^2\varphi^2 - \frac{k''^2 - 2kk^{IV}}{2k^2}\cdot\frac{m_1^4}{\mu^4}\cdot n^4\varphi^4 - \ldots,$$

то X_1 можно написать въ видѣ

$$X_1 = 2k.e^{-\frac{k''}{k}\cdot\frac{m_1^2}{\mu^2}\cdot n^2\varphi^2} . e^{-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot\frac{m_1^4}{\mu^4}\cdot n^4\varphi^4 - \ldots}$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ:

$$X_2 = 2k.e^{-\frac{k''}{k}\cdot\frac{m_2^2}{\mu^2}\cdot n^2\varphi^2} . e^{-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot\frac{m_2^4}{\mu^4}\cdot n^4\varphi^4 - \ldots}$$

. . . .

$$X_s = 2k.e^{-\frac{k''}{k}\cdot\frac{m_s^2}{\mu^2}\cdot n^2\varphi^2} . e^{-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot\frac{m_s^2}{\mu^2}\cdot n^4\varphi^4 - \ldots}$$

Далѣе, положивъ для сокращенія,

$$\frac{m_1^2}{\mu^2} + \frac{m_2^2}{\mu^2} + \ldots + \frac{m_s^2}{\mu^2} = \mathrm{S}\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)$$

$$\frac{m_1^4}{\mu^4} + \frac{m_2^4}{\mu^4} + \ldots + \frac{m_s^4}{\mu^4} = \mathrm{S}\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)$$

. . . .

получимъ

$$X_1X_2X_3 \ldots X_s = 2^sk^s.e^{-\frac{k''}{k}\cdot \mathrm{S}\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)\cdot n^2\varphi^2} . e^{-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot \mathrm{S}\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)\cdot n^4\varphi^4 - \ldots},$$

или, обративъ послѣднюю показательную величину въ безконечный рядъ,

$$X_1X_2X_3 \ldots X_s = 2^sk^s.e^{-\frac{k''}{k}\cdot \mathrm{S}\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)\cdot n^2\varphi^2}\left\{1 - \frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot \mathrm{S}\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)\cdot n^4\varphi^4 - \ldots\right\}.$$

И такъ, въ силу формулъ (157) и (156), найдется

$$P=\frac{1}{\mu\pi}\int_0^{\mu\pi} e^{-\frac{k''}{k}\cdot S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)\cdot n^2\varphi^2}.\mathrm{Cos.}\left(l\cdot\frac{\varphi}{\mu}\right)\left[1-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)\cdot n^4\varphi^4-\cdots\right]d\varphi.$$

Положимъ

$$n^2\varphi^2=\frac{t^2}{s};$$

предѣлы новаго интеграла въ разсужденіи t будутъ 0 и $\mu n\pi\sqrt{s}$. Слѣдовательно

$$P=\frac{1}{\mu n\pi\sqrt{s}}\int_0^{\mu n\pi\sqrt{s}} e^{-\frac{k''}{k}\cdot\frac{S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)}{s}\cdot t^2}.\mathrm{Cos.}\left(\frac{l}{\mu n}\cdot\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\left[1-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot\frac{S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)}{s^2}\cdot t^4-\cdots\right]dt.$$

Прежде всего докажемъ, что при допущенномъ предположеніи о значительности s, интегралъ, относящійся ко второму члену подъ квадратными скобками, можетъ быть откинутъ. Если сверхъ того замѣтимъ, что верхній предѣлъ $\mu n\pi\sqrt{s}$ есть число чрезвычайно большое, которое, по свойству подъинтегральной показательной величины, можетъ быть замѣнено положительною безконечностію, то получимъ съ достаточною точностію

$$P=\frac{1}{\mu n\pi\sqrt{s}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{k''}{k}\cdot\frac{S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)}{s}\cdot t^2}.\mathrm{Cos.}\left(\frac{l}{\mu n}\cdot\frac{t}{\sqrt{s}}\right)dt,$$

при чёмъ откидываемый членъ, въ разсужденіи этого интеграла, будетъ величиною порядка $\frac{1}{s}$. Для доказательства послѣдняго утвержденія, достаточно принять въ соображеніе сказанное въ N° 81 объ интегралахъ вида

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{Cos.}(\alpha t)dt,\quad \int_0^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{Cos.}(\alpha t).t^2dt,\quad \int_0^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{Cos.}(\alpha t).t^4dt\ldots.,$$

и показать потомъ, что коэффиціентъ при t^2, именно $-\frac{k''}{k}\cdot\frac{S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)}{s}$, есть величина посредственная, не сравнимая съ s, а коэффиціентъ при t^4, то есть, $-\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot\frac{S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)}{s^2}$, величина порядка $\frac{1}{s}$, и слѣдовательно чрезвычайно малая. Эти два утвержденія сдѣлаются очевидными, когда покажемъ что $\frac{k''}{k}$ и $\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}$ суть величины посредственныя, а суммы $S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)$, $S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)$ количества порядка s; тогда $\frac{k''}{k}\cdot\frac{S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)}{s}$ будетъ величина посредственная, а $\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}\cdot\frac{S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)}{s^2}$ количество порядка $\frac{1}{s}$.

Мы уже доказали выше, что $\frac{k''}{k}<\frac{1}{6}$. Для доказательства утвержденія объ $\frac{k''^2-2kk^{IV}}{2k^2}$, даемъ этой дроби видъ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k''}{k}\right)^2-\frac{k^{IV}}{k};$$

такъ какъ первый членъ этой разности не можетъ превзойти $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$, то достаточно разсмотрѣть второй ея членъ $\frac{k^{IV}}{k}$. Замѣнивъ k^{IV} и k равными имъ величинами, получимъ

$$\frac{k^{IV}}{k}=\frac{\int_0^n f(n)n^4dn}{2.3.4.n^4\int_0^n f(n)dn}.$$

Въ этомъ видѣ легко усмотрѣть, что $\frac{k^{IV}}{k}$ будетъ непремѣнно менѣе $\frac{1}{2.3.4}$. Дѣйствительно, такъ какъ функція $f(n)$ постоянно положительная, то можно принять

$$\int_0^n f(n)n^4dn = n_1^4\int_0^n f(n)dn,$$

разумѣя подъ n_1 величину, меньшую n. Слѣдовательно

$$\frac{k^{IV}}{k}=\frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{n_1^4}{n^4}<\frac{1}{2.3.4},$$

а поэтому и разность $\frac{1}{2}\left(\frac{k''}{k}\right)^2-\frac{k^{IV}}{k}$ будетъ величина посредственная.

Покажемъ теперь, что суммы $S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)$ и $S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)$ могутъ быть принимаемы за количества порядка s. Пусть будетъ $\frac{M}{\mu}$ наибольшая изъ величинъ $\frac{m_1}{\mu}, \frac{m_2}{\mu}, \ldots \frac{m_s}{\mu}$; положимъ сверхъ того, что количество $\frac{M}{\mu}$, а равно квадратъ его $\frac{M^2}{\mu^2}$ и четвертая степень $\frac{M^4}{\mu^4}$ не сравнимы, по величинѣ своей, съ числомъ наблюденій s. Чтобъ удовлетворить этимъ условіямъ, или, что всё равно, первому изъ нихъ когда $\frac{M}{\mu}<1$, или послѣднему если $\frac{M}{\mu}>1$, достаточно будетъ приписать произвольному цѣлому числу μ приличное значеніе, вообще довольно значительное. Въ такомъ предположеніи, суммы $S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)$ и $S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)$ будутъ обѣ не выше порядка s, что прямо слѣдуетъ изъ очевидныхъ неравенствъ:

$$S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)<\frac{M^2}{\mu^2}.s,\qquad S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)<\frac{M^4}{\mu^4}.s.$$

Отсюда заключаемъ непосредственно, что $\frac{S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)}{s}$ будетъ количество, независимое отъ порядка величины s, а $\frac{S\left(\frac{m_s^4}{\mu^4}\right)}{s^2}$ количество порядка $\frac{1}{s}$. На такомъ основаніи, приведенныя выше утвержденія вполнѣ оправдываются.

Положимъ теперь, въ послѣднемъ выраженіи для P,

$$\frac{k''}{k}\cdot\frac{S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)}{s}\cdot t^2 = t'^2;$$

замѣтивъ, что предѣлы относительно новой перемѣнной t' остаются, какъ и для t, 0 и $+\infty$, получимъ

$$P = \frac{1}{\mu n\pi}\sqrt{\frac{k}{k''S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)}}\int_0^\infty e^{-t'^2}\operatorname{Cos.}\left(\frac{l}{\mu n}\sqrt{\frac{k}{k''S\left(\frac{m_s^2}{\mu^2}\right)}}\cdot t'\right)dt'.$$

Легко видѣть, что μ исчезаетъ изъ этой формулы; если, сверхъ того, замѣнимъ послѣдній интегралъ его величиною [уравненіе (149)], то найдемъ

$$P = \frac{e^{-\frac{k}{4k''S(m_s^2)}\cdot\frac{l^2}{n^2}}}{2n\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}\cdot S(m_s^2)}}.$$

И такъ, P изобразитъ вѣроятность, что сумма (155) равна $+\frac{l}{\mu}$; по причинѣ же независимости выраженія P отъ числа μ, вѣроятность, что сумма

$$m_1\varepsilon_1+m_2\varepsilon_2+m_3\varepsilon_3+\ldots+m_s\varepsilon_s \tag{158}$$

равна $+l$, очевидно опредѣлится тою же самою формулою.

Чтобы найти вѣроятность p, что сумма (158) будетъ заключаться между предѣлами $-l$ и $+l$, должно помножить P на dl, и взять интегралъ произведенія отъ $-l$ до $+l$; замѣтивъ же, что P есть функція чётная въ разсужденіи l, получимъ

$$p = \int_{-l}^{+l} Pdl = 2\int_0^l Pdl;$$

слѣдовательно

$$p = \frac{1}{n\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}\cdot S(m_s^2)}}\int_0^l e^{-\frac{k}{4k''S(m_s^2)}\cdot\frac{l^2}{n^2}}.dl.$$

Введемъ въ эту формулу, вмѣсто безконечныхъ чиселъ l и n, величины конечныя; для этого положимъ, какъ въ предъидущемъ N° 83,

$$\frac{l}{n\sqrt{s}} = r \quad \text{и} \quad n = a;$$

найдется

$$p = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}\cdot S(m_s^2)}}\int_0^r e^{-\frac{ks}{4k''S(m_s^2)}\cdot r^2}dr, \tag{159}$$

и p будетъ изображать вѣроятность, что сумма (158) заключается между предѣлами $-ar\sqrt{s}$ и $+ar\sqrt{s}$. Очевидно, что $\frac{1}{2}p$ изобразитъ вѣроятность, что та же сумма содержится между предѣлами 0 и $+ar\sqrt{s}$, или $-ar\sqrt{s}$ и 0.

85. Перейдемъ теперь къ приложенію формулъ предъидущаго нумера къ даннымъ, получаемымъ изъ многочисленныхъ наблюденій.

Положимъ, что произведенъ значительный рядъ наблюденій, имѣющій цѣлію опредѣленіе одного или нѣсколькихъ неизвѣстныхъ. Пусть будутъ $x, y, z\ldots$ эти неизвѣстныя или элементы, и допустимъ, что они не могутъ быть измѣрены непосредственно, а опредѣляются наблюденіями только нѣкоторыя ихъ функціи $\varphi_1(x, y, z\ldots)$, $\varphi_2(x, y, z\ldots)$, $\varphi_3(x, y, z\ldots)\ldots$ даннаго вида, и значенія которыхъ мы изобразимъ чрезъ $M_1, M_2, M_3,\ldots$ Если бы наблюденія были въ строгомъ смыслѣ точны, то получили бы

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, z\ldots)-M_1 &= 0\\
\varphi_2(x, y, z\ldots)-M_2 &= 0\\
\varphi_3(x, y, z\ldots)-M_3 &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

и тогда, для опредѣленія неизвѣстныхъ $x, y, z\ldots$, было бы достаточно имѣть столько подобныхъ уравненій, сколько всѣхъ элементовъ. Но такъ какъ наблюденія всегда подвержены въ бóльшей или мéньшей степени погрѣшностямъ, то предъидущія разности не будутъ равны нулю, а нѣкоторымъ величинамъ, положительнымъ или отрицательнымъ. Эти-то разности между истинными и наблюденными величинами функцій $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ldots$ и называются *погрѣшностями наблюденій*. Если изобразимъ ихъ чрезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\ldots$, и положимъ число наблюденій равнымъ s, то получимъ:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, z\ldots)-M_1 &= \varepsilon_1\\
\varphi_2(x, y, z\ldots)-M_2 &= \varepsilon_2\\
\varphi_3(x, y, z\ldots)-M_3 &= \varepsilon_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
\varphi_s(x, y, z\ldots)-M_s &= \varepsilon_s.
\end{aligned}$$

Вотъ уравненія, изъ которыхъ надлежитъ вывести значенія элементовъ $x, y, z\ldots$; но должно замѣтить, что опредѣленіе точныхъ ихъ величинъ невозможно, ибо въ эти s уравненій, кромѣ $x, y, z\ldots$, входитъ еще s неизвѣстныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\ldots\varepsilon_s$, и слѣдовательно, полное число неизвѣстныхъ превышаетъ число уравненій. При такой неопредѣленности, естественно раждается вопросъ, какъ соединить предъидущія уравненія наивы-

годнѣйшимъ образомъ, то есть такъ, чтобы получить вѣроятнѣйшія значенія элементовъ $x, y, z \ldots$.

Прежде всего замѣтимъ, что во всѣхъ приложеніяхъ наивыгоднѣйшаго способа допускаютъ, что функціи $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ суть *линейныя;* это предположеніе оправдывается тѣмъ, что величины $x, y, z \ldots$ могутъ быть сдѣланы весьма малыми. Дѣйствительно, ихъ можно принимать за поправки элементовъ, уже извѣстныхъ по приближенію. Напримѣръ, еслибъ знали, что разсматриваемые элементы мало разнятся отъ величинъ $a, b, c \ldots$, то, для уточненія ихъ, поставили бы $a+x$, $b+y$, $c+z, \ldots$ вмѣсто $a, b, c \ldots$, и получили бы первое уравненіе

$$\varphi_1(a+x,\ b+y,\ c+z, \ldots) - M_1 = \varepsilon_1,$$

которое, чрезъ разложеніе въ рядъ, по причинѣ малости поправокъ $x, y, z \ldots$, приметъ линейный видъ

$$A_1 + B_1x + C_1y + D_1z + \ldots - M_1 = \varepsilon_1.$$

Разложивъ подобнымъ образомъ функціи $\varphi_2, \varphi_3 \ldots$, получимъ рядъ уравненій

$$\begin{aligned}
A_1 + B_1x + C_1y + D_1z + \ldots - M_1 &= \varepsilon_1 \\
A_2 + B_2x + C_2y + D_2z + \ldots - M_2 &= \varepsilon_2 \\
A_3 + B_3x + C_3y + D_3z + \ldots - M_3 &= \varepsilon_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_s + B_sx + C_sy + D_sz + \ldots - M_s &= \varepsilon_s,
\end{aligned}$$

называемыхъ въ наблюдательныхъ наукахъ *условными уравненіями.*

Первые геометры, употреблявшіе условныя уравненія, вводили нѣкоторыя соотношенія, болѣе или менѣе выгодныя, между погрѣшностями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ наблюденій. При такой неопредѣлительности въ пріёмахъ, слѣдствія вычисленій для одной и той же системы условныхъ уравненій, должны были разствовать между собою, что̀ дѣйствительно и случалось. Иные думали, что самая выгодная система величинъ $x, y, z \ldots$ есть та̀, для которой *наибольшая* изъ погрѣшностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$, независимо отъ знака, будетъ менѣе, нежели при всякой другой системѣ. Пріёмъ, употребляемый при этомъ для опредѣленія неизвѣстныхъ, назывался *Méthode des situations.* Другіе полагали, что наивыгоднѣйшая система соотвѣтствуетъ тому предположенію, когда сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$ погрѣшностей есть *наименьшая.* Но когда Анализъ Вѣроятностей былъ приложенъ къ наукамъ наблюдательнымъ, тогда увидѣли, что выборъ наивыгоднѣйшихъ выводовъ зависитъ не только отъ численныхъ величинъ погрѣшностей, но еще и отъ соотвѣтствующихъ имъ вѣроятностей. Наивыгоднѣйшій выводъ будетъ тотъ, для котораго сумма произведе-

ній всѣхъ погрѣшностей, принимая всегда сіи послѣднія съ положительными знаками, на соотвѣтствующія имъ вѣроятности, будетъ *наименьшая.* Такимъ образомъ наблюдателя сравниваютъ съ игрокомъ, который можетъ только проиграть, и стараются сдѣлать такъ, чтобы математическая величина его проигрыша была наименьшая. Такое сравненіе оправдывается тѣмъ, что погрѣшности наблюденій, какъ положительныя такъ и отрицательныя, въ равной степени должны быть избѣгаемы, почему онѣ и могутъ быть разсматриваемы какъ проигрышъ въ игрѣ. Правда, въ игрѣ часто принимаютъ въ соображеніе нравственное, а не математическое ожиданіе игрока; но, въ настоящемъ случаѣ, гдѣ погрѣшность въ измѣреніи очевидно не должна имѣть никакого вліянія на нравственное состояніе наблюдателя, слѣдуетъ брать въ расчётъ одно только ожиданіе математическое.

Положимъ въ частности, что имѣемъ въ виду опредѣлить изъ условныхъ уравненій одинъ элементъ. Изобразимъ чрезъ α то̆чную его величину, а чрезъ a извѣстное приближенное его значеніе. Если положимъ $\alpha = a + x$, то поправка x будетъ вообще весьма малая величина. Допустимъ, что не имѣемъ возможности измѣрить непосредственно элементъ α, но можемъ опредѣлить другія величины $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\varphi_3(\alpha) \ldots$, зависящія извѣстнымъ образомъ отъ него. Пусть будутъ соотвѣтственно $M_1, M_2, M_3 \ldots$ величины функцій $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\varphi_3(\alpha) \ldots$, найденныя посредствомъ наблюденій. Если бы эти наблюденія были совершенно точны, то имѣли бы

$$\varphi_1(\alpha) = M_1, \quad \varphi_2(\alpha) = M_2, \quad \varphi_3(\alpha) = M_3 \ldots;$$

но какъ въ строгомъ смыслѣ это невозможно, то предъидущія равенства должно замѣнить уравненіями

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\alpha) - M_1 &= \varepsilon_1 \\
\varphi_2(\alpha) - M_2 &= \varepsilon_2 \\
\varphi_3(\alpha) - M_3 &= \varepsilon_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ изображаютъ неизвѣстныя погрѣшности наблюденій. Если вмѣсто α подставимъ $a+x$ въ эти равенства, то, по причинѣ x весьма малаго, функцію $\varphi_1(a+x)$ можно будетъ замѣнить суммою $\varphi_1(a) + \varphi_1'(a).x$. Слѣдовательно

$$\begin{aligned}
\varphi_1(a) + \varphi_1'(a).x - M_1 &= \varepsilon_1 \\
\varphi_2(a) + \varphi_2'(a).x - M_2 &= \varepsilon_2 \\
\varphi_3(a) + \varphi_3'(a).x \quad M_3 &= \varepsilon_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Предполагая же для краткости

$$\begin{array}{ll} \varphi_1'(a) = a_1 & M_1 - \varphi_1(a) = h_1 \\ \varphi_2'(a) = a_2 & M_2 - \varphi_2(a) = h_2 \\ \varphi_3'(a) = a_3 & M_3 - \varphi_3(a) = h_3 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

найдемъ окончательно, при s наблюденіяхъ, слѣдующія условныя уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x - h_1 = \varepsilon_1 \\ a_2x - h_2 = \varepsilon_2 \\ a_3x - h_3 = \varepsilon_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_sx - h_s = \varepsilon_s. \end{array}\right\} \qquad (160)$$

Замѣтимъ, что эти уравненія приготовляются обыкновенно такъ, чтобы коэффиціенты у x, то есть величины $a_1, a_2, a_3 \ldots a_s$, были всѣ положительные. Въ такомъ случаѣ, положивъ сумму погрѣшностей равною нулю, получимъ

$$x = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_s}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_s} \quad \text{или} \quad x = \frac{S(h_s)}{S(a_s)}.$$

Этотъ результатъ называется обыкновенно *среднимъ выводомъ наблюденій.*

Первый, предложившій опредѣленіе одного элемента изъ многихъ наблюденій, принимая въ расчётъ вліяніе каждаго изъ сихъ послѣднихъ, былъ Англійскій математикъ *Котесъ*, умершій въ 1716 году. Вліяніе наблюденій въ уравненіяхъ (160) выражается коэффиціентами $a_1, a_2, a_3 \ldots a_s$. По правилу Котеса, величина $x = \frac{h_1}{a_1}$, выведенная изъ перваго наблюденія, помножается на a_1, вторая $\frac{h_2}{a_2}$ на a_2 и такъ далѣе, и сумма всѣхъ найденныхъ произведеній $a_1 . \frac{h_1}{a_1} + a_2 . \frac{h_2}{a_2} + \ldots + a_s . \frac{h_s}{a_s}$ дѣлится на сумму коэффиціентовъ $a_1 + a_2 + \ldots + a_s$. Такимъ образомъ очевидно получимъ поправку $x = \frac{S(h_s)}{S(a_s)}$, которую мы сей-часъ назвали среднимъ выводомъ наблюденій.

86. Прежде нежели перейдемъ къ изложенію наивыгоднѣйшаго способа соединять уравненія (160) для опредѣленія изъ нихъ элемента x, разсмотримъ, какой степени точности мы можемъ ожидать, принимая за приближенную величину x средній выводъ наблюденій, то есть полагая $x = \frac{S(h_s)}{S(a_s)}$.

Въ N° 83 мы опредѣлили [формулы (153) и (154)] вѣроятность p, что сумма погрѣшностей будетъ заключаться между предѣлами $\mp ar\sqrt{s}$; тамъ найдено

$$p = \sqrt{\frac{k}{k'\pi}} \int_0^r e^{-\frac{k}{4k''} . r^2} dr.$$

Допустимъ теперь, что принявъ $x = \frac{S(h_s)}{S(a_s)}$, погрѣшность этого опредѣленія x заключается между предѣлами $\mp u$. И такъ, будетъ $x = \frac{S(h_s)}{S(a_s)} \mp u$. Съ другой стороны, сложивъ формулы (160), имѣемъ

$$S(a_s).x - S(h_s) = S(\varepsilon_s);$$

если подставимъ въ это уравненіе $\frac{S(h_s)}{S(a_s)} \mp u$ на мѣсто x, а $\mp ar\sqrt{s}$ на мѣсто $S(\varepsilon_s)$, то получимъ

$$r = \frac{u . S(a_s)}{a\sqrt{s}}.$$

Слѣдовательно вѣроятность p, что погрѣшность величины $\frac{S(h_s)}{S(a_s)}$, принимаемой за значеніе элемента x, заключается между предѣлами $\mp u$, будетъ

$$p = \sqrt{\frac{k}{k'' . \pi s}} . \frac{S(a_s)}{a} \int_0^u e^{-\frac{k[S(a_s)]^2}{4k''a^2s} . u^2} du.$$

87. Положимъ теперь, какъ въ N° 84, что погрѣшности наблюденій помножаются на цѣлыя числа $m_1, m_2, m_3, \ldots m_s$, и потомъ разсматривается сумма (158) всѣхъ полученныхъ произведеній. Такимъ образомъ изъ условныхъ уравненій (160) выведемъ

$$m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3 + \ldots + m_s\varepsilon_s = S(m_sa_s).x - S(m_sh_s). \qquad (161)$$

Примемъ въ соображеніе величину x, опредѣляемую изъ предположенія, что сумма погрѣшностей, соотвѣтственно помноженныхъ на $m_1, m_2, m_3, \ldots m_s$, равна нулю. Будетъ

$$x = \frac{S(m_sh_s)}{S(m_sa_s)}. \qquad (162)$$

Найдемъ вѣроятность p, что погрѣшность этого опредѣленія x, заключается между предѣлами $\mp u$, или иначе, вѣроятность что $x = \frac{S(m_sh_s)}{S(m_sa_s)} \mp u$.

Въ концѣ N° 84 мы уже нашли вѣроятность p [формула (159)], что сумма

$$m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3 + \ldots + m_s\varepsilon_s$$

заключается между предѣлами $\mp ar\sqrt{s}$; тамъ было найдено

$$p = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}S(m_s^2)}} \int_0^r e^{-\frac{ks}{4k''S(m_s^2)} . r^2} dr.$$

Если въ уравненіе (161) поставимъ $\mp ar\sqrt{s}$ вмѣсто суммы $m_1\varepsilon_1+m_2\varepsilon_2+\ldots+m_s\varepsilon_s$ и $\frac{S(m_sh_s)}{S(m_sa_s)}\mp u$ вмѣсто x, то получимъ

$$r=\frac{uS(m_sa_s)}{a\sqrt{s}},$$

въ слѣдствіе чего найдется

$$p=\frac{S(m_sa_s)}{a\sqrt{\frac{k''}{k}\cdot\pi S(m_s^2)}}\int_0^u e^{-\frac{k[S(m_sa_s)]^2}{4k''a^2S(m_s^2)}\cdot u^2}du.$$

Наконецъ, полагая

$$\frac{k[S(m_sa_s)]^2}{4k''a^2S(m_s^2)}\cdot u^2=t^2,$$

или

$$u=2at\sqrt{\frac{k''}{k}}\cdot\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_sa_s)},$$

будетъ просто

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt.$$

И такъ, если означимъ чрезъ T такое нибудь опредѣленное значеніе перемѣнной t, то

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt \qquad (163)$$

изобразитъ вѣроятность, что погрѣшность u величины $x=\frac{S(m_sh_s)}{S(m_sa_s)}$ будетъ заключаться между предѣлами

$$-2aT\sqrt{\frac{k''}{k}}\cdot\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_sa_s)} \quad \text{и} \quad +2aT\sqrt{\frac{k''}{k}}\cdot\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_sa_s)}. \qquad (164)$$

При постоянномъ T, вѣроятность p постоянная, и она тѣмъ ближе будетъ подходить къ единицѣ или достовѣрности, чѣмъ T значительнѣе. Мы уже имѣли случай замѣтить, что даже при $T=4$, p очень мало разнствуетъ отъ единицы. Сверхъ того, такъ какъ a и отношеніе $\frac{k''}{k}$ предполагаются постоянными при одномъ и томъ же рядѣ наблюденій, то въ силу такихъ условій, предѣлы (164) погрѣшности величины x [формула (162)], будутъ тѣмъ тѣснѣе, чѣмъ множитель



$$\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_sa_s)}$$

менѣе. И такъ, наивыгоднѣйшій выводъ будетъ соотвѣтствовать предположенію

$$\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_sa_s)}=\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2+\ldots+m_s^2}}{m_1a_1+m_2a_2+m_3a_3+\ldots+m_sa_s}=minimum.$$

Для опредѣленія наименьшей величины этой дроби, беремъ ея производную относительно каждой изъ неизвѣстныхъ $m_1, m_2, \ldots m_s$. Такимъ образомъ получимъ s производныхъ, и каждую изъ нихъ должно уравнить нулю. Слѣдовательно будетъ вообще

$$\frac{S(m_sa_s).m_i}{\sqrt{S(m_s^2)}}-\sqrt{S(m_s^2)}.a_i=0,$$

или

$$\frac{m_i}{S(m_s^2)}=\frac{a_i}{S(m_sa_s)}, \quad \text{откуда} \quad m_i=\frac{S(m_s^2)}{S(m_sa_s)}.a_i,$$

гдѣ i изображаетъ числа 1, 2, 3,....s. Такъ какъ дробь $\frac{S(m_s^2)}{S(m_sa_s)}$ очевидно не зависитъ отъ i, то изобразивъ её чрезъ λ, получимъ изъ уравненія, опредѣляющаго m_i:

$$m_1=\lambda a_1, \quad m_2=\lambda a_2, \quad m_3=\lambda a_3,\ldots\ldots m_s=\lambda a_s.$$

Замѣтимъ, что величина λ остается совершенно произвольною. Если случится, что $a_1, a_2, a_3,\ldots a_s$ будутъ числа цѣлыя, то можно положить $\lambda=1$, и тогда найдется $m_1=a_1$, $m_2=a_2,\ldots m_s=a_s$. Но если всѣ коэффиціенты $a_1, a_2\ldots a_s$, или только нѣкоторые изъ нихъ, будутъ дробные, то должно выбрать λ такъ, чтобы всѣ произведенія $\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3,\ldots\lambda a_s$ были цѣлыя, потому что числа $m_1, m_2, m_3,\ldots m_s$, имъ равныя, должны сами быть цѣлыя по свойству употребленнаго нами анализа. Опредѣленіе же числа λ не представляетъ никакого затрудненія. Положимъ, какъ обыкновенно случается въ приложеніяхъ, что коэффиціенты $a_1, a_2,\ldots a_s$ выражены десятичными дробями; пусть, напримѣръ, наибольшее число десятичныхъ знаковъ, входящихъ въ нихъ, будетъ 3. Тогда, помноживъ рядъ величинъ $a_1, a_2, a_3\ldots a_s$ на $10^3=1000$, всѣ произведенія будутъ числа цѣлыя. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, $\lambda=1000$. На такомъ основаніи, если подставимъ въ формулу (162) вообще на мѣсто m_i величину λa_i, и замѣтимъ что λ уничтожится, то найдемъ слѣдующее наивыгоднѣйшее значеніе для элемента x:

$$x=\frac{S(\lambda a_sh_s)}{S(\lambda a_s.a_s)}=\frac{S(a_sh_s)}{S(a_s^2)}=\frac{a_1h_1+a_2h_2+\ldots+a_sh_s}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_s^2}. \qquad (165)$$

Вѣроятность же, что погрѣшность этого опредѣленія x, заключается между предѣлами

$$\mp\frac{2aT\sqrt{\frac{k''}{k}}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_s^2}}, \qquad (166)$$

будетъ

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt. \qquad (167)$$

При опредѣленіи наименьшаго значенія дроби

$$\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_s a_s)} = \frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+\ldots+m_s^2}}{m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_sa_s},$$

мы разсматривали числа $m_1, m_2, \ldots m_s$ какъ величины непрерывныя; но очень легко найти тотъ же самый *minimum* и безъ этого ограниченія. Дѣйствительно, къ квадрату $(m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_sa_s)^2$ придадимъ сумму квадратовъ

$$(m_1a_2-m_2a_1)^2+(m_1a_3-m_3a_1)^2+\ldots = S[(m_ia_l-m_la_i)^2],$$

гдѣ i и l изображаютъ числа неравныя между собой, измѣняющіяся оба отъ 1 до s, но, при томъ условіи, чтобы одну и ту же разность, съ противными знаками, писать одинъ только разъ. На такомъ основаніи получимъ

$$(m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_sa_s)^2+(m_1a_2-m_2a_1)^2+(m_1a_3-m_3a_1)^2+\ldots$$
$$= (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_s^2)(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_s^2).$$

Слѣдовательно, для всѣхъ значеній чиселъ $m_1, m_2, m_3, \ldots m_s$, при которыхъ разности

$$m_1a_2-m_2a_1, \quad m_1a_3-m_3a_1, \ldots\ldots$$

не обращаются въ нуль, будетъ

$$(m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_sa_s)^2<(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_s^2)(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_s^2),$$

или

$$[S(m_sa_s)]^2 < S(a_s^2).S(m_s^2), \quad \text{откуда} \quad \frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_sa_s)} > \frac{1}{\sqrt{S(a_s^2)}}.$$

И такъ, наименьшая величина выраженія

$$\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_sa_s)} \quad \text{будетъ} \quad \frac{1}{\sqrt{S(a_s^2)}},$$

и она соотвѣтствуетъ условіямъ

$$m_1a_2-m_2a_1 = 0, \quad m_1a_3-m_3a_1 = 0. \ldots,$$

изъ которыхъ, какъ и выше, выводимъ

$$m_1 = \lambda a_1, \quad m_2 = \lambda a_2, \quad m_3 = \lambda a_3\ldots\ldots$$

Наивыгоднѣйшая величина элемента x, опредѣляемая формулою (165), относится къ предположенію, что *сумма квадратовъ погрѣшностей наблюденій есть наименьшая*. Дѣйствительно, въ силу формулъ (160) имѣемъ

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\ldots+\varepsilon_s^2 = (a_1x-h_1)^2+(a_2x-h_2)^2+(a_3x-h_3)^2+\ldots+(a_sx-h_s)^2,$$

и уравнивъ нулю производную этого выраженія, получимъ

$$a_1(a_1x-h_1)+a_2(a_2x-h_2)+a_3(a_3x-h_3)+\ldots+a_s(a_sx-h_s) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3+\ldots+a_sh_s}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_s^2} = \frac{S(a_sh_s)}{S(a_s^2)}.$$

И такъ, вотъ величина элемента x, которую, по теоріи, должно предпочесть всякой другой, когда выводимъ этотъ элементъ изъ условныхъ уравненій (160), и предполагаемъ притомъ число наблюденій чрезвычайно большимъ. Способъ, на основаніи котораго получается это наивыгоднѣйшее значеніе элемента, называется *способомъ наименьшихъ квадратовъ*.

Въ N° 85 мы сказали, что результатъ, который долженъ быть предпочтенъ всякому другому, выводится изъ того условія, что сумма произведеній каждой погрѣшности на ея вѣроятность, должна быть наименьшая, принимая притомъ всѣ погрѣшности съ положительнымъ знакомъ. Легко показать, что это правило приводитъ прямо къ способу наименьшихъ квадратовъ погрѣшностей. Дѣйствительно, доказано выше, что если изобразимъ чрезъ $\mp u$ предѣлы погрѣшности величины x, опредѣляемой формулою

$$x = \frac{S(m_sh_s)}{S(m_sa_s)},$$

то вѣроятность p, что x заключается между предѣлами

$$\frac{S(m_sh_s)}{S(m_sa_s)} \mp u,$$

будетъ

$$p = \frac{S(m_sa_s)}{a\sqrt{\frac{k''}{k}\cdot\pi S(m_s^2)}}\int_0^u e^{-\frac{k[S(m_sa_s)]^2}{4k''a^2S(m_s^2)}\cdot u^2}du.$$

Очевидно также, что если эту величину p раздѣлимъ на 2, то получимъ вѣроятность, что упоминаемая погрѣшность заключается между 0 и $+u$, или еще между $-u$ и 0. Вообразимъ теперь кривую линію, у которой абсцисса изображена погрѣшностію u, а ордината, вѣроятностію этой самой погрѣшности, то есть дифференціаломъ

$$\frac{S(m_sa_s)}{2a\sqrt{\frac{k''}{k}\cdot\pi S(m_s^2)}}\cdot e^{-\frac{k[S(m_sa_s)]^2}{4k''a^2S(m_s^2)}\cdot u^2}du. \tag{168}$$

Если умножимъ послѣднее выраженіе на u, и возьмемъ сумму всѣхъ подобныхъ произведеній отъ $u=0$ до u равнаго предѣлу положительныхъ погрѣшностей, то найдемъ *среднюю положительную погрѣшность*, которую Лапласъ назвалъ *erreur moyenne à craindre*. По причинѣ же быстраго убыванія показательной функціи, эту сумму можно будетъ распространить отъ $u=0$ до $u=\infty$, въ слѣдствіе чего получимъ для упоминаемой погрѣшности, которую назовемъ *среднею нормальною*, величину

$$\frac{S(m_sa_s)}{2a\sqrt{\frac{k''}{k}\cdot\pi S(m_s^2)}}\int_0^\infty e^{-\frac{k[S(m_sa_s)]^2}{4k''a^2S(m_s^2)}\cdot u^2}udu = a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}\cdot\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_sa_s)}. \tag{169}$$

Это самое выраженіе, взятое съ отрицательнымъ знакомъ, изобразитъ и *среднюю отрицательную погрѣшность* того же опредѣленія

$$x = \frac{S(m_s h_s)}{S(m_s a_s)}.$$

Но чтобы найденная средняя погрѣшность была наименьшая, въ чёмъ и будетъ состоять выгода употребляемаго способа, должно найти наименьшее значеніе множителя

$$\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_s a_s)},$$

ибо коэффиціентъ его $a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}$ постоянный. И такъ, мы приведены къ одному и тому же слѣдствію какъ и выше. Сверхъ того, какъ уже найдено что наименьшее значеніе дроби

$$\frac{\sqrt{S(m_s^2)}}{S(m_s a_s)} \quad \text{есть} \quad \frac{1}{\sqrt{S(a_s^2)}},$$

то и заключаемъ, что *наименьшая средняя погрѣшность* соотвѣтствуетъ величинѣ элемента, опредѣленнаго по способу наименьшихъ квадратовъ, и что она равна

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}}{\sqrt{S(a_s^2)}}. \qquad (170)$$

Когда величина элемента x опредѣлена по способу Котеса, именно формулою $x = \frac{S(h_s)}{S(a_s)}$, то, при такомъ опредѣленіи, средняя погрѣшность будетъ

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''s}{k\pi}}}{S(a_s)},$$

ибо въ формулѣ (169) надобно положить m_1, $m_2, \ldots m_s$ равными единицѣ, въ слѣдствіе чего и найдется $S(m_s^2) = s$, $S(m_s a_s) = S(a_s)$.

Мы сей-часъ видѣли, что средняя нормальная погрѣшность (170) есть наименьшая; слѣдовательно непремѣнно должно быть

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}}{\sqrt{S(a_s^2)}} < \frac{a\sqrt{\frac{k''s}{k\pi}}}{S(a_s)}, \quad \text{или} \quad s.S(a_s^2) > [S(a_s)]^2,$$

въ чёмъ впрочемъ легко удостовѣриться и непосредственно. Для этого, къ квадрату

$$[S(a_s)]^2 = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_s)^2$$

придадимъ сумму квадратовъ всѣхъ возможныхъ разностей

$$(a_1 - a_2)^2, \quad (a_1 - a_3)^2, \ldots (a_1 - a_s)^2, \quad (a_2 - a_3)^2 \ldots;$$

получимъ

$$s(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \ldots,$$

и слѣдовательно

$$s(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2) > (a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^2,$$

или

$$s.S(a_s^2) > [S(a_s)]^2,$$

что̀ и имѣли въ виду показать.

88. Въ N° 84 мы доказали, что отношеніе $\frac{k''}{k}$, зависящее отъ закона вѣроятности погрѣшностей, всегда менѣе дроби $\frac{1}{6}$, когда функція, выражающая этотъ законъ, будетъ убывающею при возрастающихъ погрѣшностяхъ. Такъ какъ величина средней погрѣшности (170) зависитъ отъ отношенія $\frac{k''}{k}$, то необходимо опредѣлить его. Вмѣсто дроби $\frac{k''}{k}$, найдемъ прямо коэффиціентъ $a\sqrt{\frac{k''}{k}}$, входящій въ формулу (170). Для этого положимъ, что ищется вѣроятность P, что сумма квадратовъ погрѣшностей наблюденій равна нѣкоторому числу, напримѣръ $l + \mu s$. Употребляя пріёмы, подобные тѣмъ, которыми уже руководствовались въ N° 83, найдемъ, что искомая вѣроятность равна коэффиціенту показательной величины $e^{(l+\mu s)\varphi\sqrt{-1}}$ въ разложеніи

$$\frac{\left(f(0) + 2f(1)e^{1^2.\varphi\sqrt{-1}} + 2f(2)e^{2^2.\varphi\sqrt{-1}} + \ldots + 2f(n)e^{n^2.\varphi\sqrt{-1}}\right)^s}{[f(0) + 2f(1) + 2f(2) + \ldots + 2f(n)]^s} = Q.$$

Если умножимъ Q на $e^{-(l+\mu s)\varphi\sqrt{-1}}$, то членъ, независимый отъ φ, изобразитъ искомую вѣроятность P. Легко видѣть, что этотъ членъ опредѣлится формулою

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Qe^{-(l+\mu s)\varphi\sqrt{-1}}.d\varphi.$$

Дѣйствительно, такъ какъ коэффиціентъ количества $e^{(l+\mu s)\varphi\sqrt{-1}}$ въ Q будетъ P по самому опредѣленію, то умноживъ разсматриваемый членъ на $e^{-(l+\mu s)\varphi\sqrt{-1}}$, получимъ просто P. Умноживъ P на $d\varphi$, взявъ интегралъ отъ $-\pi$ до $+\pi$, и раздѣливъ потомъ на 2π, найдется P. Что касается до остальныхъ членовъ разложенія Q, то каждый изъ нихъ, будучи умноженъ на $e^{-(l+\mu s)\varphi\sqrt{-1}}$, доставитъ какую нибудь показательную величину, напримѣръ $e^{r\varphi\sqrt{-1}}$, гдѣ r не будетъ *нуль*. Умноживъ её на $d\varphi$, и взявъ интегралъ отъ $-\pi$ до $+\pi$, увидимъ что интегралъ уничтожится. Дѣйствительно, по причинѣ

$$e^{r\varphi\sqrt{-1}} = \text{Cos.}(r\varphi) + \text{Sin.}(r\varphi).\sqrt{-1},$$

получимъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{r\varphi\sqrt{-1}} d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Cos.}(r\varphi) d\varphi + \sqrt{-1}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Sin.}(r\varphi) d\varphi = \left(\frac{\mathrm{Sin.}r\varphi}{r}\right)_{-\pi}^{+\pi} - \sqrt{-1}\left(\frac{\mathrm{Cos.}r\varphi}{r}\right)_{-\pi}^{+\pi}.$$

Но какъ r предполагается цѣлымъ числомъ, отличнымъ отъ нуля, то будетъ отдѣльно

$$\left(\frac{\mathrm{Sin.}r\varphi}{r}\right)_{-\pi}^{+\pi} = 0, \quad \left(\frac{\mathrm{Cos.}r\varphi}{r}\right)_{-\pi}^{+\pi} = 0.$$

На такомъ основаніи, анализъ N° 83 приведетъ насъ непосредственно къ слѣдующему выраженію вѣроятности P:

$$P = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\int_0^n \mathrm{f}(n) e^{n^2\varphi\sqrt{-1}} dn\right]^s e^{-(l+\mu s)\varphi\sqrt{-1}} . d\varphi}{\left[\int_0^n \mathrm{f}(n) dn\right]^s}.$$

Но

$$\int_0^n \mathrm{f}(n) e^{n^2\varphi\sqrt{-1}} dn = \int_0^n \mathrm{f}(n) dn + \varphi\sqrt{-1} . \int_0^n \mathrm{f}(n) n^2 dn - \frac{\varphi^2}{1.2}\int_0^n \mathrm{f}(n) n^4 dn - \ldots\ldots$$

Слѣдовательно, удержавъ знакоположенія N° 83, получимъ

$$\left[\int_0^n \mathrm{f}(n) e^{n^2\varphi\sqrt{-1}} dn\right]^s = k^s\left[1 + \frac{2k''}{k}\cdot n^2\varphi\sqrt{-1} - 3.4\cdot\frac{k^{IV}}{k}\cdot n^4\varphi^2 - \cdots\right]^s,$$

почему и будетъ

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[1 + \frac{2k''}{k}\cdot n^2\varphi\sqrt{-1} - 3.4\cdot\frac{k^{IV}}{k}\cdot n^4\varphi^2 - \cdots\right]^s \cdot e^{-(l+\mu s)\varphi\sqrt{-1}} . d\varphi.$$

Если степенное количество $(1 + \frac{2k''}{k}\cdot n^2\varphi\sqrt{-1} - \ldots)^s$ обратимъ въ показательное, взявъ сперва его логариѳмъ, то получимъ

$$\left(1 + \frac{2k''}{k}\cdot n^2\varphi\sqrt{-1} - \ldots\right)^s = e^{s\log.(1 + \frac{2k''}{k}\cdot n^2\varphi\sqrt{-1} - \ldots)}.$$

Но

$$s\log.\left(1 + \frac{2k''}{k}\cdot n^2\varphi\sqrt{-1} - 3.4\cdot\frac{k^{IV}}{k}\cdot n^4\varphi^2 - \ldots\right) =$$

$$2\frac{k''}{k}\cdot n^2 . s . \varphi\sqrt{-1} - 2\cdot\frac{6kk^{IV} - k''^2}{k^2}\cdot s . n^4\varphi^2 - \ldots$$

Поэтому, принявъ $\frac{2k''}{k}\cdot n^2 = \mu$, и положивъ для краткости

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{6kk^{IV} - k''^2} = \beta^2,$$

получимъ

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-l\varphi\sqrt{-1} - \frac{s . n^4\varphi^2}{\beta^2}} d\varphi.$$

По причинѣ же

$$e^{-l\varphi\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos.}(l\varphi) - \mathrm{Sin.}(l\varphi) . \sqrt{-1},$$

и замѣтивъ, что интегралъ относящійся къ синусу уничтожается, потому что между предѣлами $-\pi$ и $+\pi$ каждому элементу положительному будетъ соотвѣтствовать равный элементъ отрицательный, получимъ просто

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{sn^4\varphi^2}{\beta^2}} \mathrm{Cos.}(l\varphi) . d\varphi.$$

Пусть будетъ

$$\frac{n^2}{\beta}\sqrt{s} . \varphi = t;$$

по значительности s и n предѣлы относительно t можно принять равными $-\infty$ и $+\infty$, и тогда будетъ

$$P = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\beta}{n^2\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{Cos.}\left(\frac{l\beta . t}{n^2\sqrt{s}}\right) dt,$$

или, на основаніи формулы (149),

$$P = \frac{\beta}{2n^2\sqrt{\pi s}}\cdot e^{-\left(\frac{l\beta}{2n^2\sqrt{s}}\right)^2}.$$

Умножимъ эту величину на dl, и возьмемъ интегралъ отъ $-l$ до $+l$; найдемъ вѣроятность p, что сумма квадратовъ погрѣшностей заключается между предѣлами $\mu s \mp l$. Слѣдовательно

$$p = \frac{\beta}{2n^2\sqrt{\pi s}}\int_{-l}^{+l} e^{-\left(\frac{\beta l}{2n^2\sqrt{s}}\right)^2} dl.$$

Наконецъ, замѣнивъ безконечное число n величиною a, и положивъ

$$l = n^2 r\sqrt{s} \quad \text{или} \quad l = a^2 r\sqrt{s},$$

получимъ

$$p = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}\int_{-r}^{+r} e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}} dr = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}} dr.$$

Итакъ, вотъ вѣроятность p, что сумма квадратовъ погрѣшностей заключается между предѣлами $\mu s \mp l$, или, что всё равно, между $\frac{2k''}{k}\cdot a^2 s \mp a^2 r\sqrt{s}$. Вѣроятнѣйшее значеніе этой величины соотвѣтствуетъ предположенію $r = 0$, что прямо усматриваемъ изъ формулы

$$P = \frac{\beta}{2n^2\sqrt{\pi s}} \cdot e^{-\left(\frac{l\beta}{2n^2\sqrt{s}}\right)^2};$$

дѣйствительно, P дѣлается наибольшимъ при $l = 0$, а когда $l = 0$, то и $r = 0$. Слѣдовательно, вѣроятнѣйшая величина суммы квадратовъ погрѣшностей будетъ $\frac{2k''}{k} \cdot a^2 s$.

Обратимся теперь къ сказанному въ N° 87. Тамъ мы нашли, что напвыгоднѣйшая величина элемента есть $\frac{S(a_s h_s)}{S(a_s^2)}$. Подставимъ эту величину въ сумму квадратовъ погрѣшностей, то есть во вторую часть уравненія

$$S(\varepsilon_s^2) = S\left[(a_s x - h_s)^2\right] = S\left[\left(a_s \frac{S(a_s h_s)}{S(a_s^2)} - h_s\right)^2\right].$$

По разложеніи получимъ

$$S(\varepsilon_s^2) = S(a_s^2) \cdot \frac{[S(a_s h_s)]^2}{[S(a_s^2)]^2} - \frac{2S(a_s h_s) \cdot S(a_s h_s)}{S(a_s^2)} + S(h_s^2) = \frac{S(a_s^2) \cdot S(h_s^2) - [S(a_s h_s)]^2}{S(a_s^2)}.$$

Вотъ приближенная величина суммы квадратовъ погрѣшностей; съ другой же стороны мы видѣли, что эта самая сумма выражаетъ по приближенію и значеніе количества $\frac{2k''}{k} \cdot a^2 s$. Слѣдовательно

$$\frac{2k''}{k} \cdot a^2 s = \frac{S(a_s^2) \cdot S(h_s^2) - [S(a_s h_s)]^2}{S(a_s^2)},$$

откуда

$$a\sqrt{\frac{k''}{k}} = \sqrt{\frac{S(a_s^2) \cdot S(h_s^2) - [S(a_s h_s)]^2}{2s \cdot S(a_s^2)}}. \qquad (171)$$

Въ силу этой формулы, средняя нормальная погрѣшность (170) опредѣлится въ функціи коэффиціентовъ условныхъ уравненій, и будетъ

$$\pm \frac{\sqrt{S(a_s^2) \cdot S(h_s^2) - [S(a_s h_s)]^2}}{S(a_s^2)\sqrt{2\pi s}}. \qquad (172)$$

Лапласъ, имѣя въ виду важность результата (171) въ приложеніяхъ его къ наблюденіямъ, дополнилъ первое свое доказательство этого предложенія новыми соображеніями, основанными на изящнѣйшемъ анализѣ. Изслѣдованія его по этому предмету помѣщены въ первомъ Прибавленіи къ *Théorie analytique des probabilités.*

89. Обратимся снова къ выраженію (168) [N° 87]. Если, согласно съ способомъ наименьшихъ квадратовъ, замѣнимъ въ немъ суммы $S(m_s a_s)$ и $S(m_s^2)$ суммою $S(a_s^2)$, то получимъ формулу

$$\frac{\sqrt{S(a_s^2)}}{2a\sqrt{\frac{k''}{k}} \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{kS(a_s^2)}{4k''a^2} \cdot u^2} du,$$

изображающую безконечно малую вѣроятность опредѣленной погрѣшности u. Пусть будетъ

$$G = \frac{kS(a_s^2)}{4k''a^2};$$

предъидущая вѣроятность приметъ весьма простой видъ

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-Gu^2} du. \qquad (173)$$

Подставимъ теперь, въ силу предъидущаго N°, сумму $S(\varepsilon_s^2)$ квадратовъ погрѣшностей на мѣсто $\frac{2k''}{k} \cdot a^2 s$; найдется для величины G

$$G = \frac{s \cdot S(a_s^2)}{2S(\varepsilon_s^2)}, \qquad (174)$$

гдѣ

$$S(\varepsilon_s^2) = \frac{S(a_s^2) \cdot S(h_s^2) - [S(a_s h_s)]^2}{S(a_s^2)},$$

какъ уже показано въ томъ же N° 88.

Величина G, которую Лапласъ назвалъ *вѣсомъ результата* (*poids du résultat*), заслуживаетъ особеннаго вниманія въ излагаемой нами теоріи. Видъ выраженія (173) показываетъ, что вѣроятность одной и той же погрѣшности u убываетъ тѣмъ быстрѣе, чѣмъ вѣсъ G будетъ больше. Если бы желали опредѣлить вѣроятность p, что погрѣшность элемента, опредѣленнаго по способу наименьшихъ квадратовъ, заключается между предѣлами $-u$ и $+u$, то получили бы

$$p = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{\pi}} \int_{-u}^{+u} e^{-Gu^2} du,$$

или, положивъ $u = \frac{r}{\sqrt{G}}$,

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-r^2} dr.$$

И такъ, при одной и той же вѣроятности p, то есть при одномъ и томъ же значеніи r, предѣлы $\mp u$ погрѣшности будутъ тѣмъ тѣснѣе, чѣмъ вѣсъ G больше. Напримѣръ, пусть будетъ G' вѣсъ, получаемый при другомъ рядѣ наблюденій, а $\mp u'$ соотвѣтствующіе ему предѣлы погрѣшности; тогда найдется:

$$u = \frac{r}{\sqrt{G}} \quad \text{и} \quad u' = \frac{r}{\sqrt{G'}}, \quad \text{или} \quad \frac{u}{u'} = \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G}}.$$

Слѣдовательно, *погрѣшности содержатся между собою въ обратномъ отношеніи корней квадратныхъ изъ соотвѣтствующихъ имъ вѣсовъ.*

Выраженіе (174) показываетъ, что вѣсъ будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ число s наблюденій больше, и чѣмъ менѣе сумма $S(\varepsilon_s^2)$, то есть, чѣмъ эти наблюденія точнѣе.

Съ другой стороны, если обратимъ вниманіе на множитель $S(a_s^2)$ выраженія (174), то усмотримъ, что вѣсъ увеличивается и съ увеличеніемъ коэффиціентовъ $a_1, a_2, \ldots a_s$, входящихъ въ условныя уравненія. Слѣдовательно, самый результатъ, опредѣляемый по способу наименьшихъ квадратовъ, будетъ тѣмъ болѣе заслуживать довѣрія, чѣмъ исчисленныя сей-часъ условія удовлетворяются приблизительнѣе.

Одна изъ примѣчательныхъ величинъ для верхняго предѣла r въ предъидущемъ выраженіи вѣроятности p есть та, которая обращаетъ p въ $\frac{1}{2}$. Пользуясь одною изъ таблицъ, помѣщенныхъ въ концѣ этой книги, легко найти, посредствомъ интерполированія, $r = 0{,}4769363$. Слѣдовательно вѣроятность, что погрѣшность величины элемента x, опредѣленнаго по способу наименьшихъ квадратовъ, заключается между предѣлами

$$\mp u = \mp \frac{0{,}4769363}{\sqrt{G}}, \quad \text{будетъ } \frac{1}{2}.$$

Если вмѣсто G подставимъ его величину (174), то предъидущій предѣлъ u приметъ видъ

$$\mp u = \mp 0{,}4769363.\sqrt{\frac{2S(\varepsilon_s^2)}{s.S(a_s^2)}} = \mp 0{,}6744897.\sqrt{\frac{S(\varepsilon_s^2)}{s.S(a_s^2)}}. \qquad (175)$$

Эту послѣднюю величину Нѣмецкіе астрономы называютъ *вѣроятною погрѣшностію вывода* (*wahrscheinliche Fehler*), потому что можно съ равною вѣроятностію полагать, что погрѣшность принятаго вывода будетъ менѣе или болѣе этой величины. Если изобразимъ вѣроятную погрѣшность чрезъ ϱ, и вычислимъ значенія предѣла r такъ, чтобы интегралъ $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2}dr$ получалъ послѣдовательно значенія $\frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}$ и проч., то составимъ слѣдующую таблицу:

Вѣроятности:	*Предѣлы погрѣшностей:*
$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	$\mp 0{,}6744897.\sqrt{\frac{S(\varepsilon_s^2)}{s.S(a_s^2)}} = \mp \varrho$
$\frac{6}{10}$	$\mp \frac{0{,}8931161}{\sqrt{G}} = \mp 1{,}247790.\varrho$
$\frac{7}{10}$	$\mp \frac{0{,}7328691}{\sqrt{G}} = \mp 1{,}536618.\varrho$
$\frac{8}{10}$	$\mp \frac{0{,}9061939}{\sqrt{G}} = \mp 1{,}900032.\varrho$
$\frac{9}{10}$	$\mp \frac{1{,}1639872}{\sqrt{G}} = \mp 2{,}438664.\varrho$
$\frac{99}{100}$	$\mp \frac{1{,}8213864}{\sqrt{G}} = \mp 3{,}818930.\varrho$
$\frac{999}{1000}$	$\mp \frac{2{,}3276754}{\sqrt{G}} = \mp 4{,}880475.\varrho$

Если положимъ $r = 1$, то получимъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-r^2}dr = 0{,}8427008;$$

эта дробь изобразитъ вѣроятность, что погрѣшность найденной величины элемента заключается между предѣлами $\mp\frac{1}{\sqrt{G}}$. Въ *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, на 1834 годъ, помѣщена довольно пространная таблица, которая прямо доставляетъ вѣроятность, соотвѣтствующую даннымъ предѣламъ погрѣшностей вида $\mp\lambda\varrho$. Величина λ, составляющая аргументъ таблицы, идетъ въ ней отъ 0 до 3,40 чрезъ каждую *сотую*, а отъ $\lambda = 3{,}40$ до $\lambda = 5$, чрезъ каждую *десятую*.

90. Легко доказать, что способъ наименьшихъ квадратовъ погрѣшностей есть наивыгоднѣйшій и въ томъ случаѣ, когда, для опредѣленія какого либо элемента, имѣемъ нѣсколько рядовъ наблюденій, различнаго рода. Положимъ, напримѣръ, что величина элемента x, выведенная наивыгоднѣйшимъ образомъ изъ перваго ряда, заключающаго число s' наблюденій, равняется x'; пусть будутъ x'', s'' подобныя величины, относящіяся ко второму ряду наблюденій; k''', s''' къ третьему и такъ далѣе. Наконецъ, изобразимъ чрезъ $G', G'' G''' \ldots$ вѣсы, соотвѣтствующіе 1-ому, 2-ому, 3-ему... ряду наблюденій, чрезъ s сумму $s'+s''+s'''+\ldots$, а чрезъ x наивыгоднѣйшую величину элемента, выведенную изъ совокупности всѣхъ наблюденій. Въ силу доказаннаго въ N° 87 имѣемъ

$$x = \frac{S(a_s h_s)}{S(a_s^2)},$$

и слѣдовательно

$$x = \frac{S(a'_{s'}h'_{s'}) + S(a''_{s''}h''_{s''}) + S(a'''_{s'''}h'''_{s'''}) + \ldots}{S(a'^2_{s'}) + S(a''^2_{s''}) + S.a'''^2_{s'''}) + \ldots},$$

гдѣ $a'_{s'}$, $h'_{s'}$, относятся къ условнымъ уравненіямъ перваго ряда наблюденій, $a''_{s''}$, $h''_{s''}$ ко второму ряду, и такъ далѣе. Съ другой стороны имѣемъ

$$x' = \frac{S(a'_{s'}h'_{s'})}{S(a'^2_{s'})}, \quad x'' = \frac{S(a''_{s''}h''_{s''})}{S(a''^2_{s''})}, \quad x''' = \frac{S(a'''_{s'''}h'''_{s'''})}{S(a'''^2_{s'''})}, \ldots$$

и сверхъ того, въ силу N° 89,

$$G' = \frac{k}{4k''a^2}.S(a'^2_{s'}), \quad G'' = \frac{k}{4k''a^2}.S(a''^2_{s''}), \quad G''' = \frac{k}{4k''a^2}.S(a'''^2_{s'''}), \ldots$$

Слѣдовательно

$$S(a'_{s'}h'_{s'}) = S(a'^2_{s'}).x' = \frac{4k''a^2}{k}.G'\,x' \quad \text{и} \quad S(a'^2_{s'}) = \frac{4k''a^2}{k}.G',$$

и подобнымъ образомъ

$$S(a''_{s''}h''_{s''}) = \frac{4k''a^2}{k}\cdot G''.x'', \qquad S(a''^2_{s''}) = \frac{4k''a^2}{k}\cdot G''$$

$$S(a'''_{s'''}h'''_{s'''}) = \frac{4k''a^2}{k}\cdot G'''\ x''', \qquad S(a'''^2_{s'''}) = \frac{4k''a^2}{k}\cdot G'''$$

....

Подставляя эти величины въ предъидущее выраженіе x, получимъ

$$x = \frac{G'.x' + G''.x'' + G'''.x''' + \ldots}{G' + G'' + G''' + \ldots}. \qquad (176)$$

Легко видѣть, что эта величина относится къ наименьшему значенію суммы квадратовъ погрѣшностей $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$, ... соотвѣтственно помноженныхъ на корни квадратные изъ вѣсовъ, или, иначе, что x выводится изъ уравненія

$$\frac{d}{dx}\left\{[\sqrt{G'}(x-x')]^2 + [\sqrt{G''}(x-x'')]^2 + [\sqrt{G'''}(x-x''')]^2 + \cdots\right\} = 0.$$

Правило, выражаемое формулою (176) имѣетъ примѣчательное сходство съ теоріею центра тяжести. Дѣйствительно, если примемъ вѣсы G', G'', G'''... опредѣленій x', x'', x'''.... за грузы, привѣшенные къ неопредѣленной прямой на разстояніяхъ x', x'', x'''.... отъ неподвижной точки, взятой на этой самой прямой, то разстояніе общаго центра тяжести всѣхъ этихъ грузовъ отъ неподвижной точки, изобразитъ наивыгоднѣйшее значеніе x опредѣляемаго элемента.

Анализъ, употребленный въ этой Главѣ для опредѣленія по наблюденіямъ наивыгоднѣйшаго значенія одной неизвѣстной, можетъ быть распространенъ и на произвольное число элементовъ. Во всякомъ случаѣ, наивыгоднѣйшій результатъ будетъ соотвѣтствовать тому предположенію, что сумма квадратовъ погрѣшностей наблюденій есть наименьшая. Въ N°N° 93 и 94 мы приведемъ формулы, относящіяся къ опредѣленію двухъ и трехъ элементовъ.

91. Всѣ формулы и результаты, выведенные въ предъидущихъ нумерахъ, относятся къ предположенію, весьма естественному, что вѣроятности погрѣшностей положительныхъ и отрицательныхъ, равныхъ между собою, одинаковы. Если бы случилось, что по свойству употребляемаго способа наблюденій, однѣ ошибки, напримѣръ положительныя, преобладали надъ отрицательными, или на-оборотъ, то найденныя выше формулы получили бы нѣкоторое измѣненіе; такое новое условіе можно ввести въ вычисленіе руководствуясь соображеніями и аналитическими пріёмами подобными тѣмъ, которые были употреблены въ этой Главѣ. Для дальнѣйшихъ же подробностей отсылаемъ читателей къ *Théorie analytique des probabilités* (n° 22), а также къ труду *Пуассона*, помѣщенному въ *Connaissance*

des temps за 1827 и 1832 годы подъ заглавіемъ: *Sur la probabilité des résultats moyens des observations.* Замѣтимъ только, что когда при наблюденіяхъ погрѣшности въ одну сторону имѣютъ перевѣсъ надъ погрѣшностями въ другую, или когда употребляемый способъ приводитъ къ *постоянной ошибкѣ*, то какъ бы велико не было число наблюденій, и какъ бы они точны не были, нельзя будетъ вообще приблизиться къ значенію опредѣляемаго элемента. Въ такомъ случаѣ, прежде всего должно стараться или уничтожить источники постоянныхъ ошибокъ, или, по крайней мѣрѣ, по возможности уменьшить ихъ вліяніе. Этой цѣли достигаютъ тщательною повѣркою и обсужденіемъ употребляемыхъ снарядовъ, а также разнообразя и самые способы наблюденій. Подробности объ этомъ предметѣ прямо относятся къ наукамъ наблюдательнымъ, и преимущественно къ Астрономіи.

92. Способъ наименьшихъ квадратовъ предложенъ *Лежандромъ*, но не какъ слѣдствіе математической теоріи вѣроятностей, а просто какъ пріёмъ удобный, избавляющій отъ всякой произвольности при употребленіи условныхъ уравненій, доставляемыхъ наблюденіями. *Лежандръ* напечаталъ изложеніе этого способа въ *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, avec un supplément, Paris*, 1806. Впрочемъ, справедливо замѣтить, что еще за нѣсколько лѣтъ до того времени, *Гауссъ* уже употреблялъ правило наименьшихъ квадратовъ, и даже сообщилъ его изустно многимъ астрономамъ. Въ послѣдствіи, онъ же, допустивъ начало ариометической средины, ни кѣмъ не доказанное, но принятое всѣми наблюдателями, показалъ связь его съ способомъ наименьшихъ квадратовъ.

Лапласъ доказалъ первый правило ариѳметической средины, и вмѣстѣ съ тѣмъ предложилъ полную теорію наивыгоднѣйшихъ выводовъ. Нынѣ формулы его служатъ основаніемъ для вычисленія и сравненія результатовъ наблюденій, и опытъ вполнѣ утвердилъ ихъ превосходство и необходимость. Послѣ Лапласа, многіе геометры занимались развитіемъ и примѣненіемъ созданной имъ теоріи къ астрономическимъ и геодезическимъ вычисленіямъ. Для читателей нашихъ, желающихъ ознакомиться съ главными трудами по этому предмету, мы приводимъ, кромѣ поименованныхъ уже въ этой Главѣ сочиненій, заглавія другихъ, болѣе или менѣе заслуживающихъ вниманіе: Гаусса: *Theoria motus corporum celestium.* — *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis;* помѣщено въ *Göttingens recentiones*, Vol. I 1808—11. — *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae;* Göttingen, 1823. Лежандра: *Mémoire sur la méthode des moindres carrés*, 1811. Энке: *Ueber die Methode der kleinsten Quadrate;* помѣщено въ *Berliner Astronomisches Jahrbuch* за 1834, 35 и 36 годы. Плана: *Mémoire sur divers problêmes de probabilité;* въ *Mémoires de l'Académie de Turin*, за 1811—12 го-

ды. Линденау и Боненбергера: въ *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften;* Томъ I стр. 185 и проч. Бесселя: *Fundamenta Astronomiae;* стр. 18, 116. — *Abhandlung über den Olbers'schen Cometen.* Reuschle: *Ueber die Deduction der Methode der kleinsten Quadrate aus Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung;* помѣщено въ *Journal für die Mathematik von Crelle;* Томъ XXVI, 1843 г. Прибавленіе къ этому Мемуару находится въ слѣдующемъ XXVII Томѣ, а отвѣтъ Энке въ XXVIII Томѣ того же изданія. Для численныхъ приложеній *способа наименьшихъ квадратовъ*, отсылаемъ читателей къ превосходной книгѣ Профессора *Савича: Приложеніе практической Астрономіи къ географическому опредѣленію мѣстъ*, 1845 г.*).

93. Анализъ, подобный тому, которымъ мы руководствовались для опредѣленія наивыгоднѣйшаго значенія одного элемента, распространенный на случай двухъ неизвѣстныхъ величинъ, приведетъ къ слѣдующимъ результатамъ:

Пусть будетъ s число наблюденій, а x и y величины довольно малыя (N° 85), которыя должны быть выведены наивыгоднѣйшимъ образомъ изъ условныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y-h_1 &= 0\\ a_2x+b_2y-h_2 &= 0\\ a_3x+b_3y-h_3 &= 0\\ &\dots\dots\\ a_sx+b_sy-h_s &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (177)$$

При какой ни есть системѣ величинъ для x и y, первыя части этихъ уравненій получать соотвѣтственно нѣкоторыя значенія $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\dots\varepsilon_s$, изображающія погрѣшности наблюденій. Наивыгоднѣйшая система для x и y будетъ та, которая обратитъ въ *minimum* сумму квадратовъ погрѣшностей $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_s^2$. Слѣдовательно

$$\frac{d}{dx}\Big[(a_1x+b_1y-h_1)^2+(a_2x+b_2y-h_2)^2+\ldots+(a_sx+b_sy-h_s)^2\Big]=0 \qquad (178)$$

$$\frac{d}{dy}\Big[(a_1x+b_1y-h_1)^2+(a_2x+b_2y-h_2)^2+\ldots+(a_sx+b_sy-h_s)^2\Big]=0, \qquad (179)$$

откуда, удержавъ знакоположенія N° 85,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{S(b_s^2).S(a_sh_s)-S(a_sb_s).S(b_sh_s)}{S(a_s^2).S(b_s^2)-[S(a_sb_s)]^2}\\ y &= \frac{S(a_s^2).S(b_sh_s)-S(a_sb_s).S(a_sh_s)}{S(a_s^2).S(b_s^2)-[S(a_sb_s)]^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (180)$$

Среднія нормальныя погрѣшности элементовъ будутъ (N° 87):

*) Этому сочиненію присуждена, въ 1846 году, полная Демидовская премія.

$$\left.\begin{aligned} \text{Для } x\ldots\ldots &\mp\frac{\sqrt{\frac{S(\varepsilon_s^2)}{2\pi s}}\cdot\sqrt{S(b_s^2)}}{\sqrt{S(a_s^2).S(b_s^2)-[S(a_sb_s)]^2}}\\ \text{Для } y\ldots\ldots &\mp\frac{\sqrt{\frac{S(\varepsilon_s^2)}{2\pi s}}\cdot\sqrt{S(a_s^2)}}{\sqrt{S(a_s^2).S(b_s^2)-[S(a_sb_s)]^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (181)$$

Изъ этихъ двухъ выраженій усматриваемъ, что элементъ x опредѣлится точнѣе элемента y, когда $S(b_s^2)<S(a_s^2)$, и, напротивъ того, съ меньшею точностію, когда $S(b_s^2)>S(a_s^2)$.

Вѣсы опредѣленій (180) будутъ соотвѣтственно:

$$\left.\begin{aligned} \text{Для } x\ldots\ldots G &= \frac{s}{2S(\varepsilon_s^2)}\cdot\frac{S(a_s^2).S(b_s^2)-[S(a_sb_s)]^2}{S(b_s^2)}\\ \text{Для } y\ldots\ldots G' &= \frac{s}{2S(\varepsilon_s^2)}\cdot\frac{S(a_s^2).S(b_s^2)-[S(a_sb_s)]^2}{S(a_s^2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (182)$$

Не должно терять изъ виду, что выраженіе $S(\varepsilon_s^2)$, входящее въ формулы (181) и (182), изображаетъ сумму $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_s^2$ квадратовъ погрѣшностей, которыя получатся, когда въ уравненіе (177) подставимъ на мѣсто x и y наивыгоднѣйшія ихъ величины (180). И такъ

$$S(\varepsilon_s^2)=(a_1x+b_1y-h_1)^2+(a_2x+b_2y-h_2)^2+\ldots+(a_sx+b_sy-h_s)^2, \qquad (183)$$

гдѣ x и y опредѣлены формулами (180).

Вѣроятныя погрѣшности опредѣленій (180), въ силу N° 89, будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \text{Для } x\ldots\ldots &\mp\frac{0.4769363}{\sqrt{G}}\\ \text{Для } y\ldots\ldots &\mp\frac{0.4769363}{\sqrt{G'}}, \end{aligned}\right\} \qquad (184)$$

гдѣ G и G' означаютъ, какъ и выше, вѣсы опредѣленій (180), и вычисляются по формулѣ (182).

Наконецъ, вѣроятности, что ошибки опредѣленій (180) заключаются между предѣлами $\mp u$, будутъ:

$$\text{Для } x\ldots\ldots\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{\pi}}\int_{-u}^{+u}e^{-Gu^2}du$$

$$\text{Для } y\ldots\ldots\frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{\pi}}\int_{-u}^{+u}e^{-G'u^2}du.$$

Положивъ $u=\frac{r}{\sqrt{G}}$, найдется для вѣроятности, что истинная величина элемента x заключается между предѣлами $x\mp\frac{r}{\sqrt{G}}$, слѣдующее выраженіе:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2}dr. \qquad (185)$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ для вѣроятности, что истинная величина элемента y заключается между предѣлами $y \mp \frac{r}{\sqrt{G'}}$, то̀ же значеніе

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2} dr. \tag{186}$$

Само собой разумѣется, что величины x и y, въ выраженіяхъ $x \mp \frac{r}{\sqrt{G}}$ и $y \mp \frac{r}{\sqrt{G'}}$, опредѣлены формулами (180).

94. При трехъ неизвѣстныхъ элементахъ, опредѣляемыхъ изъ совокупности s условныхъ уравненій

$$\begin{aligned}
a_1x+b_1y+c_1z-h_1 &= 0\\
a_2x+b_2y+c_2z-h_2 &= 0\\
a_3x+b_3y+c_3z-h_3 &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
a_sx+b_sy+c_sz-h_s &= 0,
\end{aligned}$$

составятся, по способу наименьшихъ квадратовъ, слѣдующія три окончательныя уравненія:

$$\begin{aligned}
S(a_s^2).x+S(a_sb_s).y+S(a_sc_s).z-S(a_sh_s) &= 0\\
S(a_sb_s).x+S(b_s^2).y+S(b_sc_s).z-S(b_sh_s) &= 0\\
S(a_sc_s).x+S(b_sc_s).y+S(c_s^2).z-S(c_sh_s) &= 0.
\end{aligned}$$

Рѣшеніе этихъ уравненій приведетъ непосредственно къ наивыгоднѣйшимъ величинамъ для x, y и z.

Средняя нормальная погрѣшность элемента x будетъ:

$$\mp \frac{\sqrt{\frac{S(\varepsilon_s^2)}{2\pi s}}.\sqrt{T}}{\sqrt{U}},$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
T &= S(b_s^2).S(c_s^2)-[S(b_sc_s)]^2\\
U &= S(a_s^2).S(b_s^2).S(c_s^2)-S(a_s^2).[S(b_sc_s)]^2-S(b_s^2).[S(a_sc_s)]^2\\
&\quad -S(c_s^2).[S(a_sb_s)]^2+2S(a_sb_s).S(a_sc_s).S(b_sc_s).
\end{aligned}$$

Если, въ этихъ выраженіяхъ, перемѣнимъ вездѣ a_s на b_s, и на-оборотъ, b_s на a_s, то получимъ среднюю нормальную погрѣшность элемента y. Измѣняя же a_s въ c_s, а c_s въ a_s, найдемъ среднюю нормальную погрѣшность опредѣленія z.

Вѣсъ G опредѣленія перваго элемента x выразится формулою

$$G = \frac{s}{2S(\varepsilon_s^2)}.\frac{T}{U},$$

гдѣ U и T имѣютъ прежнія значенія. Относительные вѣсы величинъ y и z получатся изъ этой же самой формулы; измѣнивъ въ ней a_s въ b_s, и на-оборотъ, получится вѣсъ элемента y; измѣнивъ a_s въ c_s, и на-оборотъ, найдется вѣсъ третьяго элемента z.

Читатели, желающіе ближе ознакомиться со всѣми аналитическими пріёмами, относящимися къ теоріи наивыгоднѣйшаго способа при нѣсколькихъ элементахъ, могутъ обратиться къ 1-ому Прибавленію, помѣщенному въ третьемъ изданіи книги Лапласа: *Théorie analytique des Probabilités.* Тамъ они найдутъ обстоятельный разборъ условныхъ уравненій съ шестью элементами. Также, въ трудѣ Энке, упомянутомъ въ № 92, рѣшеніе этого вопроса, въ практическомъ отношеніи, изложено съ надлежащими подробностями.

95. Въ № 89 мы объяснили значеніе *вѣроятной погрѣшности вывода*, введенной въ вычисленіе наблюденій Нѣмецкими астрономами. Приведемъ еще понятіе объ *средней погрѣшности* особаго рода, разсматриваніе которой было предложено *Гауссомъ* и нашимъ знаменитымъ астрономомъ *Струве*. Для бо̀льшей ясности ограничимся прямыми наблюденіями надъ однимъ элементомъ, и положимъ, напримѣръ, что для этого элемента, который изобразимъ чрезъ x, нашли s величинъ

$$x = h_1, \quad x = h_2, \quad x = h_3, \ldots x = h_s. \tag{187}$$

При значительномъ числѣ s наблюденій, наивыгоднѣйшая величина для x будетъ средняя ариѳметическая; слѣдовательно, означивъ её чрезъ x_0, получимъ

$$x_0 = \frac{h_1+h_2+h_3+\ldots+h_s}{s} = \frac{S(h_s)}{s}.$$

На такомъ основаніи пусть будутъ

$$x_0-h_1 = \varepsilon_1, \quad x_0-h_2 = \varepsilon_2, \quad x_0-h_3 = \varepsilon_3, \ldots x_0-h_s = \varepsilon_s$$

погрѣшности, соотвѣтствующія уравненіямъ (187) при $x = x_0$. Если бы x_0 изображалъ истинную величину элемента x, то ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots \varepsilon_s$ были бы истинными погрѣшностями наблюденій; но какъ x_0 есть только величина приближенная, то предположивъ $x = x_0+\Delta x_0$, истинныя погрѣшности будутъ:

$$x_0+\Delta x_0-h_1, \quad x_0+\Delta x_0-h_2, \ldots x_0+\Delta x_0-h_s.$$

Означивъ ихъ чрезъ δ_1, $\delta_2, \ldots \delta_s$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1 &= x_0-h_1+\Delta x_0 = \varepsilon_1+\Delta x_0\\
\delta_2 &= x_0-h_2+\Delta x_0 = \varepsilon_2+\Delta x_0\\
\delta_3 &= x_0-h_3+\Delta x_0 = \varepsilon_3+\Delta x_0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta_s &= x_0-h_s+\Delta x_0 = \varepsilon_s+\Delta x_0.
\end{aligned}\right\} \tag{188}$$

Среднею погрѣшностію, о которой мы сей-часъ упомянули, называютъ величину, получаемую, когда изъ суммы квадратовъ истинныхъ погрѣшностей $\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\ldots+\delta_s^2$, раздѣленной на число s наблюденій, извлекутъ квадратный корень. Пусть будетъ ω эта средняя погрѣшность. Въ силу сдѣланнаго сей-часъ опредѣленія, будетъ

$$\omega=\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\ldots+\delta_s^2}{s}}=\sqrt{\frac{S(\delta_s^2)}{s}},\quad \text{или}\quad s.\omega^2=S(\delta_s^2).$$

Для опредѣленія величины ω по приближенію, беремъ сумму квадратовъ уравненій (188). Наблюдая что $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_s=0$, получимъ просто

$$S(\delta_s^2)=S(\varepsilon_s^2)+s.\Delta x_0^2. \tag{189}$$

Придаточный членъ $s.\Delta x_0^2$ ясно показываетъ, что сумма квадратовъ $S(\delta_s^2)$ истинныхъ погрѣшностей наблюденій, будетъ всегда болѣе суммы $S(\varepsilon_s^2)$, которая дѣйствительно, по употребленному способу наименьшихъ квадратовъ, есть наименьшая.

Теперь, чтобы по возможности приблизиться къ истинѣ, должно искать приближенную величину для $s.\Delta x_0^2$. Для этого, можно употребить предложеніе, доказанное въ N° 89, въ слѣдствіе котораго погрѣшности содержатся между собою въ обратномъ отношеніи корней квадратныхъ изъ соотвѣтствующихъ имъ вѣсовъ. Основываясь на этомъ, положимъ сперва, что разсматривается отдѣльно которое нибудь изъ s наблюденій (187), напримѣръ первое, доставившее $x=h_1$. Не зная напередъ величины квадрата погрѣшности этого опредѣленія, естественно положить, что онъ равенъ ω^2, то есть квадрату средней ошибки. Слѣдовательно, вѣсъ величины $x=h_1$, который означимъ чрезъ G_1, въ силу формулы (174), будетъ

$$G_1=\frac{1}{2\omega^2}.$$

Если же станемъ разсматривать всѣ наблюденія (187), и выведемъ изъ нихъ величину $x=x_0$, то вѣсъ величины $x_0+\Delta x_0$ получится изъ формулы (174), когда подставимъ въ неё s на мѣсто $S(a_s^2)$ и $S(\delta_s^2)$ на мѣсто $S(\varepsilon_s^2)$. Изобразивъ этотъ вѣсъ чрезъ G_s, найдемъ

$$G_s=\frac{s.s}{2S(\delta_s^2)}.$$

И такъ, погрѣшностямъ ω и Δx_0 будутъ соотвѣтствовать вѣсы G_1 и G_s, а слѣдовательно

$$\omega:\Delta x_0=\frac{1}{\sqrt{G_1}}:\frac{1}{\sqrt{G_s}};$$

отсюда

$$\Delta x_0=\omega\sqrt{\frac{G_1}{G_s}}=\frac{\sqrt{S(\delta_s^2)}}{s},$$

или

$$s.\Delta x_0^2=\frac{S(\delta_s^2)}{s};$$

но $S(\delta_s^2)=s.\omega^2$, почему $s.\Delta x_0^2=\omega^2$. Поставивъ эту величину въ формулу (189), получимъ

$$S(\delta_s^2)=S(\varepsilon_s^2)+\omega^2,\quad \text{или}\quad s.\omega^2=S(\varepsilon_s^2)+\omega^2,$$

и наконецъ

$$\omega=\sqrt{\frac{S(\varepsilon_s^2)}{s-1}}. \tag{190}$$

Эта формула показываетъ, что для опредѣленія съ возможнымъ приближеніемъ средней погрѣшности наблюденій, при одномъ неизвѣстномъ элементѣ, должно раздѣлить сумму квадратовъ погрѣшностей не на ихъ число s, а на $s-1$, и потомъ изъ частнаго извлечь квадратный корень. Очевидно впрочемъ, что при весьма значительномъ числѣ s наблюденій, средняя погрѣшность (190) будетъ почти равнозначаща съ погрѣшностію $\sqrt{\frac{S(\varepsilon_s^2)}{s}}$, которую получаемъ руководствуясь обыкновеннымъ понятіемъ о среднихъ величинахъ.

При какомъ ни есть числѣ n опредѣляемыхъ элементовъ, средняя погрѣшность, въ приведенномъ сей-часъ смыслѣ, опредѣлится формулою

$$\sqrt{\frac{S(\varepsilon_s^2)}{s-n}}. \tag{191}$$

Аналитическое доказательство этой формулы, предлагаемое Нѣмецкими математиками, читатели найдутъ въ концѣ продолженія статьи Энке: *Ueber die Methode der kleinsten Quadrate*, помѣщенной въ *Berliner Astronomisches Jahrbuch* за 1835-й годъ. Въ томъ же изданіи, за 1834-й годъ, Энке старался оправдать это самое правило нѣкоторыми соображеніями, не требующими пособія аналитическихъ формулъ. Приведемъ его сужденія, не входя впрочемъ въ разборъ степени ихъ строгости. Положимъ сперва, что n наблюденій привели къ n разнозначащимъ уравненіямъ между n неизвѣстными величинами. Въ такомъ случаѣ, чрезъ рѣшеніе этихъ уравненій, получится одна, совершенно опредѣленная система значеній для искомыхъ элементовъ, а мѣра неточности ихъ останется для насъ неизвѣстною, потому что кромѣ упоминаемыхъ n наблюденій, нѣтъ другихъ, которыя могли бы послужить для уточненія найденныхъ величинъ. Можно замѣтить мимоходомъ, что это послѣднее обстоятельство обнаруживается формулою (191); въ самомъ дѣлѣ, въ настоящемъ предположеніи будетъ $s=n$, $S(\varepsilon_s^2)=0$, почему выраженіе (191) приметъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, какъ и должно быть по причинѣ совершенной неизвѣстности, въ которой мы находимся на счётъ величины средней погрѣшности. Вообразимъ теперь, что къ прежнимъ n наблюденіямъ, прибавилось еще $s-n$ новыхъ, такъ что полное число условныхъ уравненій будетъ s при прежнихъ n неизвѣстныхъ. Если возьмемъ по произволу

n изъ этихъ уравненій, то выведемъ изъ нихъ значенія неизвѣстныхъ элементовъ; остальныя же $s-n$ уравненій, для этой самой системы, не удовлетворятся, и численная величина первыхъ ихъ частей послужитъ мѣрою уклоненія соотвѣтствующихъ наблюденій. И такъ, разсматривая s наблюденій, и предполагая что относящіяся къ нимъ n неизвѣстныхъ опредѣлены посредствомъ n наблюденій, взятыхъ по произволу изъ всѣхъ произведенныхъ s, число уклоненій или погрѣшностей изобразится разностію $s-n$. Если же, вмѣсто того чтобы принимать, для опредѣленія элементовъ, n уравненій изъ числа s, мы, сообразно съ *способомъ наименьшихъ квадратовъ*, употребимъ всѣ s уравненія, то элементы опредѣлятся чрезъ это съ бо̀льшею точностію, и хотя вообще ни одно изъ условныхъ уравненій не удовлетворится при новой, наивыгоднѣйшей системѣ, по тѣмъ не менѣе число ошибокъ, которыя должно принимать въ расчётъ, останется, какъ и прежде, $s-n$, ибо, изъ совокупности s уравненій, во всякомъ случаѣ слѣдуетъ отнять n условій, какія бы они впрочемъ ни были, для опредѣленія n элементовъ. И такъ, опредѣляя квадратъ средней погрѣшности наблюденій, должно будетъ раздѣлить сумму $S(\varepsilon_s^2)$ не на s, а на $s-n$, когда предложенныя s условныхъ уравненій заключаютъ въ себѣ n неизвѣстныхъ величинъ.

96. Въ заключеніе этой Главы приведемъ численный примѣръ, который заимствуемъ изъ *Théorie analytique des Probabilités* (premier supplément, стр. 23). Лапласъ, воспользовавшись обширнымъ трудомъ Бувара надъ движеніями Юпитера и Сатурна, приложилъ къ его вычисленіямъ формулы Анализа Вѣроятностей. Изъ 129 условныхъ уравненій между шестью элементами, Буваръ вывелъ, по способу наименьшихъ квадратовъ, шесть окончательныхъ уравненій. Лапласъ, чрезъ послѣдовательное исключеніе четырехъ элементовъ изъ этихъ шести уравненій, нашелъ слѣдующія два:

$$48442.x+48020.y-4172{,}95=0$$
$$48020.x+57725227.y+171455{,}2=0,$$

въ которыхъ $\frac{1+x}{19504}$ и $\frac{1+y}{1067{,}09}$ изображаютъ соотвѣтственно массы Урана и Юпитера, принимая массу солнца за единицу.

Изъ этихъ уравненій выводимъ

$$x=0{,}08916, \quad y=-0{,}00305.$$

Слѣдовательно

$$\text{Масса Урана} = \frac{1{,}08916}{19504} = \frac{1}{17907}$$
$$\text{Масса Юпитера} = \frac{1-0{,}00305}{1067{,}09} = \frac{1}{1070{,}35}.$$

Далѣе, число наблюденій $s=129$, и, по Бувару, $S(\varepsilon_s^2)=31096$. Сверхъ того, принявъ въ соображеніе, что изъ приведенныхъ сей-часъ двухъ окончательныхъ уравненій, первое соотвѣтствуетъ уравненію (178), а второе, (179), получимъ:

$$S(a_s^2)=48442, \quad S(b_s^2)=57725227, \quad S(a_sb_s)=48020,$$
$$S(a_sh_s)=4172{,}95, \quad S(b_sh_s)=-171455{,}2.$$

На основаніи этихъ данныхъ, изъ формулы (182) найдется:

Вѣсъ опредѣленія $x=G$, $\quad \text{Log}.G=2{,}0013595$,
откуда, въ цѣлыхъ числахъ, $G=100$.
Вѣсъ опредѣленія $y=G'$, $\quad \text{Log}.G'=5{,}0778624$,
откуда, въ цѣлыхъ числахъ, $G'=119636$.

Обративъ вниманіе на относительныя величины вѣсовъ G и G', заключаемъ (N° 89), что величина элемента y опредѣлена съ точностію несравненно бо̀льшею, чѣмъ величина элемента x, ибо вѣсъ G' гораздо больше вѣса G.

Для опредѣленія *средней нормальной погрѣшности* опредѣленій x и y, можемъ употребить формулы (181). Но если воспользуемся уже найденными вѣсами G и G', то эти самыя формулы (181), въ силу уравненія (182), примутъ простѣйшій видъ, и соотвѣтственно обратятся въ слѣдующія выраженія:

$$\mp\frac{1}{2\sqrt{\pi G}}, \quad \mp\frac{1}{2\sqrt{\pi G'}}.$$

На такомъ основаніи, получимъ среднія нормальныя погрѣшности, именно:

$$\text{Для } x\ldots\ldots\mp\frac{1}{2\sqrt{\pi G}}=\mp 0{,}02817$$
$$\text{Для } y\ldots\ldots\mp\frac{1}{2\sqrt{\pi G'}}=\mp 0{,}0008156.$$

Вѣроятныя погрѣшности найденныхъ значеній двухъ элементовъ, будутъ [формула (184)]:

$$\text{Для } x\ldots\ldots\mp\frac{0{,}476936}{\sqrt{G}}=\mp 0{,}04762$$
$$\text{Для } y\ldots\ldots\mp\frac{0{,}476936}{\sqrt{G'}}=\mp 0{,}0013789.$$

Сравненіе чиселъ, полученныхъ для средней нормальной погрѣшности и для вѣроятной ошибки величинъ x и y, очевиднымъ образомъ обнаруживаетъ, что второй изъ этихъ двухъ элементовъ опредѣленъ съ точностію, несравненно бо̀льшею чѣмъ первый, какъ было уже замѣчено и выше, при сравненіи вѣсовъ G и G'.

Вычислимъ еще величину вѣроятности, что погрѣшность одной изъ двухъ найденныхъ массъ заключается между данными предѣлами. Такъ какъ выведенная величина для массы

Юпитера гораздо точнѣе чѣмъ для Урана, то возьмемъ её для примѣра. Положимъ, желаемъ найти вѣроятность, что истинная масса Юпитера разнится отъ найденной $\frac{1}{1070,35}$ не болѣе какъ на $\frac{1}{100}$ этой самой дроби; или, иначе, что предѣлы погрѣшности ея опредѣленія $\frac{1}{1070,35}$, будутъ:

$$\mp\frac{1}{100}.\frac{1}{1070,35}.$$

Для удобности вычисленія, вмѣсто этихъ предѣловъ, мы примемъ дробь

$$\mp\frac{1}{100}.\frac{1}{1067,09},$$

весьма мало разнствующую отъ предъидущей. При такомъ условіи, вспомнивъ, что масса Юпитера равна $\frac{1+y}{1067,09}$, усмотримъ, что предѣлы относительно величины y будутъ $\mp\frac{1}{100}$; дѣйствительно, замѣнивъ y выраженіемъ $-0,00305\mp\frac{1}{100}$, получимъ для массы Юпитера предѣлы

$$\frac{1}{1070,35}\mp\frac{1}{100}.\frac{1}{1067,09},$$

какъ принято выше. И такъ, сообразно съ сказаннымъ въ концѣ N° 93, должно будетъ положить

$$\frac{r}{\sqrt{G'}}=\frac{1}{100},$$

откуда

$$\text{Log}.r=\tfrac{1}{2}\text{Log}.G'-2=\tfrac{1}{2}(5,0778624)-2=0,5389312,$$

и наконецъ

$$r=3,4589\ldots.$$

Формула (186) опредѣлитъ теперь искомую вѣроятность. Изобразивъ её чрезъ p, получимъ

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2}dr=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_r^\infty e^{-r^2}dr.$$

Такъ какъ таблица интеграла

$$\int_T^\infty e^{-t^2}dt,$$

помѣщенная въ концѣ этой книги, простирается только до $T=3$, а найденное нами значеніе предѣла $r>3$, то должно прибѣгнуть къ непосредственному опредѣленію искомаго интеграла по приближенію. Формула (29) [N° 23] очень удобна для этого, и въ силу ея получимъ:

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2}dr=1-\frac{e^{-r^2}}{r\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2r^2}+\cdots\right).$$

Подставивъ на мѣсто r величину 3,4589..., найдемъ

$$p=1-0,000001\ldots,$$

или, очень приблизительно,

$$p=\frac{1000000}{1000001}.$$

Это значеніе вѣроятности p показываетъ, что можно держать закладъ почти *милліонъ противъ одного*, что истинная масса Юпитера отличается отъ найденной $\frac{1}{1070,35}$ не болѣе какъ на *одну сотую* этой самой величины. По поводу этого вывода, Поассонъ, въ своемъ сочиненіи: *Recherches sur la probabilité des Jugements*, (стр. 316), замѣчаетъ, что по новѣйшимъ наблюденіямъ и вычисленіямъ *Энке*, *Гаусса*, *Николая* и *Эйри* (Airy), масса Юпитера найдена равною $\frac{1}{1050}$, и что этотъ результатъ, по точности своей, заслуживаетъ полнаго довѣрія. Съ другой же стороны, опредѣленіе $\frac{1}{1050}$ разнится отъ $\frac{1}{1070,35}$, найденнаго Лапласомъ, почти $\frac{1}{50}$ долею своей величины; слѣдовательно, погрѣшность опредѣленія $\frac{1}{1070,35}$ можетъ доходить приблизительно до $\frac{1}{50}$ этой дроби. Какимъ же образомъ вычисленіе привело Лапласа къ заключенію, что найденная имъ масса Юпитера, съ вѣроятностію весьма близкою къ достовѣрности, именно $\frac{1000000}{1000001}$, не можетъ допустить погрѣшности, превосходящей $\frac{1}{100}$ доли? Вотъ противорѣчіе, которое, съ перваго взгляда, могло бы привести къ недоумѣнію на счётъ безошибочности теоріи наивыгоднѣйшихъ результатовъ. Однако жъ справедливость формулъ, употребленныхъ Лапласомъ, не подвержена ни малѣйшему сомнѣнію. Слѣдовательно, противорѣчіе проистекаетъ изъ другаго источника. Поассонъ полагаетъ, что опредѣленіе массы Юпитера, по Лапласу, оказалось нѣсколько меньше истинной величины по причинѣ погрѣшностей, вкравшихся въ нѣкоторые члены, весьма сложные, зависящіе отъ возмущеній этой планеты. Подозрѣваемыя погрѣшности отчасти уже исправлены, и, вѣроятно, въ послѣдствіи найдутся еще и другія.

ГЛАВА XI.

ПРИЛОЖЕНІЕ АНАЛИЗА ВѢРОЯТНОСТЕЙ КЪ СВИДѢТЕЛЬСТВАМЪ, ПРЕДАНІЯМЪ, РАЗЛИЧНАГО РОДА ВЫБОРАМЪ МЕЖДУ КАНДИДАТАМИ И МНѢНІЯМИ, И КЪ СУДЕЙСКИМЪ ОПРЕДѢЛЕНІЯМЪ ПО БОЛЬШИНСТВУ ГОЛОСОВЪ.

97. Рѣшеніе многихъ важныхъ вопросовъ, относящихся не только къ пользамъ отдѣльныхъ лицъ, но и къ благоустройству цѣлыхъ обществъ, зависитъ отъ мѣры правдивости, какой можно ожидать отъ свидѣтельства или отъ приговора людей, облеченныхъ общественнымъ довѣріемъ. Равнымъ образомъ, цѣлыя отрасли нашихъ знаній, и въ особенности Исторія и Хронологія, основаны почти безусловно на преданіяхъ и на свидѣтельствахъ разнаго рода. При такомъ важномъ значеніи упоминаемыхъ способовъ для открытія истины, философы не могли не обратить на нихъ особеннаго вниманія. Съ своей стороны и математики пытались подчинить свидѣтельства, въ разныхъ его видахъ, Анализу Вѣроятностей.

Не смотря на всѣ остроумныя и глубокія изслѣдованія, основанныя какъ на наблюденіяхъ надъ нравственною стороною человѣка, такъ и на умозрѣніи, вопросъ о правдоподобіи свидѣтельствъ вообще, останется навсегда нерѣшеннымъ. И въ самомъ дѣлѣ, при безконечныхъ оттѣнкахъ сердца человѣческаго, страстей, тайныхъ побужденій, можно ли разгадать его вполнѣ, и потомъ оцѣнить съ точностію мѣру довѣрія къ свидѣтельству? Да и къ тому жъ, самое разнообразіе обстоятельствъ, сопровождающихъ обыкновенно событіе, по поводу котораго прибѣгаемъ къ свидѣтельствамъ, не послужитъ ли часто препятствіемъ къ совершенному познанію истины?

Подвергая вѣроятности свидѣтельствъ математическому анализу, мы, по необходимости,

должны упустить изъ виду множество отношеній, тѣсно связанныхъ съ разбираемымъ фактомъ, но которыхъ, какъ было сей-часъ замѣчено, не имѣемъ никакой возможности опредѣлить. И такъ, этого рода нравственные вопросы рѣшаются только по приближенію, подобно тому какъ и бо́льшая часть вопросовъ изъ Естественной Философіи; различіе состоитъ только въ томъ, что вліяніе естественныхъ причинъ, не принимаемыхъ въ расчётъ, вообще бываетъ менѣе значительно, чѣмъ вліяніе причинъ нравственныхъ, оцѣнка которыхъ еще недоступнѣе для насъ. Поэтому, всѣ изслѣдованія и результаты, которые будутъ предложены въ этой Главѣ, не должны быть принимаемы за строгія рѣшенія, а только за *приближенія* къ истинѣ, приносящія впрочемъ неоспоримую пользу; и дѣйствительно, мы уже не разъ имѣли случай удостовѣриться, что пособіе математическаго анализа много способствуетъ здравому сужденію къ выводу заключеній, близкихъ къ истинѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ важныхъ по своимъ примѣненіямъ къ общественной жизни. Начнемъ съ вѣроятности обыкновенныхъ свидѣтельствъ.

98. Положимъ, что допрашиваютъ двухъ свидѣтелей A и B объ событіи, представляющемъ только два возможные случая, именно: оно было, или не было. Въ такомъ предположеніи, показаніе того или другаго свидѣтеля ограничится *утвержденіемъ* или *отрицаніемъ*. Если допустимъ теперь, что изъ m показаній свидѣтеля A, бываетъ n вѣрныхъ, и слѣдовательно $m-n$ ложныхъ или ошибочныхъ, то ясно, что дробь $\frac{n}{m}$ изобразитъ вѣроятность правдивости показанія, а $\frac{m-n}{m}=1-\frac{n}{m}$ вѣроятность его ошибочности. Изобразивъ чрезъ m' и n' подобныя числа въ разсужденіи втораго свидѣтеля B, найдемъ вѣроятность $\frac{n'}{m'}$ для правдивости, а $\frac{m'-n'}{m'}=1-\frac{n'}{m'}$ для ложности его показанія. Слѣдовательно, до допроса двухъ свидѣтелей, дробь $\frac{nn'}{mm'}$ изобразитъ сложную вѣроятность (N° 3), что они скажутъ правду, а $\frac{(m-n)(m'-n')}{mm'}$, что показаніе обоихъ будетъ ложное. Подобнымъ образомъ дробь $\frac{n(m'-n')}{mm'}$ изобразитъ вѣроятность, что свидѣтель A скажетъ правду, а B неправду, а дробь $\frac{(m-n)n'}{mm'}$ вѣроятность противнаго, именно, что показаніе свидѣтеля A будетъ ложное, а свидѣтеля B справедливое.

Посмотримъ теперь, что́ случится послѣ допроса. Если показанія двухъ свидѣтелей согласны, то они, или оба говорятъ правду, или оба ошибаются, предполагая покамѣстъ, что ошибка можетъ быть безразлично умышленная или неумышленная. Чтобы найти вѣроятность справедливости показанія при согласномъ свидѣтельствѣ, можно разсуждать слѣдующимъ образомъ: или свидѣтели говорятъ оба правду, или они оба ошибаются;

вѣроятность перваго предположенія, до допроса, вычисленная *a priori*, равна $\frac{nn'}{mm'}$, какъ показано выше; вѣроятность втораго предположенія изобразится произведеніемъ $\frac{(m-n)(m'-n')}{mm'}$. Слѣдовательно, полная вѣроятность согласнаго показанія будетъ (N° 2) $\frac{nn'}{mm'}+\frac{(m-n)(m'-n')}{mm'}$. Если раздѣлимъ дробь $\frac{nn'}{mm'}$ на предъидущую сумму, то въ силу N° 52 получимъ для искомой вѣроятности, что показаніе свидѣтелей справедливо, выраженіе

$$\frac{\frac{nn'}{mm'}}{\frac{nn'}{mm'}+\frac{(m-n)(m'-n')}{mm'}}=\frac{nn'}{nn'+(m-n)(m'-n')}. \qquad (192)$$

Совершенно подобнымъ образомъ увидимъ, что дробь

$$\frac{\frac{(m-n)(m'-n')}{mm'}}{\frac{nn'}{mm'}+\frac{(m-n)(m'-n')}{mm'}}=\frac{(m-n)(m'-n')}{nn'+(m-n)(m'-n')} \qquad (193)$$

изображаетъ вѣроятность ложности показанія двухъ свидѣтелей.

Формулу (192) можно доказать и непосредственно. Дѣйствительно, для этого стоитъ только найти число случаевъ, въ которыхъ согласное показаніе двухъ свидѣтелей будетъ справедливо, и раздѣлить потомъ это число на совокупность всѣхъ статочностей, приводящихъ къ согласному показанію. Если примемъ произведеніе mm' знаменателей двухъ дробей $\frac{n}{m}$ и $\frac{n'}{m'}$ за число дѣлъ, по которымъ допрашиваютъ двухъ свидѣтелей A и B, то очевидно nn' изобразитъ число случаевъ, въ которыхъ согласное ихъ показаніе будетъ справедливо, а $(m-n)(m'-n')$ число согласныхъ же показаній, но ложныхъ. Слѣдовательно, совокупность согласныхъ свидѣтельствъ, какъ вѣрныхъ такъ и несправедливыхъ, будетъ $nn'+(m-n)(m'-n')$, а поэтому отношеніе $\frac{nn'}{nn'+(m-n)(m'-n')}$ изобразитъ искомую вѣроятность. Вѣроятность ложности согласнаго показанія, послѣ допроса, опредѣлится отношеніемъ $(m-n)(m'-n')$ къ полному же числу согласныхъ показаній, и поэтому будетъ $\frac{(m-n)(m'-n')}{nn'+(m-n)(m'-n')}$.

Когда показанія свидѣтелей противорѣчивы, то получимъ дроби

$$\frac{n(m'-n')}{n(m'-n')+n'(m-n)} \quad \text{и} \quad \frac{n'(m-n)}{n(m'-n')+n'(m-n)},$$

изъ которыхъ первая изображаетъ вѣроятность, что A сказалъ правду, а B ошибся, вторая же, что A ошибся, а B сказалъ правду. Въ справедливости этихъ формулъ легко удостовѣриться, разсуждая какъ выше. Въ самомъ дѣлѣ, принявъ для ясности число дѣлъ

равнымъ mm', увидимъ, что произведеніе $n(m'-n')$ изобразитъ число случаевъ, въ которыхъ, при разногласіи свидѣтелей, A скажетъ правду, а B ошибется; произведеніе же $n'(m-n)$ будетъ равно числу случаевъ, въ которыхъ, напротивъ того, A ошибется, а B скажетъ правду. Полное число статочностей, приводящихъ къ противорѣчію въ показаніяхъ, равняется суммѣ $n(m'-n')+n'(m-n)$, а отношенія произведеній $n(m'-n')$ и $n'(m-n)$ къ этой самой суммѣ очевидно изобразятъ искомыя двѣ вѣроятности. Замѣтимъ также мимоходомъ, что совокупность случаевъ согласныхъ и противорѣчивыхъ показаній должна равняться полному числу статочностей mm'. Дѣйствительно найдется

$$nn'+(m-n)(m'-n')+n(m'-n')+n'(m-n)=mm'.$$

Если будетъ три свидѣтеля A, B и C, и означимъ чрезъ $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m'}$ и $\frac{n''}{m''}$ соотвѣтствующія имъ правдивости, то, при согласномъ показаніи, дробь

$$\frac{nn'n''}{nn'n''+(m-n)(m'-n')(m''-n'')}$$

изобразитъ вѣроятность справедливости единогласнаго свидѣтельства послѣ допроса; напротивъ того, выраженіе

$$\frac{(m-n)(m'-n')(m''-n'')}{nn'n''+(m-n)(m'-n')(m''-n'')}$$

опредѣлитъ вѣроятность, что показаніе трехъ свидѣтелей ложно.

Когда свидѣтель A утверждаетъ фактъ, а B и C отрицаютъ его, то вѣроятность справедливости показанія A изобразится дробью

$$\frac{n(m'-n')(m''-n'')}{n(m'-n')(m''-n'')+n'n''(m-n)};$$

вѣроятность противнаго, именно что B и C утверждаютъ истину, а A ошибается, будетъ

$$\frac{n'n''(m-n)}{n(m'-n')(m''-n'')+n'n''(m-n)}.$$

99. Легко распространить послѣдніе результаты на какое ни есть число свидѣтелей. Не останавливаясь на выводѣ общихъ формулъ при различной правдивости, разсмотримъ въ частности тó предположеніе, когда число свидѣтелей произвольное, а правдивость, или вѣроятность справедливости показанія, одинакова для всѣхъ.

На такомъ основаніи, если въ предъидущихъ формулахъ примемъ $n=n'=n''$ и $m=m'=m''$, то найдемъ дроби

$$\frac{n^3}{n^3+(m-n)^3} \quad \text{и} \quad \frac{(m-n)^3}{n^3+(m-n)^3},$$

соотвѣтственно изображающія вѣроятности справедливаго и ошибочнаго свидѣтельства при согласномъ показаніи. Когда одинъ свидѣтель утверждаетъ подлинность какого либо событія, а два отрицаютъ её, то вѣроятность подлинности будетъ

$$\frac{n(m-n)^2}{n(m-n)^2+n^2(m-n)}=\frac{m-n}{m},$$

а вѣроятность, что событіе не случилось

$$\frac{n^2(m-n)}{n(m-n)^2+n^2(m-n)}=\frac{n}{m}.$$

Найденныя выраженія для вѣроятностей показываютъ, что при разногласіи, три равноправдивыя свидѣтельства имѣютъ силу одного показанія, и именно того, которое сдѣлано двумя свидѣтелями. Это замѣчаніе получитъ сей-часъ большую степень общности.

Изобразимъ чрезъ s число свидѣтелей, а чрезъ $\frac{n}{m}=p$ правдивость каждаго изъ нихъ. Сложная вѣроятность справедливости свидѣтельства, послѣ допроса и при согласныхъ показаніяхъ, будетъ:

$$\frac{n^s}{n^s+(m-n)^s}=\frac{p^s}{p^s+(1-p)^s}, \tag{194}$$

а противная ей вѣроятность,

$$\frac{(m-n)^s}{n^s+(m-n)^s}=\frac{(1-p)^s}{p^s+(1-p)^s}. \tag{195}$$

Если выраженію (194) дадимъ видъ

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{p}-1\right)^s},$$

то усмотримъ непосредственно, что вѣроятность справедливости согласнаго свидѣтельства возрастаетъ съ числомъ свидѣтелей когда $p>\frac{1}{2}$, то есть, когда они имѣютъ бо́льшую наклонность говорить правду чѣмъ неправду, умышленно или неумышленно. Такъ напримѣръ, еслибъ четыре свидѣтеля, при общей правдивости равной $\frac{2}{3}$, утверждали единогласно о случившемся какомъ либо событіи, то, не принимая въ расчётъ бо́льшей или ме́ньшей степени правдоподобія этого самаго событія, вѣроятность справедливости свидѣтельства изобразилась бы дробью

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{16}{17};$$

слѣдовательно, можно бы, при закладѣ, ставить 16 противъ 1, что событіе дѣйствительно случилось.

Допустимъ теперь, что изъ числа s свидѣтелей, r утверждаютъ событіе, а остальные $s-r$ отрицаютъ его; пусть будетъ $s-r=q$, и положимъ сверхъ того, что $r>q$. Вѣроятность, что первые r свидѣтелей говорятъ правду, будетъ

$$\frac{n^r(m-n)^q}{n^r(m-n)^q+n^q(m-n)^r}=\frac{p^{r-q}}{p^{r-q}+(1-p)^{r-q}}.$$

Но, замѣтимъ, что послѣдняя дробь изображаетъ также вѣроятность правдивости единогласнаго показанія $r-q$ свидѣтелей. Сверхъ того, если примемъ въ соображеніе, что разность $r-q=2r-s$ означаетъ вмѣстѣ и большинство свидѣтелей, утверждающихъ событіе предъ тѣми, которые отрицаютъ его, то мы въ правѣ будемъ вывести слѣдующее заключеніе: *послѣ допроса свидѣтелей, и при одинаковой ихъ правдивости, вѣроятность факта, утверждаемаго большинствомъ голосовъ, будетъ зависѣть не отъ полнаго числа свидѣтелей, но отъ избытка или большинства утверждающихъ событіе, предъ тѣми, которые отрицаютъ его.* Положимъ, напримѣръ, что при допросѣ 212 равноправдивыхъ свидѣтелей, оказалось 112 показаній, подтверждающихъ какое либо событіе, а 100 отрицающихъ его; изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ, что вѣроятность этого событія будетъ для насъ одинакова съ тою, которую получили бы, еслибъ, при допросѣ 12-ти свидѣтелей, показанія всѣхъ были утвердительныя. Безъ сомнѣнія многимъ покажется, что приведенный результатъ не согласенъ съ здравымъ понятіемъ объ этомъ предметѣ. И въ самомъ дѣлѣ, не будутъ ли вообще имѣть большую степень довѣрія къ единогласному показанію 12 свидѣтелей, чѣмъ къ свидѣтельству 212 лицъ, между которыми произошло разногласіе, такъ что 112 утверждаютъ одно, а 100, противное? Съ другой же стороны, математическое рѣшеніе вопроса приводитъ къ неоспоримому слѣдствію, что степень довѣрія, въ томъ и другомъ случаѣ, должна быть одна и та же. Это кажущееся противорѣчіе объясняется тѣмъ, что допустивъ однажды которую нибудь изъ этихъ двухъ случайностей, напримѣръ первую, то есть, что изъ 212 свидѣтелей, 112 утверждаютъ событіе, а 100 отрицаютъ его, вторая случайность, именно, единогласное показаніе 12-ти свидѣтелей по тому же самому дѣлу, будетъ уже весьма мало вѣроятна. Дѣйствительно, положимъ какъ и выше, что изъ числа s свидѣтелей, r утверждаютъ подлинность какого либо событія, а остальные $s-r$ отрицаютъ её; вѣроятность P, что при новомъ числѣ $2r-s$ испытаніяхъ, равномъ избытку r свидѣтелей предъ $r-s$, событіе повторится всѣ $2r-s$ разъ, будетъ

$$P=\frac{\int_0^1 x^{3r-s}(1-x)^{s-r}dx}{\int_0^1 x^r(1-x)^{s-r}dx};$$

это выраженіе мы получили, положивъ въ формулѣ (93) [N° 55] $m = r$, $n = s - r$, $p = 2r - s$ и $q = 0$. Если же замѣтимъ теперь, что въ силу уравненія (96) [N° 56]

$$\int_0^1 x^{3r-s}(1-x)^{s-r}dx = \frac{1.2.3\ldots(3r-s)}{(s-r+1)(s-r+2)\ldots(2r+1)}$$

$$\int_0^1 x^r(1-x)^{s-r}dx = \frac{1.2.3\ldots r}{(s-r+1)(s-r+2)\ldots(s+1)},$$

то найдемъ

$$P = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(3r-s)}{(s+2)(s+3)\ldots(2r+1)}.$$

Вотъ формула, опредѣляющая искомую вѣроятность; легко видѣть, что при однихъ и тѣхъ же обстоятельствахъ, P будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ число s свидѣтелей значительнѣе. Для приведеннаго выше примѣра будетъ $s = 212$, $r = 112$, и слѣдовательно

$$P = \frac{113.114.115\ldots124}{214.215.216\ldots225} = \frac{1}{1563,7\ldots}.$$

Эта вѣроятность такъ слаба, что допустивъ дѣйствительность первой случайности, вторая становится почти несбыточною.

Замѣтимъ мимоходомъ, что для вычисленія P при значительномъ числѣ $2r-s$, можно употреблять или логариѳмы, или, еще лучше, формулу (97) [N° 56]. Если $2r-s$ не велико, то P вычисляется очень просто и непосредственно; положимъ, напримѣръ, $s = 103$, $r = 53$; получимъ

$$P = \frac{54.55.56}{105.106.107} = \frac{792}{5671} < \frac{1}{7}.$$

Объясненное сей-часъ обстоятельство, которое, съ перваго взгляда, представило противорѣчіе между теоріей и здравымъ соображеніемъ, встрѣтится еще дальше [N° 114], когда будемъ говорить о приговорахъ по большинству голосовъ.

100. Въ предъидущемъ N° мы подразумѣвали, что фактъ, о которомъ отбираются свидѣтельства, самъ по себѣ не представляетъ ничего необыкновеннаго, или, иначе, онъ могъ быть или не быть съ одинаковою вѣроятностію, слѣдовательно равною $\frac{1}{2}$. Примемъ теперь въ расчётъ собственную возможность событія, независимо отъ свидѣтельства объ немъ. Необходимость соображаться съ этого возможностію обнаруживается тѣмъ, что для заключенія о дѣйствительности или недѣйствительности какого либо факта, мы не довольствуемся единственно показаніемъ свидѣтеля, которое можемъ быть вѣрнымъ или ошибочнымъ, даже независимо отъ сущности факта; степень довѣрія нашего къ этому свидѣтельству будетъ всегда основываться на большемъ или меньшемъ правдоподобіи самаго событія. Если оно *необыкновенное*, то есть, если выходитъ въ какомъ либо отношеніи изъ извѣстнаго круга нашихъ понятій, то, не смотря на довѣренность нашу къ правдивости свидѣтеля, подлинность событія останется подъ большимъ сомнѣніемъ; напротивъ того, утвержденіе того же самаго свидѣтеля о другомъ фактѣ, не представляющемъ ничего необыкновеннаго не возбудитъ въ насъ недовѣрчивости къ его показанію.

Чтобы ввести въ вычисленіе собственную возможность событія, независимо отъ всякаго свидѣтельства объ немъ, эту возможность принимаютъ за вѣроятность втораго свидѣтельства, которое, будучи соединено съ первымъ, какъ показано въ N° 98, изобразитъ полную вѣроятность событія послѣ допроса. И такъ, если означимъ чрезъ $p = \frac{n}{m}$ вѣроятность событія, выведенную изъ показаній всѣхъ свидѣтелей, а чрезъ $q = \frac{\nu}{\mu}$ *собственную вѣроятность* событія, вычисленную *a priori*, и слѣдовательно независимую отъ свидѣтельствъ, то дробь

$$\frac{n\nu}{n\nu+(m-n)(\mu-\nu)} = \frac{pq}{pq+(1-p)(1-q)} \tag{196}$$

изобразитъ полную вѣроятность утверждаемаго факта послѣ свидѣтельства. Противная же вѣроятность, именно, что событіе не состоялось, очевидно будетъ

$$\frac{(m-n)(\mu-\nu)}{n\nu+(m-n)(\mu-\nu)} = \frac{(1-p)(1-q)}{pq+(1-p)(1-q)}. \tag{197}$$

Уподобленіе собственной вѣроятности событія второму свидѣтельству, послужившее намъ для вывода предъидущихъ двухъ формулъ, можетъ быть оправдано слѣдующимъ сужденіемъ: допустимъ, подобно тому какъ въ N° 98, что число случаевъ, въ которыхъ отбираются показанія отъ однихъ и тѣхъ же свидѣтелей, по одному и тому же событію, равно произведенію $m\mu$ знаменателей двухъ дробей $\frac{n}{m}$ и $\frac{\nu}{\mu}$; первая изъ нихъ, какъ уже сказано выше, изображаетъ вѣроятность событія, выведенную изъ показаній всѣхъ свидѣтелей, а вторая, собственную его вѣроятность. Чтобы найти вѣроятность событія послѣ допроса, надлежитъ число статочностей, благопріятствующихъ ему, раздѣлить на полное число случаевъ, въ которыхъ свидѣтели утверждаютъ его появленіе, справедливо или ошибочно. Легко видѣть, что число благопріятствующихъ статочностей будетъ $n\nu$; дѣйствительно, при $m\mu$ возможныхъ случаяхъ, каждое изъ n справедливыхъ показаній соединится съ каждою изъ ν статочностей, приводящихъ къ событію, и слѣдовательно, въ $m\mu$ пріёмовъ, событіе случится $n\nu$ разъ. Что же касается до полнаго числа случаевъ, въ которыхъ событіе будетъ утверждаемо свидѣтельствомъ, то оно состоитъ: 1° изъ дѣйствительнаго числа $n\nu$ его повтореній, и 2° изъ числа $(m-n)(\mu-\nu)$, изображающаго совокупность случаевъ, при которыхъ событіе не случилось, а свидѣтели, по ошибкѣ, умышленной или неумышленной, объявили о его появленіи. Произведеніе $(m-n)(\mu-\nu)$

получено на томъ основаніи, что первый множитель $m-n$ изображаетъ число несправедливыхъ показаній свидѣтелей, а второй $\mu-\nu$, число случаевъ, неблагопріятствующихъ появленію событія. И такъ, совокупность статочностей, приводящихъ къ объявленію событія, будетъ $n\nu+(m-n)(\mu-\nu)$. Слѣдовательно дроби

$$\frac{n\nu}{n\nu+(m-n)(\mu-\nu)} \text{ и } \frac{(m-n)(\mu-\nu)}{n\nu+(m-n)(\mu-\nu)}$$

соотвѣтственно изобразятъ вѣроятности появленія и непоявленія событія по выслушаніи свидѣтелей. Эти величины, приведенныя уже выше [формулы (196) и (197)], показываютъ, что собственную вѣроятность событія можно вводить въ вычисленіе, принимая её въ смыслѣ новаго свидѣтельства, правдивость котораго равняется этой же собственной вѣроятности.

Если бы собственная вѣроятность q событія равнялась $\frac{1}{2}$, то формула (196) обратилась бы просто въ p; изъ этого слѣдовало бы заключить, что когда событіе можетъ быть или не быть съ одинаковою возможностію, то вѣроятность его равна самой вѣроятности свидѣтельства.

101. Для поясненія выведенныхъ нами формулъ, предложимъ численный примѣръ свидѣтельства о весьма мало вѣроятномъ событіи.

Положимъ, что *изъ полной Русской азбуки выдернули* шесть *буквъ на-удачу, которыя, по мѣрѣ ихъ вскрытія, ставили одну возлѣ другой. Два очевидца утверждаютъ, что вынутыя буквы составили слово* МОСКВА. *Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что показаніе двухъ свидѣтелей справедливо.*

Положимъ, что свидѣтели равно-правдивы, и изобразимъ общую ихъ правдивость, напримѣръ, дробью $\frac{9}{10}$. Не принимая въ расчётъ собственной вѣроятности утверждаемой случайности, вѣроятность факта, именно вскрытія слова *Москва*, выведенная только изъ двухъ единогласныхъ свидѣтельствъ, опредѣлится формулою (194), и будетъ

$$\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{81}{82}.$$

Эта дробь довольно близка къ единицѣ или достовѣрности; поэтому, если бы утверждаемое событіе было обыкновенное, мы не имѣли бы причины усумниться въ его подлинности. Но, принявъ въ соображеніе, что найденное соединеніе буквъ выражаетъ слово, имѣющее опредѣленный смыслъ въ Русскомъ языкѣ, мы тотчасъ же приведены къ сомнѣнію, и не рѣшаемся приписать свидѣтельствуемый фактъ простому случаю; скорѣе допустимъ или ошибку со стороны свидѣтелей, или существованіе посторонней причины, дѣйствовавшей по чьей либо волѣ, и которая способствовала къ извлеченію буквъ, составившихъ слово, предъ всякимъ другимъ соединеніемъ также изъ шести буквъ, но не представляющемъ никакого смысла. Если же этой посторонней причины не было, то какъ оцѣнить вѣроятность утверждаемой случайности послѣ свидѣтельства? Формула (196) рѣшаетъ вопросъ; но прежде надобно найти собственную вѣроятность q вскрытія слова *Москва*.

Для опредѣленія q замѣтимъ прежде всего, что свидѣтельство о появленіи всякаго слова, состоящаго изъ шести буквъ, и имѣющаго опредѣленный смыслъ, удивило бы насъ въ такой же степени, какъ и вскрытіе слова *Москва*. Поэтому, вскрытіе одного изъ словъ: *церква*, *добрый*, *ходить*, *Парижъ* и проч. и проч. было бы точно такою же необыкновенною случайностію, какъ и предполагаемое появленіе собственнаго имени *Москва*. На такомъ основаніи ясно, что искомая вѣроятность будетъ равняться числу k всѣхъ Русскихъ словъ, состоящихъ изъ шести буквъ, и имѣющихъ опредѣленный смыслъ, раздѣленному на число l всѣхъ сочетаній, которыя можно получить соединяя 36 буквъ по шести. Для простоты, мы не принимаемъ въ расчётъ тѣхъ словъ, въ которыхъ одна и та же буква повторяется. Пусть будетъ $k=50000$; это число, безъ сомнѣнія, значительно превосходитъ истинное значеніе k, которое получилось бы довольно приблизительно при пособіи разныхъ Словарей. Что́ же касается до l, то очевидно найдется $l=36.35.34.33.32.31$. Слѣдовательно

$$\frac{50000}{36.35.34.33.32.31}=\frac{625}{17530128}<\frac{1}{28048}.$$

И такъ, положивъ даже $q=\frac{1}{28048}$, или $\nu=1$, $\mu=28048$, и вспомнивъ что $p=\frac{81}{82}$, или $n=81$, $m=82$, получимъ, въ силу формулы (196), дробь

$$\frac{81}{81+28048}=\frac{81}{28129}<\frac{1}{347},$$

изображающую вѣроятность появленія слова *Москва*, утверждаемаго свидѣтелями. Изъ этого заключаемъ, что вѣроятность событія, равная дроби $\frac{81}{82}$ въ слѣдствіе двухъ свидѣтельствъ, уменьшилась до $\frac{1}{347}$, когда приняли въ расчётъ собственную вѣроятность его, до отобранія показаній.

Когда положимъ, что общая правдивость двухъ свидѣтелей равна $\frac{99}{100}$, то для вѣроятности сложнаго свидѣтельства найдемъ дробь $\frac{9801}{9802}$, весьма мало разнствующую отъ досто-

вѣрности. Припявъ же въ расчётъ собственную вѣроятность свидѣтельствуемаго событія, именно вскрытія слова *Москва*, получится, вмѣсто дроби $\frac{9801}{9802}$, довольно слабая вѣроятность

$$\frac{9801}{9801+28048}=\frac{9801}{37849}<\frac{1}{3};$$

но она, на самомъ дѣлѣ, будетъ несравненно меньше, потому что допущенное выше значеніе для k слишкомъ велико.

102. Принимая въ расчётъ собственную вѣроятность свидѣтельствуемаго событія, можетъ встрѣтиться сомнительный случай, для объясненія котораго предлагаемъ рѣшеніе слѣдующаго вопроса: *вынутъ одинъ нумеръ изъ сосуда, заключающаго* μ *различныхъ нумеровъ; свидѣтель, правдивость котораго изобразимъ чрезъ* $\mathrm{p}=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$, *объявляетъ, что вышелъ* n° i. *Опредѣлить вѣроятность дѣйствительнаго выхода этого нумера.*

Нѣтъ никакого сомнѣнія, что вѣроятность появленія n° i, выведенная *a priori*, будетъ $\frac{1}{\mu}$. Но изъ этого не должно заключить, чтобы вѣроятность выхода n° i, послѣ свидѣтельства, изобразилась въ силу формулы (196) дробью

$$\frac{n}{n+(m-n)(\mu-1)}.$$

Это выраженіе было бы дѣйствительно справедливо, еслибъ, до извлеченія нумера изъ сосуда, мы избрали именно n° i, преимущественно предъ всякимъ другимъ. Но какъ въ настоящемъ случаѣ не предполагается никакого предварительнаго выбора, то вѣроятность свидѣтельствуемаго событія будетъ просто равняться правдивости свидѣтеля, точно такъ, какъ еслибъ вѣроятность вскрытія n° i изъ полнаго числа μ нумеровъ, равнялась $\frac{1}{2}$. Чтобъ удостовѣриться въ этомъ, выведемъ непосредственно искомую вѣроятность.

Появленіе n° i можетъ произойти при двухъ предположеніяхъ: 1° свидѣтель говоритъ правду, и 2° онъ ошибается. Когда вычислимъ *a priori* вѣроятность свидѣтельствуемаго событія въ этихъ двухъ предположеніяхъ, то, на основаніи правила, оканчивающаго N° 52, прямо найдемъ и искомую вѣроятность. Она будетъ равна вѣроятности событія, относящейся къ первому предположенію, раздѣленной на сумму вѣроятностей, относящихся къ обоимъ предположеніямъ.

Вѣроятность появленія n° i, вычисленная *a priori*, равна $\frac{1}{\mu}$; помноживъ эту дробь на правдивость $\frac{n}{m}$ свидѣтеля, получимъ для вѣроятности событія въ первомъ предположеніи произведеніе $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{n}{m}$. Если свидѣтель, объявляя о выходѣ n° i, ошибается, то вышелъ не n° i, а какой либо другой. Вѣроятность невыхода n° i, то есть появленія всякаго

другаго нумера, безразлично, изъ числа остающихся $\mu-1$ нумеровъ, будетъ, *a priori*, $\frac{\mu-1}{\mu}$. Но свидѣтель, объявляя что вышелъ n° i, долженъ былъ выбрать его изъ остающихся $\mu-1$ нумеровъ; слѣдовательно, вѣроятность выбора n° i будетъ $\frac{1}{\mu-1}$, если только, какъ мы и предполагаемъ, нѣтъ причины, по которой бы выборъ свидѣтеля палъ на одинъ нумеръ преимущественно предъ другимъ. Произведеніе $\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu-1}=\frac{1}{\mu}$ изобразитъ вѣроятность, вычисленную *a priori*, что свидѣтель, по ошибкѣ, объявилъ о выходѣ n° i. Принявъ же въ соображеніе, что возможность невѣрнаго показанія свидѣтеля, или, что̀ всё равно, вѣроятность втораго предположенія равна $\frac{m-n}{m}$, найдемъ дробь $\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu-1}\cdot\frac{m-n}{m}=\frac{m-n}{m\mu}$ для вѣроятности объявленія n° i въ этомъ второмъ предположеніи. И такъ, частное

$$\frac{\frac{n}{m\mu}}{\frac{n}{m\mu}+\frac{m-n}{m\mu}}=\frac{n}{m}, \tag{198}$$

то есть, самая правдивость свидѣтеля, изобразитъ вмѣстѣ съ тѣмъ и вѣроятность появленія n° i, какъ уже было замѣчено выше.

При согласномъ показаніи двухъ свидѣтелей о выходѣ n° i, сложная вѣроятность событія дѣлается зависимою отъ его собственной вѣроятности $\frac{1}{\mu}$. Здѣсь, какъ и при одномъ свидѣтелѣ, будетъ два возможныхъ предположеній: оба свидѣтеля говорятъ правду, или оба обманываютъ. Изобразимъ чрезъ p и q правдивости свидѣтелей. Въ первомъ предположеніи n° i дѣйствительно вышелъ; вѣроятность этого событія, *a priori*, есть $\frac{1}{\mu}$; умноживъ $\frac{1}{\mu}$ на произведеніе двухъ правдивостей pq, получимъ $\frac{pq}{\mu}$ для вѣроятности наблюденнаго событія въ первомъ предположеніи. Во второмъ предположеніи n° i не вышелъ; собственная вѣроятность невыхода есть $\frac{\mu-1}{\mu}$. Но какъ оба свидѣтеля утверждаютъ вскрытіе n° i, то они должны были выбрать его между $\mu-1$ невышедшими нумерами. Число соединеній каждаго изъ этихъ $\mu-1$ нумеровъ, одинъ съ другимъ, будетъ $(\mu-1)^2$; и какъ между этими соединеніями находится только одно, заключающее повторенный два раза n° i, то вѣроятность согласнаго выбора изобразится дробью $\frac{1}{(\mu-1)^2}$, а собственная вѣроятность событія, произведеніемъ $\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{1}{(\mu-1)^2}=\frac{1}{\mu(\mu-1)}$. Если эту послѣдюю дробь умножимъ на произведеніе $(1-p)(1-q)$, изображающее вѣроятность, что оба свидѣтеля ошибаются или обманываютъ, то получимъ выраженіе $\frac{(1-p)(1-q)}{\mu(\mu-1)}$ для вѣроятности объявленія n° i во второмъ предположеніи. И такъ, отношеніе

$$\frac{\frac{pq}{\mu}}{\frac{pq}{\mu}+\frac{(1-p)(1-q)}{\mu(\mu-1)}}=\frac{pq}{pq+\frac{(1-p)(1-q)}{\mu-1}} \qquad (199)$$

изобразитъ вѣроятность дѣйствительнаго выхода n° i, послѣ согласнаго о томъ показанія двухъ свидѣтелей. Легко видѣть, что эта вѣроятность будетъ тѣмъ ближе къ достовѣрности, чѣмъ число μ значительнѣе, или, что̀ всё равно, чѣмъ собственная вѣроятность $\frac{1}{\mu}$ событія слабѣе. Это происходитъ отъ того, что предположивъ ошибку или обманъ со стороны свидѣтелей, статочность согласнаго ихъ показанія о выходѣ n° i чрезвычайно слаба. Само собой разумѣется, что для справедливости такого заключенія должно исключить случай, въ которомъ бы свидѣтели сговорились между собой, и избрали оба, по какой либо причинѣ, одинъ и тотъ же n° i.

Вѣроятность (198) значительно уменьшится, когда всѣ нумера, кромѣ n° i, будутъ одинаковые. Дѣйствительно, въ такомъ предположеніи, при значительномъ μ, выходъ n° i будетъ случайностію весьма невѣроятною. Такой случай можно уподобить извлеченію бѣлаго шара изъ сосуда, заключающаго только одинъ бѣлый шаръ и $\mu-1$ чёрныхъ. Свидѣтель выема утверждаетъ, что вынутъ шаръ бѣлый. Здѣсь, какъ и выше, можно сдѣлать два предположенія: или свидѣтель говоритъ правду, или онъ ошибается. Вѣроятность извлеченія бѣлаго шара въ первомъ предположеніи будетъ $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{n}{m}$. Если свидѣтель, называя бѣлый шаръ, ошибается или обманываетъ, то вышелъ чёрный шаръ, и вѣроятность этого будетъ $\frac{\mu-1}{\mu}$. Здѣсь вѣроятность выбора бѣлаго цвѣта обращается въ достовѣрность или единицу, потому что вынувъ чёрный шаръ, и ошибаясь въ показаніи, свидѣтель только и можетъ назвать бѣлый. Въ предъидущей же задачѣ ему представлялся выборъ между $\mu-1$ нумерами, почему вѣроятность этого выбора и равнялась $\frac{1}{\mu-1}$. Помножая вѣроятность $\frac{\mu-1}{\mu}$ выхода чёрнаго шара на вѣроятность $\frac{m-n}{m}$, что свидѣтель ошибается, получимъ дробь $\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{m-n}{m}$, изображающую вѣроятность показанія о выходѣ бѣлаго шара во второмъ предположеніи. И такъ (N° 52), частное

$$\frac{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{n}{m}}{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{n}{m}+\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{m-n}{m}}=\frac{n}{n+(m-n)(\mu-1)}$$

изобразитъ вѣроятность справедливости показанія объ извлеченіи бѣлаго шара изъ сосуда, въ которомъ, въ числѣ μ шаровъ, находится только одинъ бѣлый и $\mu-1$ чёрныхъ. Напримѣръ, еслибъ имѣли $\frac{n}{m}=\frac{9}{10}$, а $\mu=1000$, то для искомой вѣроятности получили бы довольно малую дробь $\frac{9}{1008}=\frac{1}{112}$. Замѣтимъ мимоходомъ, что послѣдняя формула выводится прямо и изъ выраженія (196), полагая въ немъ $\nu=1$.

Всѣ приведенныя въ предъидущихъ N°N° формулы относятся къ тому предположенію, что показаніе каждаго свидѣтеля можетъ только быть *утверждающимъ* или *отрицающимъ*. Но, на самомъ дѣлѣ, въ бо̀льшей части случаевъ, показанія представляютъ столько различныхъ оттѣнковъ, что подчинить ихъ математическому анализу почти невозможно. *Ламбертъ*, занимавшійся вопросомъ о свидѣтельствахъ въ своемъ *Novum Organon*, принялъ въ расчётъ три случая: онъ раздѣлилъ свидѣтельства на *вѣрныя*, *незначущія* и *ложныя*. При такомъ предположеніи, возможныхъ событій можетъ быть *три*, и для аналитическаго рѣшенія задачъ, приводящихъ къ ихъ разсматриванію, можно руководствоваться пріёмами, изложенными въ N° 8 нашей книги.

103. Чтобы болѣе приблизиться къ сущности вопроса о свидѣтельствахъ, *Лапласъ* разсматриваетъ въ свидѣтелѣ два элемента, именно: его *честность*, для которой удержимъ употребленное уже нами наименованіе *правдивость*, и его *опытность* или проницательность. И такъ, по Лапласу, должно принимать въ расчётъ: 1° вѣроятность что свидѣтель говоритъ то̀, что̀ дѣйствительно видѣлъ или слышалъ, и 2° вѣроятность что онъ вѣрно видѣлъ или слышалъ. На такомъ основаніи, изъ показанія свидѣтеля проистекаютъ слѣдующія четыре предположенія:

1° Онъ знаетъ правду,
2° Онъ не знаетъ правды, } и показываетъ по убѣжденію.

3° Онъ знаетъ правду,
4° Онъ не знаетъ правды, } и обманываетъ.

Замѣтимъ, что когда показаніе ограничивается *утвержденіемъ* или *отрицаніемъ*, какъ мы здѣсь и допустимъ, то четвертое предположеніе приводитъ къ *истинѣ*. Дѣйствительно, свидѣтель желая обмануть, и, принимая самъ неправду за правду, очевидно укажетъ на правду. Такого рода показаніе можно назвать *двойнымъ ложнымъ свидѣтельствомъ*, и оно, какъ мы видимъ, ведетъ къ справедливому показанію.

Положимъ, какъ въ предъидущемъ N° 102, что изъ μ нумеровъ, вынутъ одинъ. Свидѣтель выема объявляетъ о выходѣ n° i. Какъ опредѣлить вѣроятность справедливости этого показанія?

Мы сей-часъ замѣтили, что возможныхъ предположеній будетъ четыре. Первое благопріятствуетъ дѣйствительному выходу n° i. Четвертое, выражающее двойное ложное свидѣтельство, приведетъ также къ нѣкоторымъ благопріятствующимъ статочностямъ. Если сумму вѣроятностей, относящихся къ благопріятствующимъ статочностямъ въ этихъ двухъ предположеніяхъ, раздѣлимъ на сумму вѣроятностей наблюденнаго событія во всѣхъ четырехъ предположеніяхъ, то получимъ искомую вѣроятность P, что n° i дѣйствительно вышелъ.

Пусть будетъ $\frac{n}{m} = p$ правдивость, а $\frac{n'}{m'} = q$ опытность свидѣтеля. При такихъ данныхъ вычислимъ вѣроятность объявленія n° i въ упомянутыхъ четырехъ предположеніяхъ.

Первое предположеніе. Свидѣтель знаетъ правду, и говоритъ правду. Въ такомъ случаѣ n° i дѣйствительно вышелъ. Вѣроятность этого событія, *a priori*, будетъ $\frac{1}{\mu}$; помноживъ эту дробь на сложную вѣроятность $\frac{n}{m}\cdot\frac{n'}{m'}$ самаго предположенія, найдемъ для полной вѣроятности наблюденнаго событія, въ этомъ первомъ предположеніи, произведеніе $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n'}{m'} = \frac{pq}{\mu}$.

Второе предположеніе. Свидѣтель не знаетъ правды, и говоритъ по убѣжденію. Такъ какъ свидѣтель, объявляя о появленіи n° i, ошибается, то n° i не вышелъ. Вѣроятность что вышелъ не n° i, есть, *a priori*, $\frac{\mu-1}{\mu}$. Но, ошибаясь, свидѣтель могъ бы назвать всякій изъ $\mu-1$ нумеровъ, кромѣ дѣйствительно вышедшаго. И такъ, вѣроятность выбора n° i, преимущественно предъ другими, будетъ $\frac{1}{\mu-1}$; отсюда находимъ, что вѣроятность, *a priori*, объявленія n° i, когда свидѣтель ошибается, но не обманываетъ, есть $\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu-1} = \frac{1}{\mu}$. Умноживъ $\frac{1}{\mu}$ на вѣроятность $\frac{n}{m}\left(1-\frac{n'}{m'}\right)$ предположенія, получимъ дробь $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{n}{m}\left(1-\frac{n'}{m'}\right) = \frac{p(1-q)}{\mu}$, изображающую вѣроятность объявленія n° i при второмъ предположеніи.

Третье предположеніе. Свидѣтель знаетъ правду, и обманываетъ. Въ этомъ случаѣ n° i не вышелъ, и вѣроятность невыхода равна $\frac{\mu-1}{\mu}$; но, объявляя о выходѣ n° i, онъ долженъ избрать его между $\mu-1$ невышедшими нумерами; такъ какъ вѣроятность подобнаго выбора есть $\frac{1}{\mu-1}$, то произведеніе $\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu-1} = \frac{1}{\mu}$ изобразитъ вѣроятность *a priori*, что свидѣтель объявитъ выходъ n° i, а не другаго. Сверхъ того, вѣроятность предположенія есть $\left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{n'}{m'}$; поэтому, полная вѣроятность наблюденнаго событія, именно, объявленія n° i въ третьемъ предположеніи, будетъ $\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{n'}{m'} = \frac{(1-p)q}{\mu}$.

Четвертое предположеніе. Свидѣтель не знаетъ правды, и обманываетъ. Вѣроятность, что онъ не полагаетъ n° i вышедшимъ, есть $\frac{\mu-1}{\mu}$, и какъ онъ объявляетъ о его выходѣ, то вѣроятность этого выбора будетъ $\frac{1}{\mu-1}$; поэтому дробь $\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu-1} = \frac{1}{\mu}$ изобразитъ вѣроятность, вычисленную *a priori*, что объявленный нумеръ будетъ n° i. Съ другой стороны, такъ какъ возможность самаго предположенія есть $\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n'}{m'}\right)$, то вѣроятность наблюденнаго событія, состоящаго въ объявленіи n° i, въ этомъ четвертомъ предположеніи, будетъ $\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n'}{m'}\right) = \frac{(1-p)(1-q)}{\mu}$. Это послѣднее предположеніе, какъ было уже замѣчено выше, заключаетъ въ себѣ нѣкоторыя статочности дѣйствительнаго появленія n° i. И въ самомъ дѣлѣ, положимъ что вышелъ n° i; свидѣтель, думая что онъ не вышелъ, выбираетъ его между остальными $\mu-1$ нумерами, изъ которыхъ, по его мнѣнію, ни одинъ не вышелъ. Очевидно, здѣсь представляется *двойное ложное свидѣтельство*, и слѣдовательно показаніе будетъ справедливое. Вѣроятность этой случайности, вычисленная *a priori*, равна $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu-1} = \frac{1}{\mu(\mu-1)}$. Помноживъ эту дробь на возможность $\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n'}{m'}\right)$ самаго предположенія, найдется для вѣроятности дѣйствительнаго выхода n° i въ разсматриваемомъ случаѣ выраженіе

$$\frac{1}{\mu(\mu-1)}\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n'}{m'}\right) = \frac{(1-p)(1-q)}{\mu(\mu-1)}.$$

Теперь, для полученія вѣроятности P, стоитъ только сумму вѣроятностей

$$\frac{pq}{\mu} + \frac{(1-p)(1-q)}{\mu(\mu-1)}$$

дѣйствительнаго выхода n° i, раздѣлить на сумму вѣроятностей

$$\frac{pq}{\mu} + \frac{p(1-q)}{\mu} + \frac{(1-p)q}{''} + \frac{(1-p)(1-q)}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

во всѣхъ четырехъ предположеніяхъ, то есть, на полную вѣроятность справедливаго или ошибочнаго объявленія о выходѣ n° i. Тогда получимъ просто

$$P = pq + \frac{(1-p)(1-q)}{\mu-1}. \tag{200}$$

Если допустимъ, что свидѣтель не можетъ ошибиться въ дѣйствительности или недѣйствительности утверждаемаго имъ факта, то должно будетъ положить $q = 1$, и получимъ просто $P = p$; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, вѣроятность факта будетъ равна *правдивости* свидѣтеля. Положивъ $p = 1$, то есть допустивъ безусловную честность въ свидѣтелѣ, будетъ $P = q$; и такъ, въ этомъ предположеніи, вѣроятность факта равна *опытности* свидѣтеля. За исключеніемъ этихъ двухъ случаевъ, вѣроятность P будетъ всегда зависѣть отъ собственной вѣроятности $\frac{1}{\mu}$ объявляемаго событія. Когда μ есть

число чрезвычайно большое, то P будетъ очень мало разниться отъ перваго члена pq. Слѣдовательно, въ этомъ предположеніи, вѣроятность справедливости показанія выразится чрезвычайно приближенно произведеніемъ правдивости свидѣтеля на вѣроятность, что онъ не ошибается.

Сказанное здѣсь о способѣ Лапласа, приложенномъ къ показанію одного свидѣтеля, легко распространить и на какое ни есть число свидѣтелей, при согласныхъ и несогласныхъ показаніяхъ.

104. Когда какое либо событіе передается однимъ лицомъ или цѣлымъ поколѣніемъ другому, потомъ третьему, и такъ далѣе, то такого рода свидѣтельство называется *преданіемъ*. Предложимъ нѣкоторыя правила, относящіяся къ опредѣленію вѣроятностей въ этомъ случаѣ.

Положимъ, что *изъ числа* μ *равновѣроятныхъ событій* E_1, $E_2 \ldots E_n \ldots E_\mu$, *одно, напримѣръ* E_n, *дошло до насъ по преданію. Допустимъ, что очевидецъ* T_0 *передалъ видѣнное имъ лицу* T_1, T_1 *передалъ* T_2, *и такъ далѣе до* T_r, *который передаетъ уже намъ слышанное имъ отъ* T_{r-1}. *Ищется вѣроятность* P_r *подлинности преданія, то есть дѣйствительности событія* E_n.

Изобразимъ соотвѣтственно чрезъ p_r, $p_{r-1} \ldots$ правдивости свидѣтелей T_r, $T_{r-1} \ldots$, и найдемъ зависимость между величинами P_r, P_{r-1}, p_r, p_{r-1} и μ.

Для этого замѣтимъ, что лицо T_r можетъ свидѣтельствовать о дѣйствительности событія E_n только въ двухъ случаяхъ, именно: 1° Когда T_r говоритъ правду, и самъ слышалъ отъ T_{r-1} о дѣйствительности событія E_n. Произведеніе $p_r P_{r-1}$ правдивости p_r свидѣтеля T_r на вѣроятность P_{r-1} подлинности событія E_n, когда останавливаемъ цѣпь преданія на предпослѣднемъ свидѣтельствѣ, изобразитъ сложную вѣроятность этого предположенія. 2° Когда T_r, свидѣтельствуя о событіи E_n ошибается, умышленно или неумышленно, слышавъ отъ T_{r-1} о всякомъ другомъ, кромѣ E_n, изъ остальныхъ $\mu-1$ событій $E_1, E_2, \ldots E_\mu$. Вѣроятность этого втораго предположенія будетъ $\frac{(1-p_r)(1-P_{r-1})}{\mu-1}$. И въ самомъ дѣлѣ, $1-p_r$ изобразитъ вѣроятность, что T_r ошибается, $1-P_{r-1}$ что утвержденіе свидѣтеля T_{r-1} ложно, и наконецъ $\frac{1}{\mu-1}$ что T_r выбралъ, по ошибкѣ или умышленно, именно событіе E_n изъ числа $\mu-1$ событій, не названныхъ свидѣтелемъ T_{r-1}. Произведеніе этихъ трехъ вѣроятностей изобразитъ вѣроятность втораго предположенія.

И такъ, полная вѣроятность P_r дѣйствительности событія E_n, дошедшаго до насъ по преданію, опредѣлится уравненіемъ въ частныхъ разностяхъ

$$P_r = p_r P_{r-1} + \frac{(1-p_r)(1-P_{r-1})}{\mu-1}.$$

Это уравненіе относится къ Бернуліеву, и поэтому можетъ быть интегрировано безъ труда по извѣстнымъ правиламъ. Чтобы привести къ возможной простотѣ его интегрированіе, положимъ

$$P_r = h + Q_r,$$

разумѣя подъ h постоянную величину, которая сей-часъ опредѣлится. Получимъ

$$h + Q_r = p_r h + p_r Q_{r-1} + \frac{1-p_r}{\mu-1}(1-h) - \frac{1-p_r}{\mu-1} \cdot Q_{r-1}.$$

Чтобъ освободить это уравненіе отъ постояннаго члена, и такимъ образомъ привести его къ виду

$$Q_r = p_r Q_{r-1} - \frac{1-p_r}{\mu-1} \cdot Q_{r-1} = \frac{\mu p_r - 1}{\mu-1} \cdot Q_{r-1},$$

должно положить

$$h = p_r h + \frac{1-p_r}{\mu-1}(1-h),$$

откуда

$$(1-p_r)\left[(\mu-1)h - 1 + h\right] = 0, \quad \text{или} \quad h = \frac{1}{\mu},$$

ибо мы не предполагаемъ, чтобъ множитель $1-p_r$ уничтожался. И такъ, принявъ $P_r = \frac{1}{\mu} + Q_r$, будетъ просто

$$Q_r = \frac{\mu p_r - 1}{\mu - 1} \cdot Q_{r-1}.$$

Полагая послѣдовательно $r = 1, 2, 3, \ldots r$, получимъ рядъ равенствъ:

$$Q_1 = \frac{\mu p_1 - 1}{\mu-1} \cdot Q_0$$
$$Q_2 = \frac{\mu p_2 - 1}{\mu-1} \cdot Q_1$$
$$Q_3 = \frac{\mu p_3 - 1}{\mu-1} \cdot Q_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_r = \frac{\mu p_r - 1}{\mu-1} \cdot Q_{r-1}.$$

Почленное перемноженіе этихъ уравненій доставитъ

$$Q_r = \frac{(\mu p_1 - 1)(\mu p_2 - 1)(\mu p_3 - 1) \ldots (\mu p_r - 1)}{(\mu-1)^r} \cdot Q_0,$$

и слѣдовательно, подставивъ $P_r - \frac{1}{\mu}$ на мѣсто Q_r, а $P_0 - \frac{1}{\mu}$ на мѣсто Q_0, получимъ

$$P_r = \frac{1}{\mu} + \frac{(\mu p_1 - 1)(\mu p_2 - 1)(\mu p_3 - 1) \ldots (\mu p_r - 1)}{(\mu-1)^r} \cdot \frac{\mu P_0 - 1}{\mu}. \quad (201)$$

Величина P_0, входящая во вторую часть этого уравненія, изображаетъ вѣроятность событія E_n, утверждаемаго первымъ свидѣтелемъ T_0; если правдивость этого свидѣтеля изобразится чрезъ p_0, и сверхъ того допустимъ, что T_0 не могъ ошибиться, то будетъ просто $P_0 = p_0$, какъ уже доказано выше. Принявъ же въ расчётъ самую опытность очевидца T_0, и означивъ её чрезъ q_0, найдется въ силу формулы (200)

$$P_0 = p_0 q_0 + \frac{(1-p_0)(1-q_0)}{\mu-1}.$$

Разберемъ теперь нѣкоторыя слѣдствія формулы (201). Положивъ, что первый свидѣтель T_0 не могъ ошибиться, получимъ

$$P_r = \frac{1}{\mu} + \frac{(\mu p_1-1)(\mu p_2-1)(\mu p_3-1)\ldots(\mu p_r-1)}{(\mu-1)^r}\cdot\frac{\mu p_0-1}{\mu}. \qquad (202)$$

Допустимъ теперь, что событіе, доходящее до насъ по преданію, само по себѣ очень невѣроятно; въ такомъ случаѣ μ будетъ весьма большимъ числомъ, и вѣроятность P_r выразится приблизительно произведеніемъ

$$p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r.$$

Это приближенное значеніе для P_r показываетъ, что вѣроятность преданія тѣмъ слабѣе, чѣмъ значительнѣе цѣпь свидѣтелей, передающихъ событіе. И такъ, свидѣтельство о какомъ либо фактѣ необыкновенномъ, должно болѣе и болѣе терять своей силы съ давностію преданія.

Если событіе E_n такого рода, что его дѣйствительность и недѣйствительность равно вѣроятны, то $\mu = 2$, и формула (202) доставитъ

$$P_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p_0-1)(2p_1-1)(2p_2-1)\ldots(2p_r-1).$$

Слѣдовательно, когда правдивость всѣхъ свидѣтелей будетъ больше $\frac{1}{2}$, то и $P_r > \frac{1}{2}$; въ такомъ случаѣ преданіе увеличиваетъ вѣроятность событія E_n, первоначальное значеніе которой было, *a priori*, $\frac{1}{2}$. То̀ же самое случится, когда въ ряду T_0, T_1, T_2, ... T_r будетъ находиться *чётное* число такихъ свидѣтелей, правдивость которыхъ ниже $\frac{1}{2}$. Дѣйствительно, вообще при $p_s < \frac{1}{2}$, множитель $2p_s - 1$ будетъ отрицательный; но какъ число подобныхъ множителей въ произведеніи $(2p_0-1)(2p_1-1)\ldots(2p_r-1)$ предполагается чётнымъ, то и произведеніе, о которомъ говоримъ, будетъ положительное. Это обстоятельство объясняется очень просто *двойнымъ ложнымъ свидѣтельствомъ*. Также легко усмотрѣть, что при *нечётномъ* числѣ свидѣтелей, правдивость которыхъ меньше $\frac{1}{2}$,

вѣроятность подлинности преданія будетъ меньше первоначальной, собственной вѣроятности событія.

Наконецъ замѣтимъ, что предположивъ число свидѣтелей чрезвычайно большимъ, или, что̀ всё равно, отнеся свидѣтельствуемое событіе къ глубокой древности, вѣроятность преданія будетъ мало разниться отъ собственной вѣроятности событія. Дѣйствительно, послѣдовательные множители

$$\frac{\mu p_0-1}{\mu} = p_0 - \frac{1}{\mu}, \quad \frac{\mu p_1-1}{\mu-1}, \quad \frac{\mu p_2-1}{\mu-1}\ldots.$$

второй части уравненія (202), всѣ меньше 1; въ этомъ удостовѣряемся написавъ который ни есть изъ множителей, напримѣръ $\frac{\mu p_s-1}{\mu-1}$, въ видѣ:

$$\frac{\mu p_s-1}{\mu-1} = \frac{\mu p_s-p_s}{\mu-1} - \frac{1-p_s}{\mu-1} = p_s - \frac{1-p_s}{\mu-1}.$$

Но вѣроятность P_r состоитъ изъ члена $\frac{1}{\mu}$ и произведенія весьма значительнаго числа множителей, изъ которыхъ каждый меньше единицы; это произведеніе будетъ вообще чрезвычайно мало, развѣ только упоминаемые множители сами неопредѣленно приближаются къ значенію, равному единицѣ. Слѣдовательно, согласно съ приведеннымъ сей-часъ утвержденіемъ, вѣроятность дошедшаго до насъ по преданію событія, будетъ вообще приближаться къ собственной вѣроятности $\frac{1}{\mu}$ того же событія. Съ этой стороны преданіе различествуетъ отъ обыкновеннаго свидѣтельства; дѣйствительно, мы видѣли выше (N° 99), что значительное число прямыхъ свидѣтельствъ придаетъ событію вѣроятность, очень близкую къ достовѣрности. И такъ, давность преданія, въ бо̀льшей или мѐньшей степени, уменьшаетъ вѣроятность фактовъ. Впрочемъ, разнаго рода памятники, письменность, книгопечатаніе, медали и другія причины, перенося насъ такъ сказать къ эпохамъ менѣе отдаленнымъ отъ свидѣтельствуемыхъ событій, отчасти ослабляютъ дѣйствіе давности преданій. Оцѣнка этихъ вспомогательныхъ средствъ къ увеличенію правдоподобія передаваемыхъ намъ фактовъ, не можетъ быть предметомъ строгихъ изслѣдованій Анализа Вѣроятностей.

Положимъ теперь, что имѣемъ двѣ цѣпи преданій, и каждая состоитъ изъ $r+1$ равноправдивыхъ свидѣтелей; допустимъ сверхъ того, что послѣдній свидѣтель одной цѣпи, согласно съ послѣднимъ же другой цѣпи, передаетъ намъ событіе E_n. Вѣроятность факта E_n получится изъ формулы (199), когда замѣнимъ въ ней величиною P_r правдивости p и q. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, вѣроятность событія E_n изобразится дробью

$$\frac{P_r^2}{P_r^2 + \frac{(1-P_r)^2}{\mu-1}}.$$

Нѣкоторые философы, въ видахъ предосудительныхъ, пытались примѣнять формулы, относящіяся къ ослабленію вѣроятности свидѣтельствъ и преданій къ вѣрованіямъ религіознымъ, и тѣмъ поколебать ихъ. Для опроверженія ихъ выводовъ, стоитъ только принять въ соображеніе, что всякое слѣдствіе, выводимое изъ аналитической формулы, не можетъ быть инымъ чѣмъ, какъ только развитіемъ первоначальнаго предположенія, на которомъ формула основана. Если предположеніе ложно, то и слѣдствія анализа будутъ ошибочныя. Поэтому, прежде всего, должно разобрать основательно предположеніе, служащее точкою исхода. Когда этотъ разборъ приведетъ насъ къ заключенію, что въ духовномъ мірѣ есть такіе факты, которые не подчинены физическимъ законамъ, тогда всѣ злонамѣренныя умствованія лжефилософовъ рушатся сами. Съ статьѣ *Certitude**) читатели найдутъ примѣчательную выписку изъ сочиненія Аббата *Прадъ: Sur la vérité de la religion*. Въ этой выпискѣ съ необыкновенною силою ума и съ убѣдительнымъ краснорѣчіемъ разсмотрѣнъ подробно вопросъ, котораго мы здѣсь только коснулись.

105. Переходимъ теперь къ оцѣнкѣ достоинства выборовъ. Этотъ вопросъ приводится вообще къ опредѣленію вѣроятности, что кандидатъ, избранный по данному образу балотированія, дѣйствительно достойнѣе всѣхъ своихъ совмѣстниковъ. Но какъ опредѣлить эту вѣроятность? Безпристрастіе избирателей, степень ихъ просвѣщенія, вліяніе страстей, личныя отношенія, снисходительность или излишняя строгость, представляютъ такое разнообразіе и требуютъ столькихъ различныхъ данныхъ, что этотъ вопросъ, во всей своей общности, не можетъ быть подчиненъ математическому анализу. Мы должны, какъ и въ предыдущихъ нумерахъ этой Главы, довольствоваться нѣкоторыми частными результатами, которые впрочемъ приносятъ несомнѣнную пользу тѣмъ, что придаютъ болѣе опредѣлительности указаніямъ здраваго смысла.

Когда балотируется одинъ кандидатъ, то перевѣсъ избирательныхъ голосовъ предъ неизбирательными, даетъ уже кандидату нѣкоторое право на избраніе, предполагая впрочемъ, что большинство избирателей судитъ здраво и безпристрастно о достоинствахъ балотируемаго.

При балотированіи двухъ кандидатовъ, и при тѣхъ же условіяхъ, относительное большинство голосовъ рѣшаетъ, которому изъ двухъ совмѣстниковъ избиратели отдаютъ преимущество. Напримѣръ, еслибъ избирателей было 24, и первый кандидатъ *A* получилъ 15 избирательныхъ шаровъ, а второй *B* только 13, то это значило бы, что *A*

*) *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences*, Tome VI.

признанъ достойнѣе *B*. Не смотря на это, кандидатъ *A* могъ бы быть не избранъ; такъ случилось бы напримѣръ, еслибъ, для избранія кандидата, требовалось не относительное большинство, а положимъ $\frac{2}{3}$ полнаго числа голосовъ, то есть въ настоящемъ случаѣ $\frac{2}{3}.24=16$. Въ этомъ предположеніи кандидату *A* не доставало бы одного голоса чтобъ имѣть право на избраніе.

При трехъ и бо́льшемъ числѣ балотируемыхъ, перевѣсъ избирательныхъ голосовъ не всегда обнаруживаетъ мнѣніе избирателей относительно превосходства кандидата, получившаго большинство. Для объясненія этого обстоятельства, войдемъ въ нѣкоторыя подробности, которыя требуютъ пособія математическаго анализа.

Когда избиратель подаетъ голосъ въ пользу одного изъ балотируемыхъ кандидатовъ, то мнѣніе его въ разсужденіи относительнаго достоинства другихъ соискателей остается неизвѣстнымъ, и въ такомъ случаѣ вообще нельзя будетъ судить о результатѣ балотированія. И такъ положимъ, что каждый избиратель обязанъ написать на особой запискѣ имена всѣхъ кандидатовъ по порядку достоинства, приписываемаго имъ каждому, и начиная съ достойнѣйшаго изъ всѣхъ. Положимъ что балотируются три кандидата *A*, *B*, *C*. При допущенномъ образѣ балотированія, можетъ случиться, что одинъ изъ трехъ кандидатовъ, напримѣръ *A*, занимавшій первое мѣсто на запискахъ бо́льшее число разъ чѣмъ *B* и *C*, будетъ на послѣднемъ мѣстѣ во всѣхъ остальныхъ запискахъ, между тѣмъ какъ *B* поставленъ на второе мѣсто чаще, чѣмъ *A* на первое. Который же изъ двухъ кандидатовъ *A* и *B* долженъ быть предпочтенъ? Очевидно, что рѣшеніе этого вопроса связано съ степенью важности, которую каждый избиратель приписываетъ относительному порядку при размѣщеніи трехъ кандидатовъ. Еслибъ избиратели, условившись напередъ въ численномъ значеніи достоинства, принимаемаго за *maximum*, могли написать противъ имени каждаго кандидата число, пропорціональное по ихъ мнѣнію степени его достоинства, то рѣшеніе вопроса было бы очень просто. Дѣйствительно, стоило бы только, по отобраніи всѣхъ записокъ, сложить числа, относящіяся къ кандидату *A*, и сдѣлать то́ же самое въ разсужденіи *B* и *C*; ясно, что порядокъ величинъ этихъ трехъ суммъ опредѣлилъ бы вмѣстѣ и порядокъ достоинства трехъ кандидатовъ; наибольшая сумма соотвѣтствовала бы тому кандидату, которому, въ сложности, избиратели отдаютъ предпочтеніе предъ остальными двумя. Практическое исполненіе такого способа балотированія безъ сомнѣнія невозможно. И въ самомъ дѣлѣ, какъ предложить численную мѣру для оцѣнки относительнаго достоинства нѣсколькихъ кандидатовъ, болѣе или менѣе намъ неизвѣстныхъ, тогда какъ мы не въ состояніи того выполнить даже для человѣка, котораго знаемъ во всѣхъ

отношеніяхъ какъ нельзя лучше? Подобныя численныя отмѣтки были бы только исполненіемъ формальности, и отнюдь не могли бы вести къ точному рѣшенію вопроса.

106. *Борда**) предложилъ выражать достоинство кандидатовъ числами, пропорціональными мѣсту, занимаемому ими на запискахъ въ обратномъ порядкѣ. И такъ, при трехъ кандидатахъ, надлежало бы написать:

3 A ,	при четырехъ:	4	A
2 B		3	B
1 C		2	C
		1	D

и такъ далѣе. Потомъ, взявъ отдѣльно сумму чиселъ относящихся къ A, B, C....., увидѣли бы какъ и выше, который изъ кандидатовъ, по приписываемому ему достоинству, долженъ занять первое мѣсто, потомъ второе, третье и такъ далѣе.

Нѣтъ никакого сомнѣнія, что цѣлыя числа, поставленныя въ убывающемъ порядкѣ противъ именъ кандидатовъ, не выражаютъ относительнаго ихъ достоинства; поэтому и результатъ подобнаго образа балотированія не будетъ въ строгомъ смыслѣ точенъ. Не смотря однакожъ на этотъ недостатокъ, способъ Борда имѣетъ математическое основаніе, и, по законамъ вѣроятности, долженъ быть предпочтенъ всякому другому пріёму, когда не имѣемъ въ виду болѣе опредѣлительныхъ данныхъ относительно взаимныхъ правъ балотируемыхъ на избраніе. Это утвержденіе основывается на томъ, что цѣлыя числа, напримѣръ 3, 2 и 1, при трехъ кандидатахъ A, B и C, будутъ соотвѣтственно пропорціональны *среднимъ* достоинствамъ, какія только можно приписать балотируемымъ лицамъ A, B и C, предполагая, по условію, что A имѣетъ преимущество предъ B, а B предъ C. Для доказательства этого предложенія необходимъ математическій анализъ.

Положимъ, что одинъ изъ избирателей пишетъ на запискѣ имена трехъ кандидатовъ въ порядкѣ ABC, приписывая первому изъ нихъ достоинство x, второму y, третьему z. По условію будетъ $x \geqq y$, $y \geqq z$. Сверхъ того, изобразимъ чрезъ X сумму всѣхъ возможныхъ достоинствъ, которыя этотъ избиратель могъ бы приписать при вышеозначенныхъ условіяхъ кандидату A; пусть будутъ Y и Z тѣ же суммы въ разсужденіи B и C, а R число всѣхъ возможныхъ соединеній, получаемыхъ при распредѣленіи различныхъ достоинствъ между тремя кандидатами, и совмѣстныхъ съ условіями $x \geqq y$, $y \geqq z$. Очевидно, что дроби $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$ изобразятъ *среднія* достоинства кандидатовъ A, B, C.

*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1781 г. стр. 657.

Для опредѣленія знаменателя R можно разсуждать слѣдующимъ образомъ: чтобы при назначенной напередъ величинѣ y найти число различныхъ соединеній достоинствъ между двумя кандидатами C и B, должно во первыхъ разсмотрѣть, сколько различныхъ значеній можно приписать z. Если положимъ, что безконечно малая величина ε изображаетъ постоянное приращеніе достоинства, то, по причинѣ $z \leqq y$, различныя значенія для z будутъ

$$\varepsilon,\quad 2\varepsilon,\quad 3\varepsilon\ldots\ldots\frac{y}{\varepsilon}\cdot\varepsilon,$$

а число ихъ, $\frac{y}{\varepsilon}$, которое можно также представить въ видѣ

$$\frac{\int_0^y dz}{\varepsilon} = \frac{y}{\varepsilon}.$$

Но каждое изъ $\frac{y}{\varepsilon}$ достоинствъ кандидата C соединится съ каждымъ изъ значеній y, равнымъ или большимъ достоинства z кандидата C. Поэтому, приписывая послѣдовательно перемѣнной z всѣ значенія

$$\varepsilon,\quad 2\varepsilon,\quad 3\varepsilon\ldots\ldots\frac{y}{\varepsilon}\cdot\varepsilon,$$

найдутся для y слѣдующія возможныя по условію величины:

$$\left.\begin{array}{llll}
\varepsilon & 2\varepsilon & 3\varepsilon\ldots\ldots & \frac{y}{\varepsilon}\cdot\varepsilon \\
2\varepsilon & 3\varepsilon & 4\varepsilon\ldots\ldots & \left(\frac{y}{\varepsilon}+1\right)\varepsilon \\
3\varepsilon & 4\varepsilon & 5\varepsilon\ldots\ldots & \left(\frac{y}{\varepsilon}+2\right)\varepsilon \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{x}{\varepsilon}\cdot\varepsilon & \frac{x}{\varepsilon}\cdot\varepsilon & \frac{x}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\ldots\ldots & \frac{x}{\varepsilon}\cdot\varepsilon,
\end{array}\right\} \qquad (203)$$

ибо величина y не можетъ быть больше x. Очевидно теперь, что число всѣхъ возможныхъ соединеній достоинствъ кандидатовъ B и C, при опредѣленныхъ предѣлахъ для y и x, которые и означимъ чрезъ y и x, будетъ $\frac{x}{\varepsilon}$ для перваго столбца, $\frac{x}{\varepsilon}-1$ для втораго, $\frac{x}{\varepsilon}-2$ для третьяго и проч., наконецъ $\frac{x}{\varepsilon}-\left(\frac{y}{\varepsilon}-1\right)$ для послѣдняго. Сверхъ того, какъ перемѣнной y должно приписать наибольшее ея значеніе, именно x, то искомая совокупность всѣхъ возможныхъ соединеній достоинствъ для двухъ кандидатовъ B и C будетъ

$$\frac{x}{\varepsilon}+\left(\frac{x}{\varepsilon}-1\right)+\left(\frac{x}{\varepsilon}-2\right)+\cdots\cdots+1=\frac{(x+\varepsilon)x}{2\varepsilon^2}.$$

Если откинемъ въ числителѣ безконечно малую величину ε предъ x, то получимъ просто $\frac{x^2}{2\varepsilon^2}$, и этому выраженію можно будетъ дать видъ

$$\frac{\int_0^x dy\int_0^y dz}{\varepsilon^2}=\frac{x^2}{2\varepsilon^2}.$$

Наконецъ, приписывая y всѣ возможныя значенія

$$\varepsilon,\quad 2\varepsilon,\quad 3\varepsilon\ldots\ldots\frac{x}{\varepsilon}\cdot\varepsilon,$$

изъ которыхъ первое, независимо отъ x, имѣетъ мѣсто одинъ разъ, второе два раза, третье три раза,.... послѣднее $\frac{x}{\varepsilon}$ разъ, чтò усматривается прямо изъ рядовъ (203), и предполагая потомъ, что x измѣняется отъ *нуля* до величины a, изображающей *maximum* достоинства, найдемъ для x слѣдующій рядъ соотвѣтственныхъ возможныхъ значеній:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon & 2\varepsilon & 3\varepsilon\ldots\ldots\frac{x}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\\ 2\varepsilon & 3\varepsilon & 4\varepsilon\ldots\ldots\left(\frac{x}{\varepsilon}+1\right)\varepsilon\\ 3\varepsilon & 4\varepsilon & 5\varepsilon\ldots\ldots\left(\frac{x}{\varepsilon}+2\right)\varepsilon\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{a}{\varepsilon}\cdot\varepsilon & \frac{a}{\varepsilon}\cdot\varepsilon & \frac{a}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\ldots\ldots\frac{a}{\varepsilon}\cdot\varepsilon.\end{matrix}\right\}\quad(204)$$

Но, съ другой стороны, наибольшая величина x есть a; слѣдовательно, соображаясь съ рядами (204) увидимъ, что число различныхъ значеній для x, между предѣлами 0 и a, будетъ:

для 1-го столбца: .... $\frac{a}{\varepsilon}$

« 2-го « .... $\frac{a}{\varepsilon}-1$

« 3-го « .... $\frac{a}{\varepsilon}-2$

....

для послѣдняго: .... 1.

Эти числа, въ слѣдствіе сдѣланнаго сей-часъ замѣчанія о повтореніи величинъ $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon,\ldots$ перемѣнной y, должны быть помножены по порядку на $1, 2, 3, \ldots \frac{a}{\varepsilon}$. Слѣдовательно, полное число соединеній всѣхъ возможныхъ достоинствъ трехъ кандидатовъ, или число R, будетъ:

$$R=\frac{a}{\varepsilon}\cdot 1+\left(\frac{a}{\varepsilon}-1\right)\cdot 2+\left(\frac{a}{\varepsilon}-2\right)\cdot 3+\ldots\ldots+1\cdot\frac{a}{\varepsilon},$$

или

$$R=\frac{a}{\varepsilon}\left(1+2+3+\ldots\ldots+\frac{a}{\varepsilon}\right)-\left[1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots+\left(\frac{a}{\varepsilon}-1\right)\frac{a}{\varepsilon}\right].$$

Если къ суммѣ

$$1.2+2.3+\ldots\ldots+\left(\frac{a}{\varepsilon}-1\right)\frac{a}{\varepsilon}$$

придадимъ $1+2+3+\ldots\ldots+\frac{a}{\varepsilon}$, то получимъ

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2=1.2+2.3+\ldots\ldots+\left(\frac{a}{\varepsilon}-1\right)\frac{a}{\varepsilon}+\left(1+2+3+\ldots\ldots+\frac{a}{\varepsilon}\right).$$

Слѣдовательно

$$R=\left(\frac{a}{\varepsilon}+1\right)\left(1+2+3+\ldots\ldots+\frac{a}{\varepsilon}\right)-\left[1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2\right].$$

Съ другой же стороны

$$\left(\frac{a}{\varepsilon}+1\right)\left(1+2+3+\ldots\ldots+\frac{a}{\varepsilon}\right)=\frac{\left(\frac{a}{\varepsilon}+1\right)^2\cdot\frac{a}{\varepsilon}}{2}=\frac{(a+\varepsilon)^2\cdot a}{2\varepsilon^3},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2=\frac{\left(2\cdot\frac{a}{\varepsilon}+1\right)\left(\frac{a}{\varepsilon}+1\right)\cdot\frac{a}{\varepsilon}}{2.3}=\frac{(2a+\varepsilon)(a+\varepsilon)a}{2.3.\varepsilon^3},$$

почему и найдется окончательно

$$R=\frac{(a+\varepsilon)^2a}{2\varepsilon^3}-\frac{(2a+\varepsilon)(a+\varepsilon)a}{2.3.\varepsilon^3}=\frac{a(a+\varepsilon)(a+2\varepsilon)}{2.3.\varepsilon^3}.$$

Въ этомъ послѣднемъ выраженіи безконечно малое приращеніе ε должно быть откинуто предъ a, потому что достоинство кандидата можетъ переходить отъ *нуля* до a чрезъ всѣ послѣдовательныя степени величинъ. И такъ, $R=\frac{a^3}{2.3.\varepsilon^3}$ изображаетъ число всѣхъ возможныхъ соединеній различныхъ достоинствъ трехъ кандидатовъ при допущенныхъ выше условіяхъ. Эту величину R можно также представить въ видѣ

$$R=\frac{a^3}{2.3.\varepsilon^3}=\frac{\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y dz}{\varepsilon^3}.$$

Опредѣлимъ теперь суммы X, Y, Z. Мы уже видѣли выше, что всѣ величины перемѣнной x заключены въ столбцахъ (204), когда положимъ въ нихъ $x=a$. Для полученія X должно помножить первый столбецъ на 1, второй на 2, третій на 3,... послѣдній на $\frac{a}{\varepsilon}$, и взять потомъ сумму всѣхъ этихъ произведеній. Такимъ образомъ получимъ

$$\begin{aligned}X=&\left(1+2+3+\ldots\ldots+\frac{a}{\varepsilon}\right)\varepsilon\\&+2\left(2+3+\ldots\ldots+\frac{a}{\varepsilon}\right)\varepsilon\\&+3\left(3+4+\ldots\ldots+\frac{a}{\varepsilon}\right)\varepsilon\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{a}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{\varepsilon}\cdot\varepsilon,\end{aligned}$$

или

$$X=\left[1\cdot\frac{\left(\frac{a}{\varepsilon}+1\right)\frac{a}{\varepsilon}}{2}+2\cdot\frac{\left(\frac{a}{\varepsilon}+2\right)\left(\frac{a}{\varepsilon}-1\right)}{2}+3\cdot\frac{\left(\frac{a}{\varepsilon}+3\right)\left(\frac{a}{\varepsilon}-2\right)}{2}+\ldots+\frac{a}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{\varepsilon}\right]\varepsilon.$$

Чтобъ опредѣлить эту сумму въ конечномъ видѣ, положимъ сперва для простоты $\frac{a}{\varepsilon}=m$. Найдется

$$X=\left[1.(m+1)m+2.(m+2)(m-1)+3.(m+3)(m-2)+\ldots+m.(m+m).1\right]\frac{\varepsilon}{2}.$$

Такъ какъ общій членъ ряда, заключающагося въ квадратныхъ скобкахъ, можетъ быть представленъ въ видѣ

$$n(m+n)(m-\overline{n-1}),$$

то и получимъ

$$X=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\underset{n=1}{\overset{n=m}{\mathrm{S}}}\left[n(m+n)(m-\overline{n-1})\right],$$

гдѣ S означаетъ суммовой знакъ. Но

$$n(m+n)(m-\overline{n-1})=m(m+1).n-n^3+n^2;$$

слѣдовательно

$$X=\frac{\varepsilon}{2}\left[m(m+1)\mathrm{S}(n)-\mathrm{S}(n^3)+\mathrm{S}(n^2)\right].$$

Съ другой же стороны извѣстно, что

$$\mathrm{S}(n)=\Sigma n+n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\mathrm{S}(n^2)=\Sigma n^2+n^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{(2n+1)(n+1)n}{2.3}$$

$$\mathrm{S}(n^3)=\Sigma n^3+n^3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{(n+1)^2n^2}{4};$$

и такъ, положивъ $n=m$, найдется

$$X=\frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{m^2(m+1)^2}{2}-\frac{m^2(m+1)^2}{4}+\frac{(2m+1)(m+1)m}{2.3}\right],$$

или, по сокращеніи,

$$X=\frac{3m^4+10m^3+9m^2+2m}{2.3.4}.\varepsilon=\frac{(3m+1)(m+2)(m+1)m}{2.3.4}.\varepsilon.$$

Когда на мѣсто m подставимъ равную ему величину $\frac{a}{\varepsilon}$, то получимъ

$$X=\frac{3a^4+10a^3.\varepsilon+9a^2.\varepsilon^2+2a.\varepsilon^3}{2.3.4.\varepsilon^3};$$

наконецъ, откидывая въ числителѣ члены, заключающіе безконечно малую величину ε, найдемъ просто

$$X=\frac{a^4}{2.4.\varepsilon^3}.$$

Легко видѣть, что величину X можно представить и въ видѣ

$$X=\frac{a^4}{2.4.\varepsilon^3}=\frac{\int_0^a xdx\int_0^x dy\int_0^y dz}{\varepsilon^3}.$$

И такъ, *среднее* достоинство кандидата A, занимающаго первое мѣсто на запискѣ, будетъ

$$\frac{X}{R}=\frac{\frac{a^4}{2.4.\varepsilon^3}}{\frac{a^3}{2.3.\varepsilon^3}}=3.\frac{a}{4}=\frac{\int_0^a xdx\int_0^x dy\int_0^y dz}{\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y dz}. \qquad (205)$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдется и среднее достоинство $\frac{Y}{R}$ кандидата B, занимающаго второе мѣсто на запискѣ. Для опредѣленія Y должно прежде всего найти всѣ возможныя значенія y, совмѣстныя съ условіями $z\leqq y$, $y\leqq x$, $x>0$ и $x\leqq a$ при всѣхъ измѣненіяхъ z и x. Но мы уже нашли выше, что y, при всѣхъ возможныхъ измѣненіяхъ z, и независимо отъ x, получаетъ слѣдующія величины:

$$\varepsilon,\quad 2\varepsilon,\quad 3\varepsilon\ldots\frac{a}{\varepsilon}.\varepsilon,$$

изъ которыхъ первая имѣетъ мѣсто одинъ разъ, вторая повторяется два раза, третья три раза,... послѣдняя $\frac{a}{\varepsilon}$ разъ. Посмотримъ теперь, сколько разъ члены предъидущаго ряда должны быть повторены, когда припишемъ и перемѣнной x рядъ возможныхъ значеній. И такъ, полагая

$y=$	найдется для x:	число величинъ x:
ε	$\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon\cdots\frac{a}{\varepsilon}.\varepsilon$	$\frac{a}{\varepsilon}$
2ε	$2\varepsilon,\ 3\varepsilon\cdots\frac{a}{\varepsilon}.\varepsilon$	$\frac{a}{\varepsilon}-1$
3ε	$3\varepsilon\cdots\frac{a}{\varepsilon}.\varepsilon$	$\frac{a}{\varepsilon}-2$
...		......
$\frac{a}{\varepsilon}.\varepsilon$	$\frac{a}{\varepsilon}.\varepsilon$	1.

Слѣдовательно, величина y равная ε, войдетъ $\frac{a}{\varepsilon}$ разъ; величина 2ε, $2\left(\frac{a}{\varepsilon}-1\right)$ разъ; величина 3ε, $3\left(\frac{a}{\varepsilon}-2\right)$ разъ, и такъ далѣе до послѣдней величины y, именно до $\frac{a}{\varepsilon}\cdot\varepsilon$, которая войдетъ $\frac{a}{\varepsilon}$ разъ. Поэтому будетъ

$$Y=1^2\cdot\frac{a}{\varepsilon}\cdot\varepsilon+2^2.\left(\frac{a}{\varepsilon}-1\right)\varepsilon+3^2.\left(\frac{a}{\varepsilon}-2\right)\varepsilon+\ldots+\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2\cdot\varepsilon.$$

Для опредѣленія этой суммы, положимъ, какъ выше, $\frac{a}{\varepsilon}=m$; найдемъ

$$Y = \left[1^2.m + 2^2.(m-1) + 3^2.(m-2) + \ldots + m^2.(m-\overline{m-1})\right]\varepsilon.$$

Общій членъ будетъ

$$n^2(m-\overline{n-1}).\varepsilon;$$

слѣдовательно

$$Y = \varepsilon.\overset{n=m}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\left[n^2(m-\overline{n-1})\right] = \varepsilon\left[(m+1)\mathrm{S}(n^2) - \mathrm{S}(n^3)\right].$$

Подставивъ на мѣсто $\mathrm{S}(n^2)$ и $\mathrm{S}(n^3)$ приведенныя выше величины, получимъ

$$Y = \left[\frac{(2m+1)(m+1)^2 m}{2.3} - \frac{(m+1)^2 m^2}{4}\right]\varepsilon$$

$$= \frac{m^4+4m^3+5m^2+2m}{3.4}.\varepsilon = \frac{m(m+1)^2(m+2)}{3.4}.\varepsilon.$$

Наконецъ, замѣнивъ m равною ему величиною $\frac{a}{\varepsilon}$, и уничтоживъ въ числителѣ безконечно малыя величины, найдется просто

$$Y = \frac{a^4}{3.4.\varepsilon^3}, \quad \text{или} \quad Y = \frac{\int_0^a dx \int_0^x y\,dy \int_0^y dz}{\varepsilon^3}.$$

Слѣдовательно, *среднее* достоинство втораго кандидата B опредѣлится формулою:

$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{a^4}{3.4.\varepsilon^3}}{\frac{a^3}{2.3.\varepsilon^3}} = 2.\frac{a}{4} = \frac{\int_0^a dx \int_0^x y\,dy \int_0^y dz}{\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y dz}. \qquad (206)$$

Чтобы вывести среднее достоинство третьяго кандидата C, должно опредѣлить Z, то есть сумму всѣхъ значеній, принимаемыхъ перемѣнною z при прежнихъ условіяхъ. Послѣдовательныя величины z будутъ:

$$\varepsilon, \quad 2\varepsilon, \quad 3\varepsilon \ldots\ldots \frac{a}{\varepsilon}.\varepsilon;$$

теперь слѣдуетъ найти, сколько разъ каждая изъ нихъ повторится. Предположивъ $\frac{a}{\varepsilon} = m$, увидимъ, что ε повторится $\frac{(m+1)m}{2}$ разъ; дѣйствительно, при $z = \varepsilon$, y можетъ получить m значеній: $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon \ldots m\varepsilon$; но при $y = \varepsilon$, x получаетъ значенія $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon \ldots m\varepsilon$, всего m; при $y = 2\varepsilon$, x можетъ имѣть $m-1$ значеній: $2\varepsilon, 3\varepsilon \ldots m\varepsilon$; при $y = 3\varepsilon$, $x = 3\varepsilon, 4\varepsilon \ldots m\varepsilon$, всего $m-2$ значенія, и такъ далѣе до $y = m\varepsilon$, которому соотвѣтствуетъ одно только значеніе $x = m\varepsilon$. Слѣдовательно, при $z = \varepsilon$, число взаимныхъ соединеній достоинствъ y и x будетъ

$$m + (m-1) + (m-2) + \ldots + 1 = \frac{(m+1)m}{2}.$$

При $z = 2\varepsilon$, y получитъ $m-1$ значеній:

$$2\varepsilon, \quad 3\varepsilon \ldots\ldots m\varepsilon;$$

первому изъ нихъ 2ε будетъ соотвѣтствовать $m-1$ значеній для x, именно $2\varepsilon, 3\varepsilon \ldots m\varepsilon$; второму 3ε, $m-2$ значенія для x: $3\varepsilon, 4\varepsilon \ldots m\varepsilon$; и такъ далѣе до $m\varepsilon$, которому соотвѣтствуетъ одна величина x, равная $m\varepsilon$. И такъ, величина $z = 2\varepsilon$, повторится

$$(m-1) + (m-2) + (m-3) + \ldots + 1 = \frac{m(m-1)}{2} \text{ разъ.}$$

Подобнымъ образомъ найдемъ, что величина $z = 3\varepsilon$, повторяется

$$(m-2) + (m-3) + \ldots + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \text{ разъ,}$$

и такъ далѣе до величины $z = m\varepsilon$, входящей только одинъ разъ. И такъ

$$Z = \frac{(m+1)m}{2}.\varepsilon + \frac{m(m-1)}{2}.2\varepsilon + \frac{(m-1)(m-2)}{2}.3\varepsilon + \ldots + m\varepsilon$$

$$= \left[(m+1)m + 2.m(m-1) + 3.(m-1)(m-2) + \ldots + m.2.1\right]\frac{\varepsilon}{2}.$$

Общій членъ этого ряда есть

$$n.(m-\overline{n-2})(m-\overline{n-1}).\frac{\varepsilon}{2},$$

почему

$$Z = \frac{\varepsilon}{2}.\overset{n=m}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\left[n(m-\overline{n-2})(m-\overline{n-1})\right].$$

Но

$$n(m-\overline{n-2})(m-\overline{n-1}) = (m+1)(m+2).n - (2m+3)n^2 + n^3,$$

а слѣдовательно

$$Z = \frac{\varepsilon}{2}\left[(m+1)(m+2)\mathrm{S}(n) - (2m+3)\mathrm{S}(n^2) + \mathrm{S}(n^3)\right].$$

Подставивъ въ это выраженіе приведенныя выше величины для $\mathrm{S}(n)$, $\mathrm{S}(n^2)$, $\mathrm{S}(n^3)$, и замѣнивъ n величиною $m = \frac{a}{\varepsilon}$, получимъ

$$Z = \frac{m^4+6m^3+11m^2+6m}{2.3.4}.\varepsilon = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3.4}.\varepsilon,$$

или

$$Z = \frac{a^4+6a^3\varepsilon+11a^2\varepsilon^2+6a\varepsilon^3}{2.3.4.\varepsilon^3}.$$

Откидывая безконечно малыя величины, найдется просто

$$Z = \frac{a^4}{2.3.4.\varepsilon^4}, \quad \text{или} \quad Z = \frac{\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y z\,dz}{\varepsilon^3}.$$

Слѣдовательно, *среднее* достоинство кандидата C, занимающаго послѣднее мѣсто на запискѣ избирателя, будетъ:

$$\frac{Z}{R}=\frac{\frac{a^4}{2.3.4.c^3}}{\frac{a^3}{2.3.c^3}}=1.\frac{a}{4}=\frac{\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y zdz}{\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y dz}. \qquad (207)$$

Въ силу формулъ (205), (206) и (207) *среднія* достоинства трехъ кандидатовъ A, B и C выразятся числами $3.\frac{a}{4}$, $2.\frac{a}{4}$ и $1.\frac{a}{4}$, соотвѣтственно пропорціональными 3, 2, 1; этимъ оправдывается способъ балотированія, объясненный выше.

Можно замѣтить мимоходомъ, что въ случаѣ трехъ кандидатовъ анализъ вѣроятностей приводитъ къ слѣдующему результату: при совершенной неизвѣстности объ относительномъ достоинствѣ трехъ кандидатовъ A, B, C, на каждаго изъ нихъ приходится, *среднимъ числомъ*, половина *наибольшаго* достоинства, именно $\frac{1}{2}a$; дѣйствительно, между этими тремя кандидатами должно распредѣлить по-ровну сумму $3.\frac{a}{4}+2.\frac{a}{4}+1.\frac{a}{4}=3.\frac{a}{2}$, почему на долю каждаго придется $\frac{1}{2}a$. Если же избиратель размѣстилъ уже кандидатовъ по предполагаемому имъ порядку взаимнаго ихъ достоинства, напримѣръ слѣдующимъ образомъ: ABC, то послѣднему кандидату C должно будетъ приписать, *среднимъ числомъ*, $\frac{1}{4}$ полнаго достоинства, второму B, $\frac{1}{2}$ полнаго достоинства, наконецъ первому A, $\frac{3}{4}$ полнаго достоинства. Въ N° 108 мы распространимъ эти результаты на произвольное число кандидатовъ.

Для примѣра балотированія по способу Борда, положимъ что 100 избирателей балотируютъ трехъ кандидатовъ A, B и C. По отобраніи всѣхъ записокъ оказывается слѣдующій результатъ:

Число записокъ:	*Порядокъ кандидатовъ:*
45	ABC
32	BCA
7	BAC
16	CBA.

По первому взгляду большинство голосовъ будетъ въ пользу кандидата A, потому что онъ занималъ первое мѣсто 45 разъ, между тѣмъ какъ B только 39 разъ, а C 16 разъ. Но если, сообразно съ правиломъ, доказаннымъ выше, составимъ суммы принимая въ расчётъ порядокъ мѣстъ, то получимъ:

Для кандидата: A: $3.45+1.32+2.7+1.16=197$

« « B: $2.45+3.32+3.7+2.16=239$

« « C: $1.45+2.32+1.7+3.16=164$.

Такъ какъ сумма, относящаяся къ кандидату B *наибольшая* изъ трехъ, то онъ долженъ быть предпочтенъ остальнымъ двумъ кандидатамъ A и C, не смотря на то̀, что A повидимому получилъ относительное большинство голосовъ. За B слѣдуетъ по порядку достоинства A, а послѣднимъ будетъ C.

107. Если не будемъ принимать въ расчётъ мѣру средняго достоинства кандидатовъ, выведенную въ предъидущемъ N°, то порядокъ ABC означитъ только, что A достойнѣе B, и B достойнѣе C. Для сокращенія, условимся изображать подобную зависимость знакоположеніемъ $A>B$, $B>C$. Очевидно, что изъ этихъ двухъ предложеній выводится третье $A>C$. Когда же отберемъ записки отъ всѣхъ избирателей, то можно будетъ изъ каждой вывести подобныя три предложенія. Потомъ, по соображеніи числа голосовъ въ пользу каждаго предложенія, обнаружится, въ бо̀льшей части случаевъ, порядокъ достоинства кандидатовъ. Положимъ, напримѣръ, что 50 избирателей подали записки такого содержанія:

18	*избирателей:*	ABC
16	« «	BAC
12	« «	ACB
4	« «	CAB.

Сравнивая сперва A съ B, потомъ A съ C, наконецъ B съ C, найдемъ слѣдующія числа голосовъ въ пользу шести возможныхъ предположеній:

Предложеніе $A>B$ утверждается $18+12+4=34$ голосами, а противное $A<B$ только 16-ью.

Предложеніе $A>C$ утверждается $18+16+12=46$ голосами, а противное $A<C$ только 4-мя.

Предложеніе $B>C$ утверждается $18+16=34$ голосами, а противное $B<C$ только $12+4=16$.

Отсюда слѣдуетъ, что изъ шести предложеній, три, получившія большинство голосовъ, будутъ $A>B$, $A>C$ и $B>C$. Они прямо ведутъ къ порядку ABC, который поэтому и изобразитъ мнѣніе большинства избирателей. Замѣтимъ мимоходомъ, что способъ Борда привелъ бы къ этому самому результату. Дѣйствительно, для кандидата A нашлась бы сумма 130, для B 100, а для C только 70.

Но можетъ иногда случиться, что изъ трехъ предложеній, получившихъ большинство голосовъ, одно будетъ противорѣчить слѣдствію остальныхъ двухъ. Напримѣръ, если бы тѣ же 50 избирателей подали записки вида:

18	*избирателей:*	*BCA*
10	« «	*ABC*
8	« «	*CAB*
8	« «	*ACB*
6	« «	*CBA.*

Изъ нихъ выводимъ:

Предложенія:	*Число голосовъ:*	*Предложенія:*	*Число голосовъ:*
$A > B$	26	$A < B$	24
$A > C$	18	$A < C$	32
$B > C$	28	$B < C$	22.

Предложенія, получившія большинство голосовъ, будутъ $A < C$, $B > C$ и $A > B$. Первыя два ведутъ къ порядку *BCA*, которому очевидно противорѣчитъ послѣднее предложеніе $A > B$. Для разрѣшенія этого противорѣчія, *Кондорсетъ*, въ своемъ *Essai sur l'application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions*, предлагаетъ выводить окончательный результатъ изъ двухъ только предложеній, получившихъ большинство голосовъ, когда эти предложенія приводятъ къ опредѣленному порядку кандидатовъ. Въ противномъ случаѣ надлежитъ между тремя системами, получаемыми чрезъ соединеніе трехъ предложеній по-два, опредѣлить ту систему, которая получила наиболѣе голосовъ въ свою пользу. Эту систему, по Кондорсету, и должно принимать за окончательное мнѣніе избирателей. Такъ въ предъидущемъ примѣрѣ предложенія $A < C$ и $B > C$, получившія большинство голосовъ, именно 32 и 28, ведутъ къ порядку *BCA*.

Если совокупимъ теперь по-два три предложенія

$A < C$	*утверждаемое*	32	*голосами*
$B > C$	« «	28	«
$A > B$	« «	26	«

такъ, чтобы они вели къ опредѣленному порядку кандидатовъ, то получимъ:

$32+28=60$ голосовъ въ пользу предложеній $A<C$, $B>C$, ведущихъ къ порядку *BCA*.
$26+28=54$ голоса въ пользу предложеній $A>B$, $B>C$, ведущихъ къ порядку *ABC*.
$32+26=58$ голосовъ въ пользу предложеній $A<C$, $A>B$, ведущихъ къ порядку *CAB*.

Такъ какъ первая изъ этихъ трехъ системъ утверждается наибольшимъ числомъ голосовъ, то порядокъ *BCA* долженъ быть предпочтенъ остальнымъ двумъ *CAB* и *ABC*.

Если бы къ этому самому примѣру былъ приложенъ способъ Борда, то получили бы

Для	*A*	*сумму:*	$1.18+3.10+2.8+3.8+1.6=94$
«	*B*	«	$3.18+2.10+1.8+1.8+2.6=102$
«	*C*	«	$2.18+1.10+3.8+2.8+3.6=104.$

Порядокъ, опредѣляемый этими суммами, будетъ *CBA*, вмѣсто найденнаго сей-часъ *BCA*. Правда, достоинства кандидатовъ *B* и *C*, изображаемыя числами 102 и 104, мало разнятся между собой, но тѣмъ не менѣе *C* имѣетъ преимущество предъ *B*, и слѣдовательно, по способу балотированія Борда, долженъ быть избранъ. Напротивъ того, дѣйствуя сообразно съ правиломъ Кондорсета, должно будетъ избрать *B*, а не *C*. Представившееся здѣсь обстоятельство показываетъ самымъ яснымъ образомъ, что въ подобныхъ сомнительныхъ случаяхъ, лучше отложить избраніе. Если жъ выборъ кандидата необходимъ, то справедливость требуетъ, чтобы приступлено было къ новому балотированію между *B* и *C*; тогда относительное большинство голосовъ рѣшитъ, который изъ нихъ долженъ быть избранъ.

Что касается до опредѣленія вѣроятности достоинства выборовъ и до другихъ подробностей объ этомъ предметѣ, то мы отсылаемъ къ Трактату Кондорсета: *Essai sur l'application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions* (Discours préliminaire, стр. IXVIJ, а въ самомъ текстѣ, стр. 119 и слѣдующія) и къ отдѣльному Разсужденію подъ заглавіемъ: *Mémoire sur les Elections*, соч. *Daunou* 1803 г. Въ упоминаемыхъ сочиненіяхъ, преимущественно въ первомъ, читатели найдутъ полное развитіе этой любопытной отрасли Прикладнаго Анализа Вѣроятностей.

108. Распространимъ теперь способъ Борда на какое ни есть число кандидатовъ. Пусть будутъ x_1, x_2, $x_3, \ldots x_i$ достоинства, которыя избиратель приписываетъ i балотируемымъ кандидатамъ; x_1 относится къ тому, котораго избиратель считаетъ достойнѣйшимъ изъ всѣхъ, и который поэтому занимаетъ первое мѣсто на запискѣ; x_2 относится къ кандидату, поставленному на второе мѣсто, и такъ далѣе. Если обратимъ вниманіе на предложенное выше рѣшеніе задачи при трехъ кандидатахъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ примемъ въ соображеніе формулы (205), (206) и (207), то безъ малѣйшаго затрудненія будемъ приведены къ слѣдующему заключенію: сумма всѣхъ достоинствъ, которыя избиратель можетъ приписать кандидату, занимающему вообще мѣсто r на его запискѣ, изобразится i-кратнымъ интеграломъ

$$\frac{\int x_r dx_1 dx_2 \dots dx_i}{\varepsilon^i},$$

разумѣя подъ ε, какъ и выше, безконечно малое приращеніе достоинства. Этотъ кратный интегралъ долженъ быть взятъ относительно x_i отъ $x_i = 0$ до $x_i = x_{i-1}$; относительно x_{i-1} отъ $x_{i-1} = 0$ до $x_{i-1} = x_{i-2}$ и такъ далѣе; наконецъ, въ разсужденіи x_1 отъ $x_1 = 0$ до $x_1 = a$, разумѣя подъ a *maximum* достоинства. Совокупность же всѣхъ возможныхъ соединеній достоинствъ $x_1, x_2, x_3 \dots x_i$, при условіяхъ $x_1 \geq 0$, $x_1 \leq a$, $x_1 \geq x_2$, $x_2 \geq x_3$, $x_3 \geq x_4 \dots$, опредѣлится i-кратнымъ интеграломъ

$$\frac{\int dx_1 dx_2 \dots dx_i}{\varepsilon^i},$$

взятымъ между тѣми же предѣлами. Отношеніе двухъ приведенныхъ интеграловъ изобразитъ *среднее достоинство* кандидата, занимающаго мѣсто r на запискѣ избирателя; и такъ, означивъ чрезъ T_r это среднее достоинство, найдется

$$T_r = \frac{\int_0^a \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{i-1}} x_r dx_1 dx_2 \dots dx_i}{\int_0^a \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{i-1}} dx_1 dx_2 \dots dx_i}.$$

По совершеніи означенныхъ весьма простыхъ интегрированій, получимъ

$$T_r = \frac{i-r+1}{i+1} \cdot a, \tag{208}$$

и слѣдовательно

$$T_1 = i \cdot \frac{a}{i+1}, \quad T_2 = (i-1) \cdot \frac{a}{i+1}, \quad T_3 = (i-2) \cdot \frac{a}{i+1}, \dots T_i = 1 \cdot \frac{a}{i+1}.$$

Наблюдая теперь, что $\frac{a}{i+1}$ входитъ множителемъ во всѣ величины $T_1, T_2, T_3 \dots T_i$, мы приведены будемъ къ заключенію, что первому кандидату должно приписать среднее достоинство, пропорціональное i, второму $i-1$, третьему $i-2$ и такъ далѣе до послѣдняго кандидата, противъ имени котораго слѣдуетъ написать 1. Далѣе поступаютъ какъ уже было объяснено выше. Сумма всѣхъ достоинствъ

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_i = i \cdot \frac{a}{2};$$

и такъ, достоинство каждаго кандидата равно, среднимъ числомъ, *половинѣ* полнаго достоинства a. Въ слѣдствіе же опредѣленнаго порядка, занимаемаго кандидатами на запискѣ, относительныя ихъ достоинства распредѣляются по закону, который сей-часъ былъ выведенъ.

Изложенный здѣсь способъ избранія кандидатовъ въ теоретическомъ отношеніи заслуживаетъ предпочтеніе предъ другими. Не смотря на то, онъ рѣдко употребляется, и не безъ основанія, потому что легко подаетъ поводъ къ злоупотребленіямъ со стороны избирателей. Дѣйствительно, можетъ случиться, что нѣсколько избирателей, покровительствуя посредственному кандидату по какимъ либо причинамъ, вовсе независящимъ отъ личныхъ его достоинствъ, и съ другой стороны опасаясь соперничества, поставятъ на послѣднемъ мѣстѣ достойнѣйшаго изъ балотируемыхъ. При такомъ неправильномъ порядкѣ въ именахъ кандидатовъ, даже при незначительномъ числѣ записокъ, лучшій кандидатъ можетъ быть отвергнутъ, въ чёмъ легко удостовѣриться численными примѣрами.

109. Выборъ между нѣсколькими предложеніями или причинами, относящимися къ одному и тому же предмету, можетъ быть разсматриваемъ почти съ той же точки, какъ и избраніе кандидатовъ. Положимъ напримѣръ, что какой либо фактъ или явленіе могло произойти только отъ одной изъ i причинъ $C_1, C_2, C_3 \dots C_i$. Каждый изъ членовъ собранія, обсуживающихъ этотъ фактъ, подаетъ голосъ точно такъ какъ при избраніи кандидата, то есть пишетъ на запискѣ причины $C_1, C_2, C_3 \dots$ по порядку вѣроятностей, которыя онъ имъ приписываетъ; поэтому, первое мѣсто на его запискѣ займетъ та причина, которая, по его убѣжденію, есть наивѣроятнѣйшая изъ всѣхъ; второе, слѣдующая за первой по степени вѣроятности, и такъ далѣе до послѣдней, наименѣе правдоподобной. Пусть будутъ $p_1, p_2, p_3 \dots p_i$ вѣроятности причинъ по порядку ихъ послѣдованія въ запискѣ члена, подающаго голосъ. Ясно, что такая послѣдовательность выражается условіями: $p_1 \geq p_2$, $p_2 \geq p_3, \dots p_{i-1} \geq p_i$. Сверхъ того, такъ какъ по предположенію обсуживаемый фактъ непремѣнно зависитъ отъ одной изъ причинъ $C_1, C_2, C_3 \dots C_i$, то сумма $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_i$ будетъ необходимо равняться достовѣрности или единицѣ. Слѣдовательно

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_i = 1. \tag{209}$$

Разложимъ теперь достовѣрность или единицу на безконечное множество s неизмѣримо малыхъ элементовъ ε, почему $1 = s.\varepsilon$. Въ такомъ предположеніи $p_1, p_2, p_3 \dots p_i$ изобразятся нѣкоторыми кратными числами въ разсужденіи ε. Пусть будетъ

$$p_1 = n_1\varepsilon, \quad p_2 = n_2\varepsilon, \quad p_3 = n_3\varepsilon, \dots p_i = n_i\varepsilon.$$

Уравненіе (209), по раздѣленіи его на ε, доставитъ

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i = s, \tag{210}$$

гдѣ n_1, n_2, $n_3, \ldots n_i$ изображаютъ цѣлыя числа, измѣняющіяся отъ нуля, при чёмъ первое изъ нихъ можетъ достигнуть величины $s = \frac{1}{\varepsilon}$.

На такомъ основаніи, предложимъ себѣ вопросъ: найти *среднюю вѣроятность* P_r той причины, которую избиратель поставилъ на мѣстѣ r въ своей запискѣ. Пусть будетъ S_r сумма всѣхъ возможныхъ значеній вѣроятности p_r при условіяхъ $p_1 \geqq p_2$, $p_2 \geqq p_3 \cdots p_{i-1} \geqq p_i$, выражающихъ, какъ мы уже видѣли, порядокъ правдоподобія причинъ въ мнѣніи члена, подающаго голосъ. Означимъ также чрезъ R совокупность всѣхъ возможныхъ предположеній относительно величинъ p_1, p_2, $p_3, \ldots p_i$, удовлетворяющихъ приведеннымъ сей-часъ условіямъ, и, сверхъ того, уравненію (209). Очевидно, что отношеніе $\frac{S_r}{R}$ изобразитъ искомую *среднюю* вѣроятность причины, занимающей мѣсто r на запискѣ. И такъ

$$P_r = \frac{S_r}{R}. \qquad (211)$$

Займемся сперва опредѣленіемъ величины R. Если, вмѣсто уравненія (209), примемъ въ соображеніе формулу (210), то R изобразитъ число всѣхъ возможныхъ соединеній, при которыхъ сумма i чиселъ, взятыхъ въ ряду 0, 1, 2, 3, 4 . . . ., равна s, но при соблюденіи условій: $n_1 \geqq n_2$, $n_2 \geqq n_3 \cdots n_{i-1} \geqq n_i$. Чтобъ освободиться отъ этихъ послѣднихъ требованій, полагаемъ

$$\begin{aligned}
n_i &= t_i \\
n_{i-1} &= t_i + t_{i-1} \\
n_{i-2} &= t_i + t_{i-1} + t_{i-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n_r &= t_i + t_{i-1} + t_{i-2} + \ldots + t_r \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n_1 &= t_i + t_{i-1} + t_{i-2} + \ldots + t_1,
\end{aligned}$$

гдѣ числа t_i, t_{i-1}, $t_{i-2} \ldots t_1$ всѣ положительныя, которыя, сверхъ того, могутъ обратиться и въ нуль. Сложивъ предъидущія уравненія, получимъ

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_i = 1.t_1 + 2.t_2 + 3.t_3 + \ldots + (i-1)t_{i-1} + i.t_i = s.$$

Пусть будетъ

$$1.t_1 = \mu_1, \quad 2.t_2 = \mu_2, \quad 3.t_3 = \mu_3, \ldots\ldots i.t_i = \mu_i; \qquad (212)$$

найдется уравненіе

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_i = s, \qquad (213)$$

въ которомъ цѣлыя числа μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots \mu_i$ не подчинены уже, какъ n_1, n_2, $n_3 \ldots$, условіямъ $n_1 \geqq n_2$, $n_2 \geqq n_3 \ldots$, и измѣняются отъ 0 до s, независимо одни отъ другихъ.

И такъ, для опредѣленія R должно найти, сколькими способами удовлетворяется уравненіе (213), когда величинамъ μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots \mu_i$ приписываются всѣ возможныя значенія, равныя или неравныя, взятыя въ ряду

$$0, \ 1, \ 2, \ 3 \ldots s.$$

Для этого, разсуждая точно такъ какъ въ N° 35 (ГЛАВА III), составимъ выраженіе

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^s)^i;$$

коэффиціентъ степени x^s въ этомъ разложеніи опредѣлитъ искомую величину R. Но

$$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^s = \frac{1 - x^{s+1}}{1 - x};$$

слѣдовательно

$$(x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^s)^i = \left(\frac{1 - x^{s+1}}{1 - x}\right)^i = (1 - x^{s+1})^i (1 - x)^{-i}.$$

Съ другой же стороны имѣемъ

$$\begin{aligned}
(1 - x^{s+1})^i &= 1 - i.x^{s+1} + \frac{i(i-1)}{1.2}.x^{2s+2} - \ldots \\
(1 - x)^{-i} &= 1 + i.x + \frac{i(i+1)}{1.2}.x^2 + \ldots + \frac{i(i+1)(i+2)\ldots(i+s-1)}{1.2.3\ldots s}.x^s + \ldots
\end{aligned}$$

Перемноживъ эти два выраженія, и замѣтивъ что въ первомъ изъ нихъ всѣ показатели перемѣнной x больше числа s, найдемъ только одинъ членъ

$$\frac{i(i+1)(i+2)\ldots(i+s-1)}{1.2.3\ldots s}.x^s,$$

сопровождаемый степенью x^s. И такъ

$$R = \frac{i(i+1)(i+2)\ldots(i+s-1)}{1.2.3\ldots s} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)\ldots(s+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)}.$$

Такъ какъ число s, по предположенію, будетъ безконечно большое, то произведеніе $(s+1)(s+2)\ldots(s+i-1)$, въ которомъ i означаетъ ограниченную величину, приведется просто къ s^{i-1}. Слѣдовательно

$$R = \frac{s^{i-1}}{1.2.3\ldots(i-1)} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)}.\frac{1}{\varepsilon^{i-1}}, \qquad (214)$$

наблюдая что $s = \frac{1}{\varepsilon}$.

Для опредѣленія суммы S_r, найдемъ сперва общее выраженіе вѣроятности p_r въ функціи чиселъ μ_1, μ_2, $\mu_3 \ldots i$ и r. Если въ уравненіе $p_r = n_r.\varepsilon$ подставимъ на мѣсто n_r величину

$$n_r = t_i + t_{i-1} + t_{i-2} + \ldots + t_r,$$

и примемъ въ соображеніе уравненіе (212), то получимъ

$$p_r = \left(\frac{\mu_i}{i} + \frac{\mu_{i-1}}{i-1} + \frac{\mu_{i-2}}{i-2} + \dots + \frac{\mu_r}{r}\right)\varepsilon. \quad (215)$$

Теперь, для опредѣленія S_r надобно найти сумму всѣхъ возможныхъ измѣненій, которымъ выраженіе (215) можетъ подвергнуться въ слѣдствіе различныхъ перемѣнъ, происходящихъ въ числахъ μ_i, μ_{i-1}, $\mu_{i-2}, \dots \mu_r$. Но, замѣтимъ, что каждое изъ чиселъ $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots \mu_i$ получаетъ одинаковое число одинаковыхъ значеній, потому что всѣ они, въ силу уравненія (213), подчинены одному условію, именно, чтобы сумма ихъ равнялась s. Слѣдовательно суммы $\overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_i)$, $\overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_{i-1}) \dots \overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_r) \dots \overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_1)$ будутъ всѣ равны между собою. Съ другой же стороны, такъ какъ первое изъ уравненій (214) приводитъ къ $\frac{s^{i-1}}{1.2.3.\dots(i-1)}$ соединеніямъ, и каждое изъ нихъ доставляетъ для суммы $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\dots+\mu_i$ величину s, то сложивъ всѣ эти равенства получимъ

$$\overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_1)+\overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_2)+\dots+\overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_i) = \frac{s^{i-1}}{1.2.3.\dots(i-1)}.s.$$

По причинѣ же тожества всѣхъ частныхъ суммъ $\overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_1)$, $\overset{s}{\underset{0}{\text{S}}}(\mu_2)\dots$, каждая изъ нихъ будетъ равна

$$\frac{s^{i-1}}{1.2.3.\dots(i-1)}.\frac{s}{i}.$$

Слѣдовательно

$$\text{S}(p_r) = S_r = \frac{s^{i-1}}{1.2.3.\dots(i-1)}.\frac{s}{i}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-2} + \dots + \frac{1}{r}\right).\varepsilon.$$

Наконецъ, въ силу уравненій (211) и (214), получимъ

$$P_r = \frac{S_r}{R} = \frac{s}{i}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-2} + \dots + \frac{1}{r}\right).\varepsilon,$$

или, вспомнивъ что $s.\varepsilon = 1$,

$$P_r = \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-2} + \dots + \frac{1}{r}\right).\frac{1}{i}. \quad (216)$$

Полагая послѣдовательно $r = i,\ i-1,\ i-2,\ i-3, \dots$ найдется

$$P_i = \frac{1}{i}.\frac{1}{i}$$

$$P_{i-1} = \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1}\right).\frac{1}{i}$$

$$P_{i-2} = \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-2}\right).\frac{1}{i}$$

$$P_{i-3} = \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-2} + \frac{1}{i-3}\right).\frac{1}{i}$$

....

Если обратимъ вниманіе на то что $\frac{1}{i}$ входитъ общимъ множителемъ во всѣ эти выраженія, изображающія среднія вѣроятности причинъ въ томъ порядкѣ правдоподобія, какой во мнѣніи избирателя имъ приличествуетъ, то въ правѣ будемъ вывести слѣдующее общее заключеніе: когда члены какого либо собранія, обсудивъ предложенный на ихъ разсмотрѣніе фактъ, несомнѣнно зависящій отъ одной изъ нѣсколькихъ извѣстныхъ причинъ, подаютъ голоса на запискѣ, и пишутъ всѣ причины въ порядкѣ, который признаютъ соотвѣтствующимъ степени ихъ вѣроятности, то мнѣніе собранія обнаружится слѣдующимъ образомъ: положимъ, что фактъ зависитъ отъ одной изъ i извѣстныхъ причинъ; на каждой запискѣ, противъ послѣдней причины пишемъ $\frac{1}{i}$, противъ предпослѣдней сумму $\frac{1}{i}+\frac{1}{i-1}$, противъ третей отъ конца $\frac{1}{i}+\frac{1}{i-1}+\frac{1}{i-2}$ и такъ далѣе до той, которая занимаетъ первое мѣсто. Сложивъ потомъ числа, относящіяся къ каждой возможной причинѣ, получится столько суммъ, сколько различныхъ причинъ. Наибольшая изъ этихъ суммъ будетъ соотвѣтствовать правдоподобнѣйшей причинѣ разбираемаго факта во мнѣніи лицъ, подававшихъ записки.

Объяснимъ это правило численнымъ примѣромъ. Положимъ, что четыре человѣка A, B, C, D взяты по подозрѣнію, и извѣстно съ достовѣрностію, что одинъ изъ нихъ совершилъ какое либо преступленіе. Изслѣдованіе дѣла поручено собранію, состоящему изъ 20 членовъ. По отобраніи всѣхъ возможныхъ показаній и свидѣтельствъ, и взвѣсивъ всѣ обстоятельства дѣла, члены подаютъ записки, въ которыхъ имена четырехъ подсудимыхъ написаны въ порядкѣ предполагаемой виновности; первое мѣсто занимаетъ тотъ, на котораго, въ мнѣніи члена, падаетъ сильнѣйшее подозрѣніе въ учиненіи преступленія, и такъ далѣе до четвертаго, противъ котораго доказательства самыя слабыя. По вскрытіи записокъ оказывается:

8	*членовъ:*	*ADBC*
7	« «	*DACB*
5	« «	*BCDA.*

Чтобы рѣшить, кто изъ A, B, C, D въ общемъ мнѣніи 20 членовъ съ бо́льшею вѣроятностію признается виновнымъ въ преступленіи, составляемъ для всѣхъ подсудимыхъ суммы по предложенному выше правилу. Противъ имени подсудимаго, занимающаго четвертое мѣсто, пишемъ дробь $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$; противъ третьяго $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$; противъ втораго $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{12}$; наконецъ, противъ перваго $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{25}{12}$. Такимъ образомъ найдутся для обвиняемыхъ слѣдующія числа:

$$\text{Для } A \ldots \frac{25}{12}\cdot 8+\frac{13}{12}\cdot 7+\frac{3}{12}\cdot 5 = 25\frac{1}{2}$$

$$« \quad B \ldots \frac{7}{12}\cdot 8+\frac{3}{12}\cdot 7+\frac{25}{12}\cdot 5 = 16\frac{5}{6}$$

$$« \quad C \ldots \frac{3}{12}\cdot 8+\frac{7}{12}\cdot 7+\frac{13}{12}\cdot 5 = 11\frac{1}{2}$$

$$« \quad D \ldots \frac{13}{12}\cdot 8+\frac{25}{12}\cdot 7+\frac{7}{12}\cdot 5 = 26\frac{1}{6}.$$

Такъ какъ наибольшая сумма относится къ подсудимому D, то и слѣдуетъ заключить, что во мнѣніи членовъ, D преимущественно предъ A, B и C долженъ быть подозрѣваемъ въ преступленіи.

110. Окончимъ Главу приложеніемъ Анализа Вѣроятностей къ Судопроизводству. Важность этого вопроса требуетъ нѣкоторыхъ предварительныхъ подробностей и замѣчаній, которыя, бо̀льшею частію, относятся ко всѣмъ приложеніямъ, уже изложеннымъ въ предъидущихъ нумерахъ этой самой Главы.

Рѣшеніе собраніемъ судей какого либо дѣла уголовнаго, гражданскаго или другаго, имѣетъ большое сходство съ вопросомъ о свидѣтельствахъ. Дѣйствительно, если рѣчь идетъ, напримѣръ, объ обвиняемомъ, на котораго падаетъ подозрѣніе въ учиненіи какого либо преступленія, то виновность подсудимаго можно принимать за свидѣтельствуемый фактъ, справедливый или ложный. Прежде нежели судьи постановятъ приговоръ, подлинность этого факта утверждается нѣкоторою вѣроятностію, зависящею отъ показаній, предварительно отобранныхъ объ дѣлѣ, и отъ первоначальнаго его разбора, точно такъ какъ въ свидѣтельствахъ разсматриваемое событіе имѣетъ собственную свою вѣроятность. Послѣ рѣшенія, произнесеннаго судьями, вѣроятность виновности подсудимаго вообще перемѣнится, равно какъ и собственная вѣроятность факта послѣ свидѣтельства объ немъ. Внимательное обсужденіе дѣла по предварительному слѣдствію и соображеніе всѣхъ обстоятельствъ, сопровождавшихъ происшествіе, приведетъ судей къ болѣе вѣрному взгляду на предметъ; такимъ образомъ измѣнится первоначальная вѣроятность виновности подсудимаго, подобно тому какъ совокупность нѣсколькихъ свидѣтельствъ перемѣняетъ значеніе собственной вѣроятности свидѣтельствуемаго факта.

Собранія, рѣшающія большинствомъ голосовъ какой либо вопросъ, могутъ быть весьма разнообразны какъ по составу, такъ и по назначенію. Напримѣръ, собраніе можетъ быть созвано для составленія новыхъ законовъ или уложеній; и въ этомъ случаѣ предметы, подлежащіе обсужденію членовъ, бываютъ весьма различны; законы могутъ быть граж-

данскіе, военные, уголовные и проч. Собраніе созывается также для рѣшенія дѣла и произнесенія приговора надъ обвиняемымъ въ какомъ либо проступкѣ или преступленіи, болѣе или менѣе тяжкомъ. Однимъ словомъ, эта задача, разсматриваемая въ обширномъ смыслѣ, допускаетъ столько разнообразія и неуловимыхъ оттѣнковъ, что невозможно подчинить её строгому математическому анализу. Но и здѣсь, какъ въ предъидущихъ приложеніяхъ, Анализъ Вѣроятностей послужитъ намъ для приблизительной оцѣнки степени довѣрія къ Судейскимъ рѣшеніямъ при извѣстномъ составѣ Суда и при данномъ большинствѣ голосовъ постановленнаго приговора.

Приложеніемъ Анализа Вѣроятностей къ Судопроизводству занимались преимущественно *Кондорсетъ**), *Лапласъ*, *Остроградскій***) и *Поассонъ*, который напечаталъ въ 1837 году особый Трактатъ объ этомъ предметѣ подъ заглавіемъ: *Recherches sur la Probabilité des Jugements.* Взглядъ Поассона на аналитическое рѣшеніе вопроса объ судейскихъ опредѣленіяхъ, полнота его труда, примѣчательные результаты, выведенные изъ многочисленныхъ статистическихъ данныхъ, по справедливости обратили особенное вниманіе на изданное имъ сочиненіе. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ придерживаться воззрѣнія и аналитическихъ пріёмовъ Французскаго математика, предложенныхъ имъ въ упомянутой сей-часъ книгѣ.

Для бо̀льшей опредѣлительности полагаемъ, что разсматриваются только рѣшенія уголовныхъ дѣлъ. Выведенныя въ этомъ предположеніи правила и формулы будутъ вообще относиться и ко всякимъ другимъ дѣламъ; но родъ рѣшаемаго дѣла повлечетъ за собою измѣненіе мѣры наказанія, а это самое, безъ сомнѣнія, будетъ имѣть вліяніе на строгость судей, и слѣдовательно на рѣшительность приговора.

Постараемся теперь изложить съ возможною ясностію въ чёмъ собственно должно состоять математическое рѣшеніе вопроса о вѣроятности судейскихъ приговоровъ. Прежде всего замѣтимъ, что виновность подсудимаго никогда не можетъ быть доказана съ математическою точностію; дѣйствительно, самое признаніе обвиняемаго въ учиненіи преступленія, не будетъ безусловнымъ доказательствомъ его виновности, потому что подсудимый, по какимъ либо причинамъ, могъ обвинить себя умышленно. Подобные случаи конечно рѣдки, но возможность ихъ неоспорима. И такъ, судья или присяжный, произнося приговоръ о виновности подсудимаго, имѣетъ въ виду только значительную степень вѣроятности,

---

*) *Essai sur l'application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions*, 1785 г.

**) *Extrait d'un mémoire sur la probabilité des erreurs des tribunaux.* Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de S.-Pétersbourg, VI Série, Tome III, 1836; въ отдѣлѣ *Bulletin Scientifique.*

что преступленіе дѣйствительно совершено имъ, а не другимъ лицомъ. Какъ же велика должна быть эта вѣроятность, чтобъ обезпечить въ надлежащей степени невинныхъ отъ несправедливаго приговора? Вотъ вопросъ весьма важный для человѣчества, и на который, къ сожалѣнію, невозможно отвѣчать совершенно удовлетворительно. *Кондорсетъ*, и послѣ него *Лапласъ*, придали этому самому вопросу болѣе опредѣлительности, предложивъ его въ слѣдующемъ видѣ: доказательство виновности подсудимаго имѣетъ-ли достаточную степень вѣроятности для того, чтобы общество потерпѣло менѣе зла отъ ошибочнаго приговора судей, обвиняющихъ невиннаго, чѣмъ отъ оправданія виновнаго? Освобожденіе преступника повлечетъ вообще за собою возвращеніе его въ общество, и нерѣдко новыя съ его стороны преступленія. Кромѣ того, примѣръ ненаказности можетъ побудить и другихъ людей къ проступкамъ, отъ которыхъ удерживала бы ихъ боязнь подвергнуться наказанію. Но какъ опредѣлить эту достаточную степень вѣроятности? Вотъ нравственный вопросъ, безусловное рѣшеніе котораго, повторяемъ, недоступно для насъ. Тѣмъ не менѣе однакожъ, для обезпеченія общественной безопасности, всякій судейскій приговоръ, и въ особенности по уголовному дѣлу, долженъ быть основанъ хотя на приблизительномъ соображеніи съ этою вѣроятностію.

Смотря съ такой точки на судейскія опредѣленія, легко составить себѣ ясное понятіе о томъ, что̀ должно разумѣть подъ приговорами *виновенъ* и *невиненъ*. Уже замѣчено выше, что безусловный приговоръ *виновенъ* или *невиненъ* почти невозможенъ. Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, судья довольствуется бо̀льшею или мѐньшею степенью вѣроятности, что подсудимый виновенъ или невиненъ. И такъ, когда судья осуждаетъ подсудимаго, это значитъ, что по нравственному его убѣжденію, вѣроятность виновности достигла уже той степени, при которой безопасность общества требуетъ отчужденія подсудимаго. При такомъ взглядѣ на предметъ, ошибочность приговора можетъ произойти отъ двухъ различныхъ причинъ: во первыхъ оттого, что судья оцѣнитъ невѣрно, умышленно или неумышленно, доказательства въ пользу или противъ обвиняемаго; во вторыхъ, отъ произвола судьи, принимающаго слишкомъ высоко или слишкомъ низко предѣлъ вѣроятности, требуемый для обвиненія подсудимаго. Этотъ предѣлъ, даже самъ по себѣ, подверженъ значительнымъ измѣненіямъ, зависящимъ и отъ обстоятельствъ разсматриваемаго дѣла, и отъ рода его. Такъ, напримѣръ, онъ долженъ быть несравненно ниже для частыхъ преступленій, болѣе опасныхъ для общества, чѣмъ для другихъ, не имѣющихъ такого вреднаго вліянія на общественную безопасность

Точное понятіе, которое мы должны составить себѣ объ результатахъ Анализа Вѣроятностей, не разъ уже выраженное въ этомъ сочиненіи, должно привести насъ къ заключенію, что и въ судейскихъ приговорахъ выводы математической теоріи могутъ имѣть желаемую степень приблизительности тогда только, когда принимаемъ въ расчётъ весьма значительное число дѣлъ. Результатъ теоріи, въ разсужденіи одного дѣла, будетъ только *среднимъ результатомъ*, и, во многихъ случаяхъ, можетъ значительно удаляться отъ истиннаго. И такъ, повторяемъ, всё что̀ будетъ выведено далѣе, должно принимать за средній результатъ весьма значительнаго числа рѣшенныхъ дѣлъ, а не относить найденнаго вывода къ отдѣльному приговору.

Сообразивъ сдѣланныя выше замѣчанія, вопросъ о судейскихъ опредѣленіяхъ вообще, слѣдуя Поассону, можетъ быть предложенъ въ такомъ видѣ: *По извѣстному числу судей или присяжныхъ, произносящихъ рѣшеніе, и по данному большинству голосовъ, опредѣлить при весьма значительномъ числѣ дѣлъ:* 1° *вѣроятное отношеніе оправданныхъ и осужденныхъ къ полному числу подсудимыхъ, и,* 2° *вѣроятность ошибочности судейскаго приговора по дѣлу, взятому на-удачу изъ рѣшенныхъ уже дѣлъ, или изъ тѣхъ, которыя будутъ рѣшены впослѣдствіи.*

Аналитическія формулы, относящіяся къ этому вопросу, заключаютъ въ себѣ двѣ величины, которыя зависятъ отъ нравственнаго состоянія страны, отъ вида уголовнаго Судопроизводства, отъ образованности и искусства судей. Одна изъ нихъ изображаетъ вѣроятность, что уголовный судья, взятый на-удачу, не ошибется въ произносимомъ имъ рѣшеніи; другая означаетъ вѣроятность виновности подсудимаго въ то̀ время, когда онъ предается суду. Статистическія данныя, употребленныя Поассономъ для опредѣленія этихъ двухъ элементовъ, были слѣдующія: 1° отношеніе числа осужденныхъ большинствомъ, не мѐньшимъ семи голосовъ противъ пяти, къ полному числу подсудимыхъ; 2° отношеніе числа осужденныхъ ровно семью голосами противъ пяти, къ полному же числу подсудимыхъ.

Поассонъ, принявъ данныя, помѣщенныя въ *Comptes généraux de l'Administration de la Justice criminelle*, за шесть лѣтъ, отъ 1825 до 1830 года, нашелъ слѣдующіе результаты: изобразивъ чрезъ u вѣроятность, что уголовный судья, взятый на-удачу, не ошибется въ своемъ приговорѣ, а чрезъ k вѣроятность виновности подсудимаго до судейскаго опредѣленія, то есть въ то̀ время, когда обвиняемый предается суду, будетъ:

$$u = 0{,}6786, \qquad k = 0{,}5354.$$

По дѣламъ гражданскимъ, величины этихъ элементовъ нѣсколько больше. Основываясь на приведенныхъ значеніяхъ вѣроятностей u и k, довольно слабыхъ, можно бы, повиди-

мому, вывести слѣдствіе, что изъ весьма большаго числа судейскихъ рѣшеній, нѣкоторыя будутъ принадлежать къ ошибочнымъ. Но изъ этого не слѣдуетъ заключить, чтобы всѣ ошибочныя рѣшенія относились къ невинно-осужденнымъ, или къ виновнымъ, оправданнымъ Судомъ. Бо́льшею частію погрѣшительность приговора будетъ состоять въ томъ, что вѣроятность виновности осужденнаго была слабѣе вѣроятности, требуемой для обезпеченія общественной безопасности, какъ это было выше объяснено. Что́ же касается до невинно-осужденныхъ, то подобные примѣры должно считать чрезвычайно рѣдкими случайностями.

Изложивъ общія начала вопроса о судейскихъ опредѣленіяхъ, мы предложимъ теперь главныя его математическія основанія.

111. Положимъ сперва, что приговоръ произносится однимъ только судьей или присяжнымъ. Пусть будетъ k первоначальная вѣроятность виновности подсудимаго, зависящая отъ предварительнаго слѣдствія или допроса, который предшествовалъ преданію обвиняемаго суду. Изобразимъ чрезъ u вѣроятность, что присяжный не ошибется въ своемъ голосѣ, а чрезъ γ вѣроятность, что подсудимый будетъ обвиненъ*). Величину u, какъ въ вопросѣ о свидѣтельствахъ, условимся называть *правдивостію* присяжнаго. Осужденіе обвиняемаго произойдетъ въ двухъ предположеніяхъ: 1° если онъ дѣйствительно виновенъ, и судья не ошибется, или 2° если подсудимый невиненъ, а судья ошибется. Вѣроятность перваго предположенія есть ku, а втораго $(1-k)(1-u)$; слѣдовательно

$$\gamma = ku+(1-k)(1-u). \qquad (217)$$

Противная вѣроятность, или вѣроятность что подсудимый будетъ оправданъ, равняется $1-\gamma$. Эту самую величину получимъ взявъ сумму двухъ сложныхъ вѣроятностей $k(1-u)$ и $(1-k)u$; первая соотвѣтствуетъ предположенію, что подсудимый виновенъ, а судья ошибается, вторая, что подсудимый невиненъ и судья не ошибается.

Если уравненію (217) дадимъ видъ

$$\gamma = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2k-1)(2u-1),$$

то усмотримъ, что вѣроятность осужденія подсудимаго болѣе или менѣе $\frac{1}{2}$ смотря по тому, будутъ ли множители $2k-1$ и $2u-1$ съ одинакими или съ противными знаками, или, иначе, будутъ ли величины k и u въ одно время больше или меньше $\frac{1}{2}$.

*) Мы удерживаемъ всѣ означенія, употребленныя *Пуассономъ* для удобности тѣхъ читателей, которые пожелаютъ почерпнуть въ его книгѣ подробнѣйшія свѣдѣнія въ этомъ предметѣ.

По постановленіи судьей приговора, вѣроятность виновности подсудимаго вообще измѣнится. Пусть будетъ p эта новая вѣроятность въ случаѣ обвиненія. Такъ какъ вѣроятность осужденія, при виновности подсудимаго, есть ku, а при его невинности, $(1-k)(1-u)$, то по N° 52 получимъ

$$p = \frac{ku}{ku+(1-k)(1-u)}. \qquad (218)$$

Когда подсудимый оправданъ, то вѣроятность его невинности, которую изобразимъ чрезъ q, опредѣлится формулою

$$q = \frac{(1-k)u}{(1-k)u+k(1-u)}. \qquad (219)$$

Дѣйствительно, $(1-k)u$ означаетъ вѣроятность, что при невинности подсудимаго, онъ будетъ оправданъ, а $k(1-u)$ вѣроятность, что при виновности его, судья ошибется.

Изъ послѣднихъ двухъ формулъ, въ силу уравненія (217), выведемъ непосредственно

$$p = \frac{ku}{\gamma}, \qquad q = \frac{(1-k)u}{1-\gamma},$$

откуда

$$u = p\gamma+q(1-\gamma). \qquad (220)$$

Предъидущія формулы заключаютъ въ себѣ полное рѣшеніе вопроса въ томъ случаѣ, когда приговоръ произносится однимъ судьей; легко видѣть тожество этихъ результатовъ съ тѣми, которые выведены въ N° 100 для вѣроятности факта, утверждаемаго однимъ свидѣтелемъ. Приведемъ теперь нѣкоторыя слѣдствія, проистекающія изъ этихъ формулъ.

Если изъ уравненія (217) выведемъ величины $u-\gamma$ и $1-u-\gamma$, то получимъ

$$u-\gamma = (1-k)u-(1-k)(1-u) = (1-k)(2u-1)$$
$$1-u-\gamma = -k(2u-1);$$

подставляя эти величины въ выраженія для p и q, написанныя въ видѣ

$$p = \frac{ku}{\gamma} = k+\frac{k(u-\gamma)}{\gamma}$$

$$q = \frac{(1-k)u}{1-\gamma} = 1-k-\frac{(1-k)(1-u-\gamma)}{1-\gamma},$$

получимъ

$$p = k+\frac{k(1-k)(2u-1)}{\gamma}, \qquad q = 1-k+\frac{k(1-k)(2u-1)}{1-\gamma}. \qquad (221)$$

Эти формулы показываютъ, что новыя вѣроятности p и q виновности подсудимаго въ случаѣ осужденія, и невинности его въ случаѣ оправданія, будутъ болѣе первоначальныхъ вѣроятностей k и $1-k$ когда $2u-1>0$ или $u>\frac{1}{2}$, то есть, когда правдивость u судьи,

или вѣроятность что онъ не ошибется, превышаетъ дробь $\frac{1}{2}$ *). Противное случится, когда $u<\frac{1}{2}$. При $u=\frac{1}{2}$, новыя вѣроятности p и q равны прежнимъ k и $1-k$.

Если положимъ $k=\frac{1}{2}$, то формулы (218) и (219) доставятъ $p=u$ и $q=u$. И дѣйствительно, такъ какъ начальная вѣроятность k виновности, а также и невинности подсудимаго, равна $\frac{1}{2}$, то, до произнесенія приговора, мы не имѣемъ никакой причины полагать, чтобы обвиняемый былъ скорѣе виновенъ чѣмъ невиненъ; слѣдовательно, вѣроятность виновности подсудимаго, послѣ приговора, не можетъ быть иная, какъ только самая вѣроятность, что судья не ошибается.

Возьмемъ еще $k=1$; это очевидно значитъ, что виновность подсудимаго, прежде суда, не подлежитъ никакому сомнѣнію. Въ этомъ случаѣ найдется $p=1$, $q=0$; слѣдовательно, какова бы ни была вѣроятность u, что судья не ошибается, и каковъ бы ни былъ его приговоръ, во всякомъ случаѣ остается достовѣрнымъ, что подсудимый виновенъ. Равнымъ образомъ, когда *a priori* достовѣрно, что подсудимый невиненъ, или что $k=0$, то найдется $p=0$, $q=1$. Что же касается до статочности γ обвиненія, то въ первомъ случаѣ, именно когда $k=1$, получимъ въ силу уравненія (217), $\gamma=u$, а во второмъ, при $k=0$, $\gamma=1-u$.

112. Положимъ теперь, что послѣ произнесеннаго рѣшенія первымъ судьей, дѣло подсудимаго подвергаютъ разсмотрѣнію втораго судьи. Изобразимъ чрезъ u' вѣроятность, что второй судья не ошибется въ своемъ приговорѣ, а чрезъ γ' вѣроятность, что подсудимый, бывъ уже обвиненъ первымъ судьей, будетъ осужденъ и вторымъ. Сверхъ того, означимъ соотвѣтственно чрезъ c, b, a вѣроятности обвиненія подсудимаго обоими судьями, обвиненія однимъ и оправданія другимъ, наконецъ оправданія обоими.

Удержавъ означенія предъидущаго N°, очевидно получимъ

$$c=\gamma\gamma' \qquad \text{и} \qquad \gamma'=pu'+(1-p)(1-u'),$$

---

*) У Поассона, въ упомянутомъ выше сочиненіи (стр. 321), вторая изъ формулъ (221) написана неправильно; послѣдній ея членъ $\frac{k(1-k)(2u-1)}{1-\gamma}$ имѣетъ у него отрицательный знакъ вмѣсто положительнаго, почему, сложивъ уравненія (221), соотвѣтственно помноженныя на γ и $1-\gamma$, онъ получилъ ошибочную формулу

$$p\gamma+q(1-\gamma)=k\gamma+(1-k)(1-\gamma).$$

Въ несправедливости этого равенства легко удостовѣриться и непосредственно замѣтивъ во первыхъ, что оно, въ силу формулы (220), приметъ видъ $u=k\gamma+(1-k)(1-\gamma)$. Если же изъ этого уравненія вычтемъ (217), то найдемъ

$$u-\gamma=-k(u-\gamma)+(1-k)(u-\gamma), \qquad \text{или} \qquad 2k(u-\gamma)=0.$$

изъ чего слѣдовало бы заключить, что $k=0$ или $u=\gamma$, чего вообще допустить невозможно.

ибо, послѣ перваго приговора, вѣроятность k виновности подсудимаго должна быть замѣнена новою вѣроятностію p, а правдивость u, относящаяся къ первому судьѣ, правдивостію u' втораго судьи. Слѣдовательно

$$c=\gamma pu'+\gamma(1-p)(1-u').$$

Но какъ въ силу уравненія $p=\frac{ku}{\gamma}$ имѣемъ

$$\gamma p=ku \qquad \text{и} \qquad \gamma(1-p)=\gamma\left(1-\frac{ku}{\gamma}\right)=\gamma-ku,$$

а въ силу формулы (217) $\gamma-ku=(1-k)(1-u)$, то и получимъ окончательно

$$c=kuu'+(1-k)(1-u)(1-u').$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдется

$$a=k(1-u)(1-u')+(1-k)uu'.$$

Для опредѣленія вѣроятности b, что подсудимый будетъ обвиненъ однимъ судьей, а оправданъ другимъ, должно найти отдѣльно вѣроятности этой случайности въ двухъ предположеніяхъ, именно: 1° первый судья обвинилъ, второй оправдалъ; 2° второй судья обвинилъ, а первый оправдалъ. Сумма этихъ двухъ вѣроятностей опредѣлитъ b.

Пусть будетъ γ_1 вѣроятность, что второй судья обвинитъ подсудимаго, когда первый оправдалъ его. Произведеніе $(1-\gamma)\gamma_1$ изобразитъ вѣроятность такого противорѣчащаго приговора. Напротивъ того, вѣроятность что первый судья обвинитъ подсудимаго, а второй оправдаетъ его, выразится произведеніемъ $\gamma(1-\gamma_1)$. Сумма $(1-\gamma)\gamma_1+\gamma(1-\gamma_1)$ будетъ равна b.

Для опредѣленія γ_1 замѣчаемъ, что по оправданіи подсудимаго первымъ судьей, вѣроятность его невинности обратится въ q, а виновности, въ $1-q$. Но какъ вѣроятность, что второй судья не ошибется въ своемъ приговорѣ есть u', то руководствуясь сужденіями, служившими для вывода формулы (217), получимъ

$$\gamma_1=(1-q)u'+q(1-u').$$

Подставимъ теперь въ это уравненіе на мѣсто q и $1-q$ величины

$$q=\frac{(1-k)u}{1-\gamma}, \qquad 1-q=1-\frac{(1-k)u}{1-\gamma};$$

найдемъ

$$(1-\gamma)\gamma_1=\left[1-\gamma-(1-k)u\right]u'+(1-k)(1-u')u.$$

Съ другой же стороны, въ силу формулы (217), имѣемъ

$$1-\gamma-(1-k)u=1-ku-(1-k)(1-u)-(1-k)u=k(1-u),$$

почему и получимъ

$$(1-\gamma)\gamma_1=k(1-u)u'+(1-k)(1-u')u.$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ

$$1-\gamma_{,}=p(1-u')+(1-p)u',$$

откуда

$$\gamma(1-\gamma_{,})=\gamma p(1-u')+\gamma(1-p)u'.$$

Но

$$\gamma p=ku,\qquad \gamma(1-p)=\gamma-ku=(1-k)(1-u);$$

слѣдовательно

$$\gamma(1-\gamma_{,})=k(1-u')u+(1-k)(1-u)u',$$

и наконецъ

$$b=(1-\gamma)\gamma_{,}+\gamma(1-\gamma_{,})=(1-u)u'+(1-u')u.$$

Замѣтимъ, что эта вѣроятность b противорѣчащаго рѣшенія двухъ судей независима отъ величины k, то есть отъ вѣроятности, что подсудимый виновенъ въ то̀ время, когда онъ предается суду. То̀ же самое относится къ вѣроятности согласнаго рѣшенія обоихъ судей при обвиненіи и при оправданіи подсудимаго. Дѣйствительно, вѣроятность согласнаго опредѣленія судей будетъ $c+a$; подставляя вмѣсто c и a выведенныя выше величины, найдемъ сумму

$$c+a=kuu'+(1-k)(1-u)(1-u')+k(1-u)(1-u')+(1-k)uu'$$
$$=uu'+(1-u)(1-u'),$$

независимую отъ k. Что̀ же касается до суммы $c+b+a$, то она очевидно должна быть равна 1; и въ самомъ дѣлѣ

$$c+b+a=(1-u)u'+(1-u')u+uu'+(1-u)(1-u')=1.$$

По извѣстнымъ рѣшеніямъ двухъ судей, очень легко опредѣлить новыя значенія вѣроятностей виновности и невинности подсудимаго. Положимъ, напримѣръ, что первый и второй судья обвинили подсудимаго, и пусть въ этомъ предположеніи p' означаетъ вѣроятность его виновности. Ясно, что для полученія p' стоитъ только въ формулѣ (218), вмѣсто k и u, поставить соотвѣтственно p и u'. Такимъ образомъ получимъ

$$p'=\frac{pu'}{pu'+(1-p)(1-u')};$$

если же вмѣсто p напишемъ равную величину $\frac{ku}{\gamma}$, и примемъ въ расчётъ уравненіе (217), то найдемъ окончательно

$$p'=\frac{kuu'}{kuu'+(1-k)(1-u)(1-u')}.$$

Вѣроятность невинности подсудимаго въ разсматриваемомъ случаѣ очевидно будетъ $1-p'$.

Когда судьи оправдываютъ подсудимаго, то изобразивъ чрезъ q' новую вѣроятность его невинности, получимъ въ силу формулы (219)

$$q'=\frac{qu'}{qu'+(1-q)(1-u')}=\frac{(1-k)uu'}{(1-k)uu'+k(1-u)(1-u')},$$

а $1-q'$ изобразитъ вѣроятность виновности подсудимаго въ предполагаемомъ случаѣ.

Если бы первый судья оправдалъ подсудимаго, а второй обвинилъ его, то изобразивъ чрезъ $p_{,}$ вѣроятность виновности послѣ такого противорѣчиваго рѣшенія, получили бы

$$p_{,}=\frac{(1-q)u'}{(1-q)u'+q(1-u')}=\frac{k(1-u)u'}{k(1-u)u'+(1-k)(1-u')u}.$$

Напротивъ того, если первый судья обвинитъ подсудимаго, а второй оправдаетъ его, то вѣроятность $q_{,}$ его невинности изобразится формулою

$$q_{,}=\frac{(1-p)u'}{(1-p)u'+p(1-u')}=\frac{(1-k)(1-u)u'}{(1-k)(1-u)u'+k(1-u')u}.$$

Въ первомъ изъ этихъ двухъ несогласныхъ опредѣленій, $1-p_{,}$ будетъ означать вѣроятность невинности подсудимаго, а во второмъ $1-q_{,}$ вѣроятность его виновности.

Разборъ частныхъ случаевъ выведенныхъ въ этомъ N° формулъ, не представитъ ни малѣйшаго затрудненія, и приведетъ къ слѣдствіямъ подобнымъ тѣмъ, которыя были уже предложены въ N° 111.

113. Формулы предъидущаго N° легко могутъ быть распространены на какое ни есть число судей. Чтобы яснѣе видѣть составленіе этихъ общихъ формулъ, предложимъ здѣсь выраженія, относящіяся къ рѣшеніямъ при трехъ судьяхъ.

Пусть будутъ u, u', u'' правдивости трехъ судей, а k, какъ выше, вѣроятность виновности подсудимаго когда онъ предается суду.

Для единогласнаго обвиненія подсудимаго необходимо, чтобы, при виновности его, ни одинъ изъ трехъ судей не ошибся, или, если онъ невиненъ, чтобы всѣ три судьи ошиблись; сложная вѣроятность первой случайности есть $kuu'u''$, а второй, $(1-k)(1-u)(1-u')(1-u'')$. Слѣдовательно, полная вѣроятность обвиненія будетъ

$$kuu'u''+(1-k)(1-u)(1-u')(1-u'').$$

Подобнымъ образомъ найдется, что вѣроятность единогласнаго оправданія подсудимаго есть

$$k(1-u)(1-u')(1-u'')+(1-k)uu'u''.$$

Если возьмемъ сумму этихъ двухъ выраженій, то получимъ вѣроятность единогласнаго рѣшенія, осуждающаго или оправдывающаго подсудимаго. Искомая вѣроятность будетъ

$$uu'u''+(1-u)(1-u')(1-u''),$$

очевидно независимая отъ k. Это заключеніе равно справедливо при какомъ ни есть числѣ судей.

Разногласіе между судьями можетъ произойти въ шести различныхъ предположеніяхъ. Дѣйствительно, когда двое судей обвиняютъ, а одинъ оправдываетъ, то представится три случая; столько же будетъ ихъ и въ противномъ предположеніи, именно, когда двое судей оправдываютъ, а одинъ обвиняетъ. Если назовемъ судей буквами A, B, C, то упоминаемыя шесть предположеній будутъ:

Обвиняютъ:	*Оправдываютъ:*
AB	C
AC	B
BC	A
C	AB
B	AC
A	BC.

Легко видѣть, что вѣроятности приведенныхъ шести случайностей соотвѣтственно опредѣлятся формулами:

$$ku u'(1-u'')+(1-k)(1-u)(1-u')u''$$
$$ku u''(1-u')+(1-k)(1-u)(1-u'')u'$$
$$ku'u''(1-u)+(1-k)(1-u')(1-u'')u$$
$$k(1-u)(1-u')u''+(1-k)uu'(1-u'')$$
$$k(1-u)(1-u'')u'+(1-k)uu''(1-u')$$
$$k(1-u')(1-u'')u+(1-k)u'u''(1-u).$$

Сумма этихъ шести выраженій, изображающая вѣроятность, что въ судейскомъ рѣшеніи произойдетъ разногласіе, послѣ надлежащихъ сокращеній приметъ видъ:

$$uu'(1-u'')+uu''(1-u')+u'u''(1-u)+(1-u)(1-u')u''$$
$$+(1-u)(1-u'')u'+(1-u')(1-u'')u = 1-uu'u''-(1-u)(1-u')1-u''),$$

показывающій, что и эта вѣроятность независима отъ первоначальной виновности k подсудимаго.

Сумма найденныхъ двухъ вѣроятностей

$$uu'u''+(1-u)(1-u')(1-u'')$$

въ случаѣ единогласія судей, и

$$1-uu'u''-(1-u)(1-u')(1-u'')$$

въ случаѣ ихъ разногласія, *a priori* должна равняться достовѣрности или единицѣ, что на самомъ дѣлѣ и оправдывается.

По извѣстному приговору надъ подсудимымъ легко опредѣлить новую вѣроятность его виновности или невинности. Напримѣръ, если подсудимый единогласно обвиненъ тремя судьями, то вѣроятность его виновности будетъ

$$\frac{kuu'u''}{kuu'u''+(1-k)(1-u)(1-u')1-u''))}.$$

Если, напротивъ того, подсудимый оправданъ единогласно, то вѣроятность его невинности изобразится дробью

$$\frac{(1-k)uu'u''}{(1-k)uu'u''+k(1-u)(1-u')(1-u'')}.$$

Положимъ еще, что судьи A и B обвинили подсудимаго, а C оправдалъ его; вѣроятность его виновности въ этомъ случаѣ опредѣлится формулою

$$\frac{kuu'(1-u'')}{kuu'(1-u'')+(1-k)(1-u)(1-u')u''}.$$

При $u'=u''$, эта вѣроятность обратится въ дробь

$$\frac{ku}{ku+(1-k)(1-u)},$$

независимую отъ u' и u''. Она одинакова съ величиною p [формула (218)], изображающею вѣроятность виновности подсудимаго, обвиняемаго однимъ судьей A. Этотъ результатъ совершенно согласенъ съ здравымъ понятіемъ объ разсматриваемомъ предметѣ. Дѣйствительно, когда первый судья произнесъ рѣшеніе, а остальные два, при одинакихъ правдивостяхъ u' и u'', противорѣчатъ другъ другу въ своихъ рѣшеніяхъ, то нѣтъ никакой причины полагать, чтобы опредѣленіе того или другаго имѣло бо́льшее вліяніе на вѣроятность виновности или невинности подсудимаго. Поэтому, останется только рѣшеніе перваго судьи, которое, какъ мы уже видѣли въ N° **111**, измѣнитъ первоначальную вѣроятность k виновности подсудимаго въ новую p, равную

$$\frac{ku}{ku+(1-k)(1-u)}.$$

Въ выведенныхъ выше формулахъ предполагалось, что дѣло подсудимаго рѣшается сперва однимъ судьей, потомъ другимъ, потомъ третьимъ, и что судьи постановляютъ свои опредѣленія независимо другъ отъ друга. Но легко видѣть, что эти самыя формулы приличествуютъ и тому случаю, когда всѣ судьи, разсмотрѣвъ и обсудивъ дѣло вмѣстѣ, произнесутъ потомъ приговоры, каждый отдѣльно. При этомъ произойдетъ и та выгода, что открытыя пренія вообще объяснятъ дѣло, и слѣдовательно увеличатъ вѣроятности u, u', u'', что судьи не ошибутся въ произносимыхъ ими рѣшеніяхъ.

114. Положимъ теперь въ частности, что правдивости судей u, u', u''.... одинаковыя. Пусть судилище состоитъ изъ n судей, u общая ихъ правдивость, а k вѣроятность

виновности подсудимаго въ то̀ время, когда онъ предается суду. Наконецъ, изобразимъ чрезъ i одно изъ чиселъ 0, 1, 2, 3... n, и чрезъ γ_i вѣроятность, что подсудимый будетъ обвиненъ $n-i$ судьями, а оправданъ остальными i. Чтобы такое предположеніе состоялось, нужно: 1° чтобы, при виновности подсудимаго, $n-i$ судей произнесли справедливый приговоръ, а i, несправедливый, или 2° чтобы, при невинности подсудимаго, $n-i$ судей ошиблись, а i рѣшили бы справедливо. Вѣроятность первой случайности равна произведенію $k.u^{n-i}(1-u)^i$ на число всѣхъ возможныхъ случаевъ, въ которыхъ, изъ n судей, i ошибаются. Вѣроятность второй случайности равна произведенію $(1-k)u^i(1-u)^{n-i}$ на число всѣхъ возможныхъ случаевъ, въ которыхъ, изъ тѣхъ же n судей, $n-i$ ошибаются. Но число соединеній n предметовъ, какихъ бы то ни было, взятыхъ по i или по $n-i$, одно и то̀ же. Изобразивъ его чрезъ N_i, получимъ

$$N_i = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-i+1)}{1.2.3\ldots.i}$$

Слѣдовательно

$$\gamma_i = N_i\left[ku^{n-i}(1-u)^i+(1-k)u^i(1-u)^{n-i}\right]. \tag{222}$$

Если положимъ $n-i>i$, и примемъ

$$n-2i = m,$$

то γ_i изобразитъ вѣроятность, что подсудимый осужденъ большинствомъ m голосовъ. Пусть будетъ δ_i вѣроятность, что подсудимый оправданъ $n-i$ судьями, а обвиненъ остальными i, или, иначе, что онъ оправданъ большинствомъ m голосовъ. Измѣнивъ въ формулѣ (222) $n-i$ въ i, а i въ $n-i$, получимъ

$$\delta_i = N_i\left[ku^i(1-u)^{n-i}+(1-k)u^{n-i}(1-u)^i\right]. \tag{223}$$

Сложивъ величины γ_i и δ_i, найдется

$$\gamma_i+\delta_i = N_i\left[u^{n-i}(1-u)^i+u^i(1-u)^{n-i}\right].$$

И такъ, вѣроятность рѣшенія по большинству m голосовъ, не говоря напередъ будетъ ли подсудимый обвиненъ или оправданъ, не зависитъ отъ первоначальной статочности k виновности его. Если въ частности положимъ $u=\frac{1}{2}$, то вѣроятности γ_i и δ_i, разсматриваемыя отдѣльно, также независимы отъ k, и общая ихъ величина опредѣлится формулою

$$\gamma_i = \delta_i = \frac{N_i}{2^n}.$$

Онѣ также равны между собою при $k=\frac{1}{2}$, и тогда будетъ

$$\gamma_i = \delta_i = \tfrac{1}{2}N_i\left[u^{n-i}(1-u)^i+u^i(1-u)^{n-i}\right].$$

Опредѣлимъ теперь вѣроятность p_i виновности подсудимаго, когда онъ осужденъ большинствомъ $m=n-2i$ голосовъ. Такъ какъ вѣроятность виновности подсудимаго есть $N_i.ku^{n-i}(1-u)^i$, а полная вѣроятность его обвиненія $N_i.ku^{n-i}(1-u)^i+N_i.(1-k)(1-u)^{n-i}u^i$, то по сокращеніи на N_i получимъ

$$p_i = \frac{ku^{n-i}(1-u)^i}{ku^{n-i}(1-u)^i+(1-k)(1-u)^{n-i}u^i}. \tag{224}$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдется и вѣроятность q_i невинности подсудимаго, оправданнаго большинствомъ m голосовъ. Будетъ

$$q_i = \frac{(1-k)u^{n-i}(1-u)^i}{(1-k)u^{n-i}(1-u)^i+k(1-u)^{n-i}u^i}. \tag{225}$$

Величины p_i и q_i дѣлаются равными при частномъ значеніи $k=\frac{1}{2}$; тогда получимъ просто

$$p_i = q_i = \frac{u^m}{u^m+(1-u)^m}.$$

И дѣйствительно, когда первоначально не имѣемъ никакой причины полагать, чтобы подсудимый былъ виновенъ скорѣе чѣмъ невиненъ, то и степень довѣрія къ рѣшенію, при одинаковомъ большинствѣ, очевидно должна быть одна и та же какъ при обвиненіи, такъ и при оправданіи лица, преданнаго суду.

При $u=\frac{1}{2}$, формулы (224) и (225) доставляютъ, какъ и должно быть, $p_i=k$, $q_i=1-k$, каковы бы ни были числа n и i.

Наконецъ замѣтимъ, что если формуламъ (224) и (225) дадимъ видъ

$$p_i = \frac{ku^m}{ku^m+(1-k)(1-u)^m}, \quad q_i = \frac{(1-k)u^m}{(1-k)u^m+k(1-u)^m},$$

то увидимъ непосредственно, что послѣ судейскаго опредѣленія, новыя вѣроятности виновности или невинности подсудимаго будутъ единственно зависѣть отъ большинства m, а отнюдь не отъ полнаго числа n судей. Но не должно забывать, что этотъ результатъ выведенъ въ томъ предположеніи, что правдивость u судей одинакова для всѣхъ, и предполагается извѣстною до произнесенія приговора. И такъ, при подобныхъ обстоятельствахъ, какъ бы велико не было число судей, предполагаемое нечётнымъ, приговоръ, произнесенный ими большинствомъ одного только голоса, долженъ заслуживать не болѣе и не менѣе довѣрія, какъ приговоръ по тому же дѣлу, произнесенный однимъ судьей. Но вѣроятности, что такіе приговоры будутъ произнесены, могутъ быть весьма различны въ разсматриваемыхъ двухъ случаяхъ, какъ то̀ было уже подробно объяснено при свидѣтельствахъ (N° 99).

115. Положимъ теперь, что вмѣсто опредѣленнаго большинства голосовъ, назначается только *minimum* большинства. Изобразимъ чрезъ c_i вѣроятность, что подсудимый будетъ обвиненъ по меньшей мѣрѣ $n-i$ судьями, и слѣдовательно оправданъ не болѣе какъ i судьями. Поэтому c_i опредѣлитъ вѣроятность обвиненія при большинствѣ не меньшемъ $m=n-2i$ голосовъ. Въ силу N° 9 получимъ

$$c_i = \gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_i.$$

Означимъ чрезъ d_i вѣроятность оправданія подсудимаго большинствомъ не мéньшимъ $m=n-2i$ голосовъ; будетъ

$$d_i = \delta_0+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_i.$$

Сверхъ того, удержавъ знакоположенія предъидущаго N°, и положивъ для сокращенія

$$\left.\begin{aligned} U_i &= N_0u^n+N_1u^{n-1}(1-u)+N_2u^{n-2}(1-u)^2+\ldots+N_iu^{n-i}(1-u)^i \\ V_i &= N_0(1-u)^n+N_1(1-u)^{n-1}u+N_2(1-u)^{n-2}u^2+\ldots+N_iu^i(1-u)^{n-i}, \end{aligned}\right\} \quad (226)$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} c_i &= kU_i+(1-k)V_i \\ d_i &= kV_i+(1-k)U_i, \end{aligned}\right\} \quad (227)$$

откуда

$$c_i+d_i = U_i+V_i.$$

Это уравненіе, опредѣляющее вѣроятность c_i+d_i, что подсудимый будетъ или обвиненъ, или оправданъ по крайней мѣрѣ большинствомъ $m=n-2i$ голосовъ, показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что эта вѣроятность не зависитъ отъ k.

Не останавливаясь на различныхъ слѣдствіяхъ, проистекающихъ изъ выведенныхъ сейчасъ формулъ при различныхъ предположеніяхъ относительно величинъ k и u, а также и на случаяхъ, когда n предполагается чётнымъ или нечётнымъ, ограничимся только однимъ замѣчаніемъ. Если величину c_i, опредѣляемую первою изъ формулъ (227), напишемъ въ видѣ

$$c_i = k(U_i+V_i)-(2k-1)V_i,$$

и примемъ въ соображеніе, что сумма $U_i+V_i = c_i+d_i$, изображающая вѣроятность обвиненія или оправданія подсудимаго большинствомъ, не мéньшимъ $m=n-2i$ голосовъ, не можетъ превзойти достовѣрности или единицы, то, предполагая $2k-1>0$ или $k>\frac{1}{2}$, увидимъ, что $c_i<k$. И такъ, въ обыкновенныхъ случаяхъ, то есть, когда до произнесенія приговора судомъ, виновность подсудимаго правдоподобнѣе его невинности, вѣроятность обвиненія, при какомъ ни есть большинствѣ, будетъ всегда менѣе чѣмъ первоначальная вѣроятность его виновности. Замѣтимъ, что это заключеніе независимо отъ значенія u,

изображающаго общую правдивость судей. Только для предѣла, именно когда $u=1$, вмѣсто условія $c_i<k$, получаемъ $c_i=k$, что̀ очевидно слѣдуетъ изъ уравненій (226) и (227), положивъ въ нихъ $u=1$. Въ то̀ же время найдется $d_i=1-k$. При $u=0$, будетъ наоборотъ, $c_i=1-k$, $d_i=k$.

Для опредѣленія вѣроятности P_i виновности подсудимаго, когда знаемъ только, что онъ былъ осужденъ большинствомъ не мéньшимъ $m=n-2i$ голосовъ, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: если подсудимый дѣйствительно виновенъ, то вѣроятность что онъ будетъ обвиненъ большинствомъ m, или $m+2$, или $m+4,\ldots$ или наконецъ $m+2i=n$ голосами, то есть единогласно, опредѣлится суммою

$$k\Big[N_0u^n+N_1u^{n-1}(1-u)+N_2u^{n-2}(1-u)^2+\ldots+N_iu^{n-i}(1-u)^i\Big] = kU_i.$$

Но подсудимый могъ быть невиненъ, и между тѣмъ обвиненъ; вѣроятность этой случайности будетъ

$$(1-k)\Big[N_0(1-u)^n+N_1(1-u)^{n-1}u+N_2(1-u)^{n-2}u^2+\ldots+N_i(1-u)^{n-i}u^i\Big] = (1-k)V_i.$$

И такъ, вѣроятность справедливаго обвиненія равна произведенію kU_i, а полная вѣроятность обвиненія, суммѣ $kU_i+(1-k)V_i$. Отношеніе этихъ двухъ вѣроятностей (N° 52) опредѣлитъ искомую величину P_i, почему и будетъ

$$P_i = \frac{kU_i}{kU_i+(1-k)V_i}. \quad (228)$$

Вѣроятность же ошибочности этого приговора очевидно изобразится разностію $1-P_i$.

Совершенно подобнымъ образомъ найдется вѣроятность Q_i невинности подсудимаго, когда онъ будетъ оправданъ большинствомъ голосовъ, не мéньшимъ $m=n-2i$. Получимъ

$$Q_i = \frac{(1-k)U_i}{(1-k)U_i+kV_i}; \quad (229)$$

въ то̀ же время $1-Q_i$ опредѣлитъ вѣроятность ошибочности этого самаго рѣшенія, оправдывающаго подсудимаго.

Замѣтимъ, что вѣроятности P_i и Q_i зависятъ не только отъ наименьшаго большинства $m=n-2i$ голосовъ, но и отъ самаго числа n судей; между тѣмъ, при опредѣленномъ большинствѣ, вѣроятности p_i и q_i зависятъ единственно отъ большинства m, какъ было объяснено въ N° **114**.

Вотъ главныя основанія приложенія Анализа Вѣроятностей къ Судопроизводству. Для пріобрѣтенія болѣе обширныхъ познаній въ этомъ предметѣ, читатели могутъ обратиться къ сочиненіямъ Поассона и Кондорсета, о которыхъ уже упомянуто въ N° **110**.

116. Чтобы показать употребленіе формулъ, выведенныхъ въ двухъ послѣднихъ нумерахъ, предложимъ краткіе примѣры ихъ приложенія къ Уголовному Судопроизводству во Франціи и въ Англіи.

Уголовный Судъ во Франціи состоитъ изъ 12 членовъ или присяжныхъ (*jurés*). Каждый произноситъ приговоръ, и участь подсудимаго рѣшается большинствомъ 7-ми голосовъ противъ 5-ти*).

При такихъ условіяхъ имѣемъ $n=12$, $m=2$, и какъ $m=n-2i$, то и найдется $i=\frac{n-m}{2}=5$. Слѣдовательно, принявъ для сокращенія вмѣсто величинъ $k=0{,}5354$ и $u=0{,}6786$, приведенныхъ въ N° 110, приближенныя значенія $k=\frac{1}{2}$, $u=\frac{3}{4}$, получимъ въ силу формулы (224)

$$p_5=\frac{9}{10} \quad \text{и} \quad 1-p_5=\frac{1}{10};$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ приговоръ, произнесенный опредѣленнымъ наименьшимъ большинствомъ 7 голосовъ противъ 5, доставитъ вѣроятность $\frac{9}{10}$ для виновности подсудимаго. Вѣроятность же ошибочности приговора будетъ $\frac{1}{10}$.

Вычисливъ по формулѣ (226) величины U_5 и V_5, получимъ

$$U_5=7254\cdot\frac{3^7}{4^{12}}, \qquad V_5=239122\cdot\frac{1}{4^{12}},$$

или, приблизительно, по формулѣ (228),

$$P_5=\frac{403}{409}, \qquad 1-P_5=\frac{6}{409}.$$

И такъ, допуская для наименьшаго большинства голосовъ 7 противъ 5 находимъ, что вѣроятность виновности подсудимаго, въ случаѣ его осужденія, равна дроби $P_5=\frac{403}{409}$, которая ближе подходитъ къ единицѣ, чѣмъ p_5. Вѣроятность ошибочности приговора $1-P_5=\frac{6}{409}$ почти въ 7 разъ менѣе въ настоящемъ предположеніи, чѣмъ при опредѣленномъ большинствѣ 7-ми противъ 5-ти; и дѣйствительно

$$\frac{6}{409}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{10}+\frac{11}{70.409}.$$

---

*) Въ 1831 году произошло измѣненіе въ Уголовномъ Судопроизводствѣ во Франціи; вмѣсто наименьшаго большинства 7 противъ 5, постановлено законное большинство 8 противъ 4. Сверхъ того, въ 1832 году, предписанъ присяжнымъ вопросъ объ обстоятельствахъ, уменьшающихъ вину преступника (*circonstances atténuantes*), при которыхъ, въ случаѣ утвердительнаго приговора, наказаніе облегчается. Съ 1835 года возстановлено прежнее большинство *minimum* 7 голосовъ противъ 5, но удержанъ вопросъ объ облегчающихъ обстоятельствахъ.

Въ Англіи Уголовный Судъ составленъ также изъ 12 присяжныхъ. Но, для осужденія или оправданія подсудимаго, требуется не извѣстное большинство, а единогласное опредѣленіе. При такомъ условіи, окончательный приговоръ Суда былъ бы рѣдкою случайностію, еслибъ присяжные, для избѣжанія слишкомъ продолжительныхъ преній, не дѣлали часто взаимныхъ уступокъ.

Вѣроятность виновности или невинности подсудимаго, когда всѣ 12 присяжныхъ осудили или оправдали его, опредѣляется формулами (224) и (225). Положивъ въ нихъ $n=12$ и $i=0$, получимъ

$$p_0=\frac{ku^{12}}{ku^{12}+(1-k)(1-u)^{12}}, \qquad q_0=\frac{(1-k)u^{12}}{(1-k)u^{12}+k(1-u)^{12}}.$$

Для прежнихъ значеній $k=\frac{1}{2}$, $u=\frac{3}{4}$, эти формулы доставятъ

$$p_0=q_0=\frac{3^{12}}{3^{12}+1}=\frac{531441}{531442}.$$

Равенство величинъ p_0 и q_0 есть необходимое слѣдствіе предположенія $k=\frac{1}{2}$. Сверхъ того мы видимъ, что это общее значеніе для p_0 и q_0 очень мало разнится отъ единицы; но за то вѣроятность, что подобный единогласный приговоръ будетъ произнесенъ, была бы вообще весьма слаба при допущенныхъ величинахъ k и u, еслибъ всѣ присяжные, какъ было сей-часъ замѣчено, безуступочно придерживались своихъ мнѣній. Поассонъ нашелъ, что принимая для Англіи значенія k и u, найденныя для цѣлой Франціи, безъ различія родовъ преступленій, вѣроятность единогласнаго осужденія подсудимаго мало разнилась бы отъ дроби $\frac{1}{50}$, а вѣроятность единогласнаго оправданія была бы почти вполовину меньше, или равна $\frac{1}{100}$.

Формулы N°N° 114 и 115 могутъ быть приложены вообще къ нашимъ Третейскимъ Судамъ, когда дѣло, по сущности своей, допускаетъ только двоякое рѣшеніе, утвердительное или отрицательное. Если частные посредники постановили опредѣленіе единогласно, или по большинству голосовъ, то вѣроятность справедливости рѣшенія найдется по извѣстнымъ формуламъ; но, для численныхъ приложеній, должно предварительно опредѣлить величины k и u, которыя, по роду дѣлъ, подлежащихъ разбору Третейскихъ Судовъ, могутъ быть весьма различны. Когда произойдетъ раздѣленіе голосовъ между частными посредниками, то общему посреднику предоставляется: 1° утвердить одно изъ мнѣній частныхъ посредниковъ, хотя бы оно имѣло въ свою пользу наименьшее число голосовъ; 2° предложить собственное мнѣніе, которое получитъ силу рѣшенія Третейскаго Суда, если будетъ принято хотя однимъ изъ частныхъ посредниковъ. Третейскій Судъ сч-

тается несостоящимся въ томъ случаѣ, когда общій посредникъ не изберетъ ни одного изъ предложенныхъ мнѣній, или когда никто не согласится съ его собственнымъ. Изъ этихъ условій мы видимъ, что при раздѣленіи голосовъ между частными посредниками, выведенныя выше формулы недостаточны. Этотъ случай требуетъ отдѣльнаго разбора, который впрочемъ послѣ началъ, изложенныхъ въ предъидущихъ нумерахъ, и при нѣкоторой привычкѣ къ соображеніямъ этого рода, не представитъ особеннаго затрудненія.

117. Изложивъ послѣдовательно въ этомъ сочиненіи математическія начала Анализа Вѣроятностей и главныя его приложенія къ вопросамъ изъ жизни общественной, Естественной Философіи и Наукъ Нравственныхъ, мы можемъ теперь, въ краткихъ чертахъ, отдать себѣ отчётъ въ томъ, чего можно ожидать и требовать отъ этой теоріи, которая, по справедливости, можетъ стать на ряду съ важнѣйшими отраслями нашихъ знаній. Кромѣ весьма немногихъ непреложныхъ истинъ, сдѣлавшихся достояніемъ человѣка, всё въ природѣ и въ мірѣ нравственномъ основано на догадкахъ, болѣе или менѣе правдоподобныхъ; поэтому, ученіе о вѣроятностяхъ, собственно говоря, обнимаетъ почти весь кругъ умственной дѣятельности. Нѣтъ сомнѣнія, что такое обширное назначеніе этой науки значительно ограничивается съ одной стороны недостаткомъ и неудовлетворительностію данныхъ, извлекаемыхъ изъ наблюденій надъ физическими и нравственными явленіями, а съ другой, хотя и въ мéньшей степени, несовершенствомъ математическаго анализа. Тѣмъ не менѣе, сдѣланное доселѣ въ Теоріи Вѣроятностей ставитъ её на степень важнѣйшаго умственнаго орудія для открытія истины и для предохраненія ума отъ заблужденій, въ которыя онъ нерѣдко впадаетъ при поверхностномъ взглядѣ на предметы. Тамъ, гдѣ человѣкъ, одаренный умомъ проницательнымъ, можетъ только предвидѣть приближенные результаты, теорія часто приводитъ къ точнымъ выводамъ, выраженнымъ числами. Такая опредѣлительность въ оцѣнкѣ мѣры довѣрія къ какой либо предполагаемой истинѣ, недоступная для обыкновенной Логики, безъ сомнѣнія заслуживаетъ полнаго вниманія мыслителей. Но не должно однакожъ принимать эти численные результаты въ безусловномъ смыслѣ какъ нѣкоторые эмпирики, не постигшіе настоящаго духа Анализа Вѣроятностей. Такъ, напримѣръ, изъ того, что вѣроятность какого либо событія очень близка къ достовѣрности или къ единицѣ, отнюдь не слѣдуетъ заключить, что это событіе непремѣнно случится, или, въ противномъ случаѣ, что теорія ведетъ къ заключеніямъ ошибочнымъ. Подобный результатъ должно понимать въ другомъ смыслѣ, который вполнѣ оправдывается извѣстнымъ общимъ предложеніемъ Якова Бернулли. Большая степень вѣроятности событія показываетъ только, что если бы мы могли повторить очень много разъ испытанія, при однихъ и тѣхъ же обстоятельствахъ, то число появленій событія было бы несравненно значительнѣе числа непоявленій, при чемъ отношеніе перваго числа къ суммѣ ихъ обоихъ неопредѣленно приближалось бы къ найденному значенію вѣроятности. Что же касается до отдѣльнаго испытанія, то Анализъ Вѣроятностей, по неопредѣлительности условій, не можетъ доставить никакихъ положительныхъ заключеній, какъ тò было уже объяснено въ самомъ началѣ этой книги.

Вообще, при объясненіи различныхъ результатовъ Анализа Вѣроятностей, должно непрестанно имѣть въ виду законъ, выражаемый теоремою Якова Бернулли. Правильность въ числѣ повтореній событій, зависящихъ по нашему невѣдѣнію отъ случайностей, соблюдается только при весьма значительномъ рядѣ испытаній. Поэтому, всякое рѣшеніе, относящееся къ отдѣльному пріёму, должно принимать только за *средній выводъ*, который, во многихъ случаяхъ, можетъ значительно удалиться отъ рѣшенія, обнаружившагося *a posteriori* исполнившимися событіями. Но еслибъ была возможность повторить неопредѣленное число разъ тò же самое испытаніе, и при однихъ и тѣхъ же условіяхъ, то найденный средній результатъ тѣмъ ближе выразилъ бы искомыя отношенія между появленіями различныхъ событій, чѣмъ число самыхъ испытаній было бы значительнѣе.

Въ заключеніе предлагаемъ читателямъ краткій историческій очеркъ постепеннаго развитія Математической Теоріи Вѣроятностей.

ГЛАВА XII.

КРАТКІЙ ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ ПОСТЕПЕННАГО РАЗВИТІЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

118. Время, къ которому относятся первоначальныя понятія о вѣроятности, разсматриваемой съ умозрительной стороны, также неопредѣленно какъ и начало бо́льшей части отраслей нашихъ знаній. Задолго до первыхъ попытокъ въ математической теоріи этой науки, прибѣгали, при различныхъ обстоятельствахъ, какъ то въ играхъ, закладахъ и проч., къ сравненію числа благопріятствующихъ и неблагопріятствующихъ случаевъ, и, съ бо́льшею или мѐньшею удачею, выводили слѣдствія изъ такого сравненія. Подобныя соображенія, а равно и нѣкоторыя правила, встрѣчаемыя въ твореніяхъ прежнихъ философовъ, конечно принадлежатъ къ ученію о случайностяхъ, и есть даже положительныя свидѣтельства, что нѣкоторыя примѣчательныя приложенія науки о вѣроятностяхъ не были чужды эпохамъ, весьма отдаленнымъ отъ насъ. Такъ напримѣръ, по замѣчанію Г. *Либри**), въ Дигестѣ**) приведенъ законъ, имѣющій предметомъ вопросъ объ продовольствіи, и который ясно доказываетъ, что уже Римляне занимались опредѣленіемъ средней жизни въ различные возрасты. Далѣе Г. Либри говоритъ о Морскихъ Страховыхъ Обществахъ, существовавшихъ уже въ средніе вѣка въ Италіанскихъ Республикахъ; это самое заставляетъ предполагать, что въ то̀ время умѣли опредѣлять приблизительно вѣроятность кораблекрушенія. Извѣстно также, что позже, въ началѣ XVII столѣтія, знаменитый *Галилей* занимался весьма важнымъ вопросомъ изъ теоріи вѣроятностей, именно, опредѣ-

*) *Revue des deux mondes*, livraison du 15 Mai 1845; статья: *Fermat*, par M. Libri.

**) *Дигестъ* (или *Пандекты*) есть, какъ извѣстно, сводъ рѣшеній знаменитѣйшихъ Римскихъ Законовѣдцевъ, составленный, въ видѣ Уложенія, по повелѣнію Императора Юстиніана. Изданіе Дигеста относятъ къ 528 году по Р. Х.

леніемъ погрѣшностей и разысканіемъ ихъ вліянія на результаты наблюденій. Конечно, его изслѣдованія по предмету столь трудному не могли имѣть желаемаго успѣха. Къ первой половинѣ XVII же столѣтія принадлежитъ, кажется, первая мысль объ оборотахъ, основанныхъ на вѣроятностяхъ жизни человѣческой. Неаполитанецъ *Лаврентій Тонти* предложилъ особое учрежденіе въ этомъ родѣ, которое удержало его имя, называясь до сихъ поръ *тонтиною* (N° 73).

Хотя всѣ упомянутыя сей-часъ попытки и относились, безспорно, къ Анализу Вѣроятностей, но, по отрывочности и несовершенству своему, далёко не могли удовлетворить требованіямъ науки. Основанія математической теоріи случайностей положены *Паскалемъ* и *Ферматомъ* въ половинѣ семнадцатаго столѣтія. Первый рѣшенный ими вопросъ былъ предложенъ Паскалю Кавалеромъ *Мере*, и относился къ безобидному раздѣлу ставки до окончанія игры. Для подробностей по этому предмету отсылаемъ къ N°N° 32 и 38 нашей книги. И такъ, по всей справедливости, можно сказать, что этимъ двумъ знаменитымъ мужамъ, Исчисленіе Вѣроятностей обязано первыми своими математическими началами и своею самостоятельностію.

Вскорѣ послѣ упоминаемыхъ попытокъ Паскаля и Фермата, современникъ ихъ *Гугенсъ* занялся этимъ же предметомъ; онъ собралъ вопросы уже рѣшенные до него, и, дополнивъ ихъ собственными изслѣдованіями, написалъ трактатъ объ умозрѣніи въ играхъ, подверженныхъ случайностямъ. Это сочиненіе, первое изъ появившихся по Теоріи Вѣроятностей, издано *Шотеномъ* въ 1657 году, въ его книгѣ: *Exercitationum mathematicarum* подъ заглавіемъ: *De ratiociniis in Aleae Ludo.* Трактатъ Гугенса помѣщенъ также въ первой части книги: *Ars conjectandi*, о которой будемъ говорить ниже, и обогащенъ тамъ комментаріями Якова Бернулли.

Кромѣ Гугенса, во второй половинѣ XVII вѣка занимался теоріею вѣроятностей *Соверъ* (Sauveur), который, въ *Journal des Savans*, за 1679 годъ, помѣстилъ свои изслѣдованія объ опредѣленіи статочностей игры, въ родѣ банка или фарао, извѣстной подъ названіемъ *bassète*. *Монтюкла*, въ своей *Histoire des Mathématiques* (1802 г., Томъ III, стр. 391), упоминаетъ также объ одномъ трактатѣ подъ заглавіемъ: *Of the Laws of chance*, имѣвшимъ предметомъ азартныя игры, и который былъ напечатанъ въ Лондонѣ въ 1692 году, безъ имени сочинителя. Монтюкла полагаетъ, что это трудъ *Веніамина Мотта* (Benjamin Motte). Къ концу XVII же столѣтія относятся труды *Ванъ Гудденa* (Van Hudden), *Витта* (Witt), пенсіонарія Голландіи и *Галлея* по предмету вѣроятностей жизни человѣческой. Въ 1693 году Галлей издалъ таблицу смертности, первую изъ извѣстныхъ

намъ по своей давности [N° 60]. Его изслѣдованія напечатаны въ *Philosophical Transactions*, за 1693 годъ, n° 196.

Не останавливаясь на другихъ, менѣе примѣчательныхъ пріобрѣтеніяхъ Исчисленія Вѣроятностей, относящихся къ упоминаемой эпохѣ, переходимъ къ трудамъ знаменитаго Якова Бернулли. Уже въ 1685 году, въ *Journal des Savans*, онъ предложилъ математикамъ довольно трудный вопросъ объ игрѣ въ кости. Не получивъ отвѣта, Бернулли напечаталъ въ Лейбцигскихъ Актахъ, за 1690 годъ, свое рѣшеніе, но безъ доказательства. Это самое подстрекнуло Лейбница заняться предложенною задачею; онъ рѣшилъ её немедленно, и напечаталъ подробное изложеніе своего способа въ тѣхъ же Лейбцигскихъ Актахъ. Но главную заслугу, оказанную Яковомъ Бернулли математической теоріи вѣроятностей, составляетъ, безъ сомнѣнія, примѣчательное его сочиненіе: *Ars conjectandi*, которое онъ обдумывалъ въ продолженіи многихъ лѣтъ. Оно издано въ Базелѣ въ 1713 году, семь лѣтъ послѣ смерти сочинителя, племянникомъ его *Николаемъ Бернулли*. Это сочиненіе, отличающееся вѣрностію взглядовъ и остроумными аналитическими пріёмами, раздѣлено на четыре части. Первую, какъ уже упомянуто предъ симъ, составляютъ пояснительныя примѣчанія къ Трактату Гугенса. Вторая часть заключаетъ въ себѣ пространную теорію разнаго рода соединеній. Третья, рѣшеніе многихъ задачъ, относящихся къ различнымъ играмъ. Наконецъ, четвертая содержитъ въ себѣ употребленіе и приложеніе правилъ, изложенныхъ въ предъидущихъ частяхъ, къ вопросамъ изъ общежитія и къ наукамъ нравственнымъ и политическимъ. Этотъ четвертый отдѣлъ заслуживаетъ особеннаго вниманія тѣмъ, что въ рѣшаемыхъ въ немъ вопросахъ употребленъ Нютоновъ биномъ, имѣющій столь важное значеніе въ Исчисленіи Вѣроятностей. Самая же примѣчательная статья этой четвертой части, есть, безъ сомнѣнія, доказательство извѣстной теоремы, удержавшей имя Якова Бернулли, о которой мы столько разъ имѣли случай говорить. Подробности о ней приведены у насъ въ N°N° 20, 22, 24, 25, 26....117. Вслѣдъ за четвертою частію помѣщенъ *трактатъ объ безконечныхъ рядахъ*, а въ самомъ концѣ сочиненія, любопытныя изслѣдованія подъ заглавіемъ: *Lettre à un amy sur les Parties du Jeu de Paume*, неизвѣстнаго автора.

Николай Бернулли, издатель *Ars conjectandi*, самъ занимался съ нѣкоторымъ успѣхомъ Теоріею Вѣроятностей. Въ 1709 году, въ Базелѣ, онъ защищалъ Диссертацію на степень Доктора Правъ, и выбралъ предметомъ своихъ изслѣдованій опытъ приложенія Исчисленія Вѣроятностей къ Судопроизводству. Диссертація Николая Бернулли издана въ 1709 году подъ заглавіемъ: *De Arte conjectandi in Jure*; между любопытными вопросами,

рѣшенными въ ней, можно преимущественно указать на тотъ, который составляетъ предметъ третей части, именно: по истеченіи сколькихъ лѣтъ, *отсутствующаго*, по законамъ, должно считать умершимъ?

119. Осьмнадцатое столѣтіе, ознаменованное столь блестящими успѣхами Чистаго Математическаго Анализа, принесло и Теоріи Вѣроятностей значительныя усовершенствованія. Въ самомъ его началѣ, *Монмортъ* во Франціи, а *Моавръ*, Французскій же уроженецъ, въ Англіи, занимались съ особенною ревностію Исчисленіемъ Вѣроятностей. Первый издалъ свое сочиненіе объ этомъ предметѣ подъ заглавіемъ: *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*; въ немъ онъ предлагаетъ рѣшеніе множества любопытныхъ вопросовъ, относящихся къ разнаго рода играмъ въ карты, въ кости и проч. Во второмъ изданіи упоминаемой книги (1713 года), во многихъ отношеніяхъ исправленномъ и дополненномъ, находится любопытная переписка Монморта съ Николаемъ Бернулли, племянникомъ Якова и Ивана Бернулли. Въ этой перепискѣ особеннаго вниманія заслуживаютъ остроумныя рѣшенія многихъ вопросовъ Николаемъ Бернулли, и изложеніе задачи, извѣстной подъ наименованіемъ *Петербургской*, предложенной симъ послѣднимъ Монморту въ письмѣ отъ 9 Сентября 1713 года. Подробности объ этомъ предметѣ помѣщены у насъ въ N° 45. Изъ числа трудныхъ вопросовъ, рѣшеніемъ которыхъ занимался Монмортъ, можно также указать на задачу о раздѣлѣ ставки между игроками, когда срокъ окончанія игры, по самому ея свойству, остается неопредѣленнымъ. Этимъ предметомъ занимался и Моавръ; но рѣшенія ихъ не имѣли надлежащей полноты [N°N° 33 и 40].

Первые свои труды по теоріи вѣроятностей *Моавръ* представилъ Лондонскому Королевскому Обществу; они помѣщены въ *Philosophical Transactions* за 1711 годъ подъ заглавіемъ: *De mensurâ sortis*. За симъ Моавръ напечаталъ свои изслѣдованія отдѣльною книгою *The doctrine of chances*, имѣвшей три изданія въ 1716, 1738 и 1756 г., которыя постепенно совершенствовались. Это сочиненіе, въ отношеніи къ аналитическимъ способамъ, имѣетъ весьма важныя преимущества предъ всѣми предшествовавшими ему. Вообще, вопросы рѣшены въ немъ съ большою общностію при пособіи Нютонова бинома. Къ теоремѣ Якова Бернулли прибавлены весьма важныя развитія, и именно опредѣленіе вѣроятности, что разность между отношеніемъ дѣйствительнаго числа повтореній событій, и отношеніемъ ихъ простыхъ вѣроятностей, заключается между данными предѣлами. Для этого Моавръ употребилъ первый теорему *Стирлинга* [N° 21]. Но въ особенности книга его примѣчательна изложеніемъ придуманной имъ теоріи *возвратныхъ рядовъ*, которую

онъ примѣнилъ весьма удачно къ рѣшенію различныхъ вопросовъ о вѣроятностяхъ. Эта теорія, собственно говоря, заключаетъ въ себѣ способъ интегрированія уравненій въ конечныхъ разностяхъ, съ постоянными коэффиціентами, столь плодовитый по своимъ приложеніямъ къ анализу случайностей.

Около этой самой эпохи занимались Теоріею Вѣроятностей, съ бо́льшимъ или ме́ньшимъ успѣхомъ, многіе другіе математики, между прочимъ *Мэранъ* [N° 37] *Николь*, помѣстившій въ *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, за 1730 годъ, рѣшенія разныхъ вопросовъ, относящихся къ опредѣленію судьбы игроковъ, при неравномъ ихъ искусствѣ, и при данномъ избыткѣ выигранныхъ нѣкоторымъ изъ нихъ партій.

Во второй половинѣ XVIII столѣтія многіе учёные съ большимъ тщаніемъ собирали разныя данныя, относящіяся къ народонаселенію вообще, къ смертности, къ числу рожденій, браковъ и проч. Эти численныя показанія, послѣ надлежащаго критическаго разбора, послужили для составленія многихъ, чрезвычайно полезныхъ таблицъ, и для рѣшенія многоразличныхъ практическихъ вопросовъ о вѣроятностяхъ жизни человѣческой, о пожизненныхъ доходахъ, сберегательныхъ кассахъ, тонтинахъ, всякаго рода застрахованіяхъ и тому подобныхъ оборотовъ. Историческія подробности объ этомъ предметѣ читатели найдутъ въ третьемъ томѣ *Histoire des Mathématiques, par Montucla;* ограничимся здѣсь краткими указаніями на главные труды учёныхъ.

Около самой средины XVIII столѣтія примѣчательны труды по этому же предмету *Ѳомы Симпсона* въ Англіи, *Керсебоома* и *Стрика* (Struyk) въ Голландіи и *Депарсьё* во Франціи. Послѣдній издалъ въ 1746 году сочиненіе подъ заглавіемъ: *Essai sur la probabilité de la durée de la vie humaine.* Въ Запискахъ Стокгольмской Академіи, за 1754 годъ, помѣщены также любопытныя изслѣдованія о таблицахъ смертности Шведскаго астронома *Варгентина.* Тѣмъ же предметомъ занимался въ Германіи математикъ *Ламбертъ* [N° 60], *Эйлеръ* и нѣкоторые другіе.

Въ послѣднихъ годахъ минувшаго столѣтія, *Депарсьё*, племянникъ того, о которомъ сей-часъ говорено, издалъ сочиненіе подъ заглавіемъ: *Traité des annuités, accompagné de plusieurs tables,* 1781 г. Вскорѣ послѣ того, *Дювильяръ* [N° 60] напечаталъ весьма примѣчательную книгу объ финансовыхъ оборотахъ разнаго рода: *Recherches sur les rentes, les emprunts, les remboursements, etc.*, 1787 г. Около того же времени, именно въ 1783 году, *Присъ*, въ Англіи, издалъ свои труды, заслужившіе общее вниманіе, объ разныхъ предметахъ Политической Ариѳметики.

Изложимъ теперь, въ самыхъ краткихъ чертахъ, важнѣйшія приращенія, полученныя Исчисленіемъ Вѣроятностей въ теченіи XVIII столѣтія.

Даніилъ Бернулли, сынъ Ивана Бернулли, обогатившій своими открытіями Высшую Геометрію и Механику, первый предложилъ различіе между ожиданіемъ математическимъ и нравственнымъ, и ввелъ мѣру втораго, донынѣ употребляемую (ГЛАВА IV). Почти въ одно время съ нимъ, знаменитый Французскій Естествоиспытатель *Бюффонъ*, въ своемъ *Essai d'Arithmétique morale*, изложилъ собственныя мысли объ этомъ самомъ предметѣ [N° 42]. Читатели найдутъ въ упоминаемой книгѣ*) письмо Даніила Бернулли къ Бюффону, отъ 19 Марта 1762 года; оно свидѣтельствуетъ, что Бернулли находилъ совершенно основательнымъ взглядъ Бюффона на нравственную вѣроятность, хотя и не вполнѣ соглашался съ нимъ въ опредѣленіи ея мѣры. Въ той же книгѣ помѣщены математическія рѣшенія нѣсколькихъ задачъ изъ Анализа Вѣроятностей, и приложеніе этой теоріи къ вопросамъ о жизни человѣческой, о рожденіяхъ, бракахъ, таблицахъ смертности и проч. Возвратимся къ трудамъ Даніила Бернулли. Ему же Анализъ Вѣроятностей обязанъ оригинальною мыслію, столь плодовитою по своимъ примѣненіямъ, объ разсматриваніи вѣроятностей событій *a posteriori*, то есть на основаніи наблюденныхъ явленій (ГЛАВА VII). Формулы по этому предмету предложены впослѣдствіи *Бэйесомъ* (Bayes) и *Присомъ* (Price) въ *Philosophical Transactions* за 1764 и 1765 годы, а послѣ того *Лапласомъ*, который придалъ имъ надлежащую всеобщность. Даніилъ Бернулли приложилъ также Исчисленіе Вѣроятностей къ вопросу о предохранительномъ оспопрививаніи**) [N° 64], что̀ подало поводъ къ пренію, довольно жаркому, между нимъ и *Д'Аламбертомъ;* возраженія послѣдняго напечатаны въ его *Opuscules mathématiques* (Томы II и IV), а равно въ его же *Mélanges de philosophie* (Томъ V). Другіе труды Д'Аламберта по Теоріи Вѣроятностей находятся въ отдѣльныхъ его сочиненіяхъ, и, отчасти, въ *Encyclopédie méthodique* (Mathématiques). Въ этомъ же превосходномъ твореніи помѣщены отдѣльныя статьи *Кондорсета*, относящіяся къ Анализу Вѣроятностей; главную изъ нихъ по объёму и содержанію своему читатели найдутъ подъ словомъ: *Probabilité*. Другія изслѣдованія Кондорсета по этой наукѣ напечатаны въ Запискахъ Парижской Академіи за 1781, 1782 и 1783 годы. Самый же примѣчательный трудъ его есть пространный Трактатъ объ рѣшеніяхъ по большинству голосовъ. Сочиненіе, о которомъ говоримъ, издано въ 1785 году подъ заглавіемъ: *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions*

*) *Oeuvres complètes de Buffon*, Paris 1827, Томъ XIII, стр. 14.
**) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1760 г.

rendues à la pluralité des voix. Въ Главѣ XI нашей книги мы имѣли случай ссылаться на нѣкоторыя мѣста этого труда Кондорсета.

Эйлеръ, обогатившій почти всѣ отрасли чистой и прикладной Математики, занимался также изслѣдованіями по разнымъ частямъ Теоріи Вѣроятностей. Его мемуары по этому предмету довольно многочисленны. На нѣкоторые труды его мы указали въ N°N° 36, 65, 72. Кромѣ напечатанныхъ его изслѣдованій, есть еще и неизданныя рукописи, именно: *Vera Æstimatio sortis in Ludis* и *Reflexions sur une espèce singulière de loterie, nommée Loterie Génoise.* Любопытна также, нигдѣ еще ненапечатанная, переписка его съ Прусскимъ Королемъ Фридрихомъ II по предмету особаго рода лотерей*). Но главная его заслуга состояла въ усовершенствованіи Интегральнаго Исчисленія, въ высшей степени способствовавшаго быстрымъ успѣхамъ Анализа Вѣроятностей.

Лагранжъ предложилъ простой и удобный способъ для интегрированія уравненій въ частныхъ конечныхъ разностяхъ, и показалъ примѣненія его къ рѣшенію трудныхъ и вмѣстѣ любопытныхъ вопросовъ Исчисленія Вѣроятностей. Объ этомъ важномъ предметѣ говорено у насъ съ подробностію въ ГЛАВѢ III и въ ПРИМѢЧАНІИ VII. Въ N°N° 78 и 79 мы упомянули также о другомъ трудѣ Лагранжа, относящемся къ опредѣленію наивыгоднѣйшихъ результатовъ наблюденій.

Укажемъ также на одинъ трудъ *Лакроа*, относящійся къ Теоріи Вѣроятностей. Въ 1781 году Парижская Академія Наукъ предложила задачу объ *застрахованіяхъ отъ морскихъ опасностей.* Не получая удовлетворительныхъ рѣшеній, она возобновляла два раза конкурсъ, и уже въ третій разъ получила восемь отвѣтныхъ сочиненій, изъ которыхъ два, одно *Лакроа*, а другое *Бикилея* (Bicquilley), признаны, вмѣстѣ, достойными половинной награды. Изъ 6000 франковъ, составлявшихъ полную премію, половина суммы была раздѣлена между двумя авторами: Лакроа получилъ 1800, а Бикилей 1200 франковъ. Кромѣ этого, Лакроа издалъ весьма удовлетворительное сочиненіе: *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités,* имѣвшее уже во Франціи три изданія. Бикилей издалъ также книгу объ той же наукѣ подъ заглавіемъ: *Du Calcul des Probabilités,* 1783 года.

Мы не будемъ останавливаться на трудахъ *Лежандра* и *Гаусса*, имѣющихъ предметомъ опредѣленіе наивѣроятнѣйшихъ результатовъ наблюденій. Объ этомъ говорено у насъ въ Главѣ X [N° 92]. Въ той же Главѣ приведены и другія историческія подроб-

*) Сообщеніемъ этихъ рукописей я одолженъ крайней обязательности П. Н. Фусса. Непремѣннаго Секретаря Императорской Академіи Наукъ. У него же хранятся другіе мемуары Эйлера по разнымъ математическимъ предметамъ. Можно надѣяться, что со временемъ эти драгоцѣнные труды будутъ изданы.

ности о наивыгоднѣйшемъ совокупленіи условныхъ уравненій, и, между прочимъ, о способѣ Англійскаго математика *Котеса* (въ концѣ N° 85).

Но ни кому аналитическая Теорія Вѣроятностей не обязана столько, какъ *Лапласу*. Въ нашей книгѣ мы такъ часто имѣли случай говорить объ его трудахъ, что считаемъ достаточнымъ предложить здѣсь, въ самыхъ краткихъ чертахъ, главныя заслуги этого великаго геометра.

Сверхъ многихъ Мемуаровъ, напечатанныхъ Лапласомъ въ Академическихъ Запискахъ объ аналитической Теоріи Вѣроятностей, онъ издалъ въ первый разъ въ 1812 году*) геніальное твореніе объ этомъ предметѣ, обнимающее полную его теорію и всѣ главныя его приложенія. Ни въ одномъ изъ другихъ сочиненій Лапласа не проявляется въ такой силѣ глубокій умъ, тонкость взглядовъ и могущество математическаго анализа какъ въ *Théorie analytique des Probabilités.* Изящностію и общностію способовъ при рѣшеніи труднѣйшихъ вопросовъ изъ анализа случайностей, Лапласъ возвелъ эту теорію на высокую степень совершенства. Изъ замѣчательнѣйшихъ изслѣдованій его, наиболѣе обогатившихъ ученіе о вѣроятностяхъ, можно преимущественно указать на *теорію производящихъ функцій* (*théorie des fonctions génératrices*), служащую для интегрированія уравненій въ частныхъ разностяхъ, такъ часто встрѣчающихся въ вопросахъ этого рода. Вычисленіе по приближенію разныхъ интегральныхъ формулъ, заключающихъ въ себѣ большія числа; частные случаи подобныхъ формулъ встрѣчались и прежде, какъ напримѣръ *Стирлингово* приближенное выраженіе для произведенія $1.2.3....n$ [N° 21], котораго точная величина изображается опредѣленнымъ интеграломъ $\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$. Общія формулы для вѣроятностей *a posteriori* по сдѣланнымъ уже наблюденіямъ (ГЛАВА VII), и вычисленіе вѣроятностей будущихъ событій при неравновозможныхъ статочностяхъ, принимаемыхъ за равновозможныя (ГЛАВА V). Различныя приложенія Исчисленія Вѣроятностей къ явленіямъ, наблюдаемымъ въ солнечной системѣ; такъ, напримѣръ, опредѣленіе вѣроятности существованія первоначальной причины, побудившей всѣ планеты и ихъ спутниковъ вращаться около своихъ осей, и двигаться по орбитамъ отъ запада къ востоку, то есть въ одну сторону съ вращательнымъ движеніемъ солнца, и почти въ одной плоскости съ его экваторомъ. Теорія наивыгоднѣйшихъ результатовъ наблюденій (ГЛАВА X), столь важная по своимъ приложеніямъ къ наукамъ наблюдательнымъ, обязана Лапласу нынѣшнимъ своимъ совершенствомъ. Онъ же указалъ и развилъ ея приложенія къ геодезическимъ дѣйствіямъ. Наконецъ, въ отдѣльномъ его сочиненіи: *Essai philosophique sur les Probabilités*, нахо-

*) Второе изданіе *Théorie analytique des Probabilités* напечатано въ 1814, а третье, въ 1820 году.

димъ полный сводъ и изложеніе истинъ изъ теоріи и приложеній анализа вѣроятностей, безъ пособія формулъ и вычисленій.

Вотъ бѣглый перечень важнѣйшихъ трудовъ Лапласа въ Анализѣ Вѣроятностей. Изъ сказаннаго здѣсь можно заключить, что эта теорія, получившая свое начало во Франціи, въ рукахъ Паскаля и Фермата, одолжена и быстрымъ своимъ усовершенствованіемъ также Французскому геометру.

120. Къ нашему столѣтію, кромѣ главныхъ трудовъ Лапласа, а также Гаусса и Лежандра, о которыхъ мы сей-часъ говорили, относятся различныя изслѣдованія многихъ астрономовъ и математиковъ. *Бессель, Плана, Энке, Струве, Поассонъ, Линденау, Боненбергеръ* и другіе занимались вопросомъ объ наивыгоднѣйшихъ результатахъ наблюденій въ теоретическомъ и практическомъ отношеніи (N°N° 89, 91, 92, 95). Кромѣ труда, на который указано въ N° 91, Поассонъ издалъ нѣсколько другихъ Мемуаровъ объ Исчисленіи Вѣроятностей, и между прочимъ: *Mémoire sur la probabilité du tir à la cible**). Въ этомъ любопытномъ трудѣ, Поассонъ излагаетъ математическую теорію вѣроятности цѣльной стрѣльбы, и извлекаетъ изъ полученныхъ имъ формулъ правила для сравненія какъ мѣткости огнестрѣльныхъ оружій, такъ и относительнаго искусства стрѣлковъ. Опыты, произведенные Французскими артиллеристами вполнѣ оправдали теорію, и доказали практическую пользу выведенныхъ формулъ. Главная же заслуга, оказанная Поассономъ этой наукѣ, состоитъ въ изданномъ имъ отдѣльномъ Трактатѣ объ математической теоріи Судопроизводства подъ заглавіемъ: *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, 1837 года. Это сочиненіе раздѣлено на *пять* главъ; первыя четыре посвящены изложенію общихъ началъ Исчисленія Вѣроятностей и наиупотребительнѣйшихъ его приложеній, а послѣдняя исключительно аналитической теоріи Судопроизводства. Въ этой же книгѣ Поассонъ распространилъ теорему Якова Бернулли на случай измѣняющихся статочностей, и назвалъ общее предложеніе *закономъ большихъ чиселъ*. Объ немъ упомянуто у насъ въ выноскѣ на страницѣ 35.

Кромѣ поименованныхъ математиковъ, занимавшихся въ послѣдніе годы теоріею вѣроятностей, можно указать еще на многихъ, писавшихъ объ этомъ предметѣ, въ томъ числѣ: *Амперъ, Фурье, Пюиссанъ, Ганзенъ, Кетле, Литтровъ, Мозеръ* и другіе.

*) *Mémorial de l'Artillerie*, Paris, 1837, n° IV. Брюссельское изданіе этого сборника статей по артиллерійскому искусству, напечатано въ 1839 году. Въ n° III того же изданія помѣщена также статья Поассона, подъ заглавіемъ: *Formules de probabilités relatives au résultat moyen des observations, qui peuvent être utiles dans l'Artillerie.*

Изложивъ въ послѣдовательныхъ Главахъ математическія начала, главныя приложенія и краткое обозрѣніе успѣховъ теоріи вѣроятностей, мы заключимъ нашу книгу словами Лапласа*) относительно важности значенія этой науки въ ряду человѣческихъ знаній: «Изъ всего сказаннаго видно, что Теорія Вѣроятностей, собственно говоря, есть только переложеніе здраваго смысла на аналитическія формулы: она доставляетъ средства для точной оцѣнки того что̀ постигаетъ умъ вѣрный, хотя часто безсознательно. Если возьмемъ въ соображеніе съ одной стороны всѣ аналитическіе способы, которые произвела эта теорія, истину началъ, служащихъ ей основаніемъ, тонкость и остроуміе выводимыхъ изъ нихъ логическихъ заключеній при рѣшеніи разнообразныхъ задачъ, а съ другой, общеполезныя учрежденія, упроченныя на наукѣ о вѣроятностяхъ, настоящее ея развитіе и то̀, которое она безъ сомнѣнія получитъ еще впослѣдствіи въ примѣненіи своемъ къ важнѣйшимъ вопросамъ Естественной Философіи и къ знаніямъ политическимъ; наконецъ, если примемъ во вниманіе, что даже въ предметахъ, не подлежащихъ исчисленію, она приводитъ къ взглядамъ, наиболѣе надёжнымъ для открытія истины, научаетъ насъ предохранять себя отъ заблужденій ума, то въ правѣ будемъ заключить, что нѣтъ науки болѣе ея достойной нашихъ размышленій, и которую полезнѣе было бы ввести въ систему знаній, составляющихъ предметъ общественнаго образованія.»

КОНЕЦЪ.

*) Въ концѣ *Essai philosophique sur les probabilités.*

ПРИМѢЧАНІЯ

КЪ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

ПРИМѢЧАНІЯ

КЪ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

ПРИМѢЧАНІЕ I.

Пусть будетъ $z = f(x)$ и $\Delta x = h$ конечное приращеніе перемѣнной независимой x. Въ слѣдствіе *Тейлоровой* теоремы имѣемъ

$$\Delta z = f(x+h) - f(x) = \frac{dz}{dx} \cdot h + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots,$$

откуда, взявъ интегралъ въ конечныхъ разностяхъ, получимъ

$$z = h\Sigma\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} + \dots$$

Если положимъ $\frac{dz}{dx} = y$, а слѣдовательно $z = \int y dx$, то предъидущая формула приметъ видъ:

$$\int y dx = h\Sigma y + \frac{h^2}{1.2}\Sigma\frac{dy}{dx} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma\frac{d^2y}{dx^2} + \dots,$$

или

$$\Sigma y = \frac{1}{h}\int y dx - \frac{h}{1.2}\Sigma\frac{dy}{dx} - \frac{h^2}{1.2.3}\Sigma\frac{d^2y}{dx^2} - \dots \qquad (A)$$

Займемся теперь освобожденіемъ второй части уравненія (A) отъ знаковъ Σ. Для достиженія этой цѣли, достаточно принять въ соображеніе тожество

$$\frac{d\Sigma y}{dx} = \Sigma\frac{dy}{dx},$$

въ справедливости котораго удостовѣряемся весьма простымъ образомъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\Sigma y = F(x)$; найдемъ сперва

$$\frac{d\Sigma y}{dx} = F'(x);$$

съ другой же стороны, такъ какъ

$$\Delta \Sigma y = y = F(x+h) - F(x),$$

то и получимъ

$$\frac{dy}{dx} = F'(x+h) - F'(x) = \Delta F'(x),$$

откуда

$$\Sigma \frac{dy}{dx} = \Sigma \Delta F'(x) = F'(x),$$

и слѣдовательно, сообразно съ сказаннымъ выше,

$$\frac{d\Sigma y}{dx} = \Sigma \frac{dy}{dx}.$$

Въ слѣдствіе этого равенства дифференцированіе интеграла въ конечныхъ разностяхъ приводится къ дифференцированію подъ знакомъ Σ.

Составивъ на такомъ основаніи производныя различныхъ порядковъ для уравненія (A), получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Sigma y}{dx} &= \Sigma \frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.y - \frac{h}{1.2}\Sigma\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{h^2}{1.2.3}\Sigma\frac{d^3y}{dx^3} - \ldots. \\
\frac{d^2\Sigma y}{dx^2} &= \Sigma \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h}.\frac{dy}{dx} - \frac{h}{1.2}\Sigma\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{h^2}{1.2.3}\Sigma\frac{d^4y}{dx^4} - \ldots. \\
\frac{d^3\Sigma y}{dx^3} &= \Sigma \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{h}.\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{h}{1.2}\Sigma\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{h^2}{1.2.3}\Sigma\frac{d^5y}{dx^5} - \ldots. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Безконечный рядъ этихъ уравненій послужитъ для послѣдовательнаго исключенія интеграловъ

$$\Sigma\frac{dy}{dx}, \quad \Sigma\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \Sigma\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

изъ формулы (A). Не останавливаясь на самомъ производствѣ этихъ дѣйствій, достаточно замѣтить, что результатъ подобныхъ послѣдовательныхъ исключеній приведетъ величину Σy къ виду

$$\Sigma y = \frac{1}{h}\int y dx + A_1 y + A_2 \frac{dy}{dx}.h + A_3 \frac{d^2y}{dx^2}.h^2 + A_4 \frac{d^3y}{dx^3}.h^3 + \ldots., \qquad (C)$$

гдѣ A_1, A_2, A_3, $A_4 \ldots.$ изображаютъ численные коэффиціенты. Прямой способъ для опредѣленія неизвѣстныхъ A_1, A_2, A_3, $A_4 \ldots.$, какъ замѣчено выше, состоитъ въ непосредственномъ исключеніи интеграловъ $\Sigma\frac{dy}{dx}$, $\Sigma\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ изъ формулы (A) помощію уравненій (B). Но такъ какъ послѣдовательныя подстановленія, необходимыя при этомъ, поведутъ къ вычисленіямъ довольно сбивчивымъ и продолжительнымъ, то выгоднѣе будетъ употребить слѣдующій, простѣйшій пріёмъ: положимъ въ частности $y = e^x$; по причинѣ

$$\Delta . e^x = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1),$$

найдется

$$\Sigma y = \Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1}.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$\int e^x dx = e^x, \quad \frac{d^m.e^x}{dx^m} = e^x;$$

внесемъ эти величины въ уравненіе (C); раздѣливъ потомъ на e^x, и умноживъ на h, получимъ

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + A_4 h^4 + \ldots.$$

И такъ, для опредѣленія неизвѣстныхъ численныхъ коэффиціентовъ A_1, A_2, A_3, $A_4, \ldots$, стоитъ только разложить функцію $\frac{h}{e^h - 1}$ въ безконечный рядъ по цѣлымъ возрастающимъ степенямъ величины h. Замѣтивъ же что

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

найдется

$$\frac{h}{e^h - 1} = \left(1 + \frac{h}{1.2} + \frac{h^2}{1.2.3} + \frac{h^3}{1.2.3.4} + \ldots\right)^{-1},$$

и слѣдовательно

$$\left(1 + \frac{h}{1.2} + \frac{h^2}{1.2.3} + \frac{h^3}{1.2.3.4} + \ldots\right)^{-1} = 1 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + A_4 h^4 + \ldots.$$

Взявъ логарномъ этого уравненія, а потомъ первую производную относительно h, получимъ

$$-\frac{\frac{1}{1.2} + \frac{h}{1.3} + \frac{h^2}{1.2.4} + \frac{h^3}{1.2.3.5} + \ldots}{1 + \frac{h}{1.2} + \frac{h^2}{1.2.3} + \frac{h^3}{1.2.3.4} + \ldots} = \frac{A_1 + 2A_2 h + 3A_3 h^2 + 4A_4 h^3 + \ldots}{1 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \ldots},$$

откуда

$$-\left(\frac{1}{1.2} + \frac{h}{1.3} + \frac{h^2}{1.2.4} + \frac{h^3}{1.2.3.5} + \ldots\right)\left(1 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \ldots\right)$$
$$= \left(1 + \frac{h}{1.2} + \frac{h^2}{1.2.3} + \frac{h^3}{1.2.3.4} + \ldots\right)\left(A_1 + 2A_2 h + 3A_3 h^2 + 4A_4 h^3 + \ldots\right).$$

Сравненіе коэффиціентовъ при одинакихъ степеняхъ количества h доставитъ рядъ уравненій:

$$-\frac{1}{1.2} = A_1$$

$$-\frac{1}{1.2}A_1 - \frac{1}{1.3} = 2A_2 + \frac{1}{1.2}A_1$$

$$-\frac{1}{1.2}A_2 - \frac{1}{1.3}A_1 - \frac{1}{1.2.4} = 3A_3 + \frac{1}{1.2}.2A_2 + \frac{1}{1.2.3}A_1$$

$$-\frac{1}{1.2}A_3 - \frac{1}{1.3}A_2 - \frac{1}{1.2.4}A_1 - \frac{1}{1.2.3.5} = 4A_4 + \frac{1}{1.2}.3A_3 + \frac{1}{1.2.3}.2A_2 + \frac{1}{1.2.3.4}A_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

изъ которыхъ выведемъ

$$A_1=-\frac{1}{2},\quad A_2=+\frac{1}{12},\quad A_3=0,\quad A_4=-\frac{1}{720},\quad A_5=0,\quad A_6=+\frac{1}{30240},\ldots.$$

и слѣдовательно, въ силу уравненія (C),

$$\Sigma y=\frac{1}{h}\int y dx-\frac{1}{2}y+\frac{1}{12}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot h-\frac{1}{720}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}\cdot h^3+\frac{1}{30240}\cdot\frac{d^5y}{dx^5}\cdot h^5-\ldots.$$

или

$$\Sigma yh=\int y dx-\frac{1}{2}y\cdot h+\frac{1}{12}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot h^2-\frac{1}{720}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}\cdot h^4+\frac{1}{30240}\cdot\frac{d^5y}{dx^5}\cdot h^6-\ldots. \qquad (D)$$

что и имѣли въ виду доказать. Эта формула, выведенная *Эйлеромъ*, очень полезна по многочисленнымъ своимъ приложеніямъ.

Если положимъ, что h чрезвычайно малъ въ сравненіи съ x, то во второй части уравненія (D) можно будетъ, безъ ощутительной погрѣшности, откинуть всѣ члены, слѣдующіе за первымъ, и тогда останется просто

$$\Sigma yh=\int y dx.$$

Такъ напримѣръ, еслибъ имѣли $y=x^m$, и допустили, что x означаетъ послѣдовательно всѣ члены ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ 4.\ldots \text{ до } n,$$

разумѣя подъ n чрезвычайно большое цѣлое число, то приращеніе $\Delta x=h=1$ было бы весьма мало въ сравненіи съ x. Поэтому получили бы очень приблизительно

$$\sum_0^n(x^m)=\int_0^n x^m dx=\frac{n^{m+1}}{m+1}.$$

Съ другой же стороны, такъ какъ

$$\mathop{\mathrm{S}}_0^n(x^m)=1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m=\sum_0^n(x^m)+n^m,$$

то и найдется

$$\mathop{\mathrm{S}}_0^n(x^m)=\frac{n^{m+1}}{m+1}+n^m.$$

По причинѣ значительности числа n, членъ n^m можетъ быть откинутъ предъ $\frac{n^{m+1}}{m+1}$; дѣйствительно, отношеніе

$$\frac{n^m}{\frac{n^{m+1}}{m+1}}=\frac{m+1}{n},$$

когда предполагаемъ m несравненно меньшимъ n, будетъ чрезвычайно мало, почему и получимъ просто

$$\mathop{\mathrm{S}}_0^n(x^m)=\int_0^n x^m dx=\frac{n^{m+1}}{m+1},$$

сообразно съ допущеннымъ въ N° 83 (ГЛАВА X).

Совершенно на томъ же основаніи, и при такихъ же условіяхъ, можно перейти отъ двойнаго или вообще кратнаго интеграла въ конечныхъ разностяхъ къ двойному или къ кратному обыкновенному интегралу, какъ напримѣръ въ N° 58 (ГЛАВА VII).

Когда приращеніе перемѣнной x равно *единицѣ*, или $h=1$, то формула (D) принимаетъ видъ

$$\Sigma y=\int y dx-\frac{1}{2}y+\frac{1}{12}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{720}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{1}{30240}\cdot\frac{d^5y}{dx^5}-\ldots. \qquad (E)$$

Положимъ еще, что интегралъ Σy долженъ быть распространенъ на всѣ цѣлыя положительныя значенія перемѣнной отъ $x=0$ до $x=l$. Въ такомъ случаѣ, взявъ обѣ части уравненія (E) между означенными предѣлами, получимъ формулу

$$\sum_{x=0}^{x=l}y=\int_0^l y dx-\frac{1}{2}(y_l-y_0)+\frac{1}{12}\left(\frac{dy_l}{dx}-\frac{dy_0}{dx}\right)-\frac{1}{720}\left(\frac{d^3y_l}{dx^3}-\frac{d^3y_0}{dx^3}\right)+\cdots, \qquad (F)$$

въ которой y_l, $\frac{dy_l}{dx}$, $\frac{d^3y_l}{dx^3}\ldots$ означаютъ результаты подстановленія l на мѣсто x въ функцію y и въ производныя ея $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3}\ldots$, а y_0, $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^3y_0}{dx^3}\ldots$ значенія этихъ самыхъ функцій для $x=0$.

Окончимъ замѣчаніемъ, что численные коэффиціенты

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{12},\quad \frac{1}{720},\quad \frac{1}{30240},\ldots\ldots,$$

входящіе въ Эйлерову формулу, связаны весьма простою зависимостію съ *Бернулліевыми числами*. Это наименованіе, какъ извѣстно, присвоено численнымъ коэффиціентамъ при первой степени перемѣнной x въ разложеніи интеграловъ Σx^2, Σx^4, $\Sigma x^6\ldots$ и вообще Σx^{2m}, принимая эти коэффиціенты всегда съ положительнымъ знакомъ. Если означимъ по порядку чрезъ

$$B_1,\quad B_3,\quad B_5,\quad B_7\ldots\ldots B_{2m-1}$$

первое, второе, третье....m-ое Бернулліево число, то принявъ въ формулѣ (C) $y=x^{2m}$, получимъ

$$\Sigma x^{2m}=\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)h}+A_1x^{2m}+2mA_2x^{2m-1}\cdot h+2m(2m-1)A_3x^{2m-2}h^2$$
$$+\ldots+2.3.4\ldots.(2m)A_{2m}x\cdot h^{2m-1}.$$

Слѣдовательно

$$B_{2m-1}=2.3.4\ldots.(2m)\cdot A_{2m},$$

откуда

$$B_1 = 2.A_2$$
$$B_3 = 2.3.A_4$$
$$B_5 = 2.3.4.A_6$$
$$B_7 = 2.3.4.5.A_8$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

наблюдая, какъ сказано выше, что всѣ числа B_1, B_3, B_5.... должны быть принимаемы съ положительными знаками.

Весьма легко увѣриться, что въ разложеніи

$$\frac{h}{e^h-1} = 1-\tfrac{1}{2}h+A_2h^2+A_3h^3+A_4h^4+A_5h^5+\dots$$

всѣ численные коэффиціенты A_3, A_5, A_7,..., нечётнаго порядка, равны *нулю*. Для этого достаточно показать, что функція

$$\frac{h}{e^h-1}+\tfrac{1}{2}h$$

есть *чётная*. Написавъ её въ видѣ

$$\frac{h}{e^h-1}+\tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}h.\frac{e^{\frac{1}{2}h}+e^{-\frac{1}{2}h}}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h}},$$

мы прямо усматриваемъ, что она удовлетворяетъ сказанному условію, ибо оба ея множителя

$$e^{\frac{1}{2}h}+e^{-\frac{1}{2}h} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h}}$$

не перемѣняютъ ни значенія своего, ни знака, съ измѣненіемъ знака передъ количествомъ h.

Въ заключеніе приводимъ здѣсь первыя 10 Бернулліевыхъ чиселъ, которыя могутъ послужить для продолженія ряда (D):

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ \frac{691}{2730},\ \frac{7}{6},\ \frac{3617}{510},\ \frac{43867}{798},\ \frac{174611}{330}.$$

ПРИМѢЧАНІЕ II.

§ 1. Возьмемъ извѣстную тригонометрическую формулу

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin.}\mu x = \mu\text{Sin.}x-\frac{\mu(\mu^2-1)}{1.2.3}\text{Sin.}^3x+\frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\text{Sin.}^5x \\ -\frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)(\mu^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6.7}\text{Sin.}^7x+\dots, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

которая оканчивается на членѣ, заключающемъ $\text{Sin.}^\mu x$, когда μ изображаетъ число цѣлое, положительное, и, сверхъ того, нечётное. Для доказательства этой формулы, замѣтимъ, что $\text{Sin.}\mu x$ есть функція нечётная, почему можно принять

$$\text{Sin.}\mu x = A_1\text{Sin.}x+A_3\text{Sin.}^3x+A_5\text{Sin.}^5x+\dots+A_\mu\text{Sin.}^\mu x; \quad (B)$$

что касается до коэффиціентовъ A_1, A_3, A_5....A_μ, то они опредѣляются весьма простымъ образомъ посредствомъ двукратнаго дифференцированія. Первое дифференцированіе доставитъ

$$\mu\text{Cos.}\mu x = \left(A_1+3A_3\text{Sin.}^2x+5A_5\text{Sin.}^4x+\dots+\mu A_\mu\text{Sin.}^{\mu-1}x\right)\text{Cos.}x, \quad (C)$$

а второе

$$-\mu^2\text{Sin.}\mu x = \left(2.3\ A_3\text{Sin.}x+4.5.A_5\text{Sin.}^3x+\dots+(\mu-1)\mu A_\mu\text{Sin.}^{\mu-2}x\right)\text{Cos.}^2x$$
$$-\left(A_1+3A_3\text{Sin.}^2x+5A_5.\text{Sin.}^4x+\dots+\mu A_\mu\text{Sin.}^{\mu-1}x\right)\text{Sin.}x.$$

Замѣнивъ Cos.^2x разностію $1-\text{Sin.}^2x$, получимъ:

$$\mu^2\text{Sin.}\mu x = \begin{array}{r|r|r|r|l} A_1 & \text{Sin.}x+\quad 3A_3 & \text{Sin.}^3x+\quad 5A_5 & \text{Sin.}^5x+\dots+\mu A_\mu & \text{Sin.}^\mu x. \\ -2.3A_3 & +2.3\ A_3 & +4.5.A_5 & +(\mu-1)\mu A_\mu & \\ & -4.5.A_5 & -6.7.A_7 & & \end{array}$$

Сравнивая почленно это уравненіе съ формулою (B), умноженною на μ^2, найдемъ равенства

$$A_1 - 2.3.A_3 = \mu^2 A_1$$
$$3A_3 + 2.3.A_3 - 4.5.A_5 = \mu^2 A_3$$
$$5A_5 + 4.5.A_5 - 6.7.A_7 = \mu^2 A_5$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

изъ которыхъ выведемъ

$$A_3 = -\frac{\mu^2-1}{2.3}.A_1$$
$$A_5 = -\frac{\mu^2-3^2}{4.5}.A_3$$
$$A_7 = -\frac{\mu^2-5^2}{6.7}.A_5$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Для опредѣленія перваго коэффиціента A_1 стоитъ только положить $x = 0$ въ уравненіи (C), и тогда найдется $A_1 = \mu$. Слѣдовательно

$$A_1 = +\mu$$
$$A_3 = -\frac{\mu(\mu^2-1)}{1.2.3}$$
$$A_5 = +\frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}$$
$$A_7 = -\frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)(\mu^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6.7}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_\mu = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}}.\frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)\dots[\mu^2-(\mu-2)^2]}{1.2.3.4\dots\mu}.$$

Внося эти величины въ (B) получимъ формулу (A).

Замѣтимъ мимоходомъ, что послѣдній каэффиціентъ A_μ значительно сокращается; дѣйствительно, если напишемъ послѣдніе множители числителя въ видѣ

$$\mu^2-(\mu-2)^2 = 2.(2\mu-2)$$
$$\mu^2-(\mu-4)^2 = 4.(2\mu-4)$$
$$\mu^2-(\mu-6)^2 = 6.(2\mu-6)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

то величину A_μ можно будетъ представить слѣдующимъ образомъ:

$$A_\mu = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}}.\frac{2\mu-2}{\mu-1}.\frac{2\mu-4}{\mu-2}.\frac{2\mu-6}{\mu-3}\dots\frac{\mu+1}{\frac{1}{2}(\mu+1)}.\frac{\mu-1}{\frac{1}{2}(\mu-1)}\dots\frac{6}{3}.\frac{4}{2}.\frac{2}{1},$$

и какъ каждый изъ $\mu-1$ множителей равенъ 2, то и найдется

$$A_\mu = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}}.2^{\mu-1}.$$

Обратимся теперь къ уравненію (B); такъ какъ вторая его часть изображаетъ цѣлую алгебрическую функцію μ-ой степени въ отношеніи къ количеству $\text{Sin.}x$, то можно разложить её на множители. Для этого стоитъ только замѣтить, что $\text{Sin.}\mu x$ обращается въ нуль для слѣдующихъ значеній перемѣнной x:

$$x = 0,\ \frac{\pi}{\mu},\ \frac{2\pi}{\mu},\ \frac{3\pi}{\mu},\dots\frac{(\mu-1)\pi}{\mu},$$

или, что всё равно,

при $$x = 0,\quad +\frac{\pi}{\mu},\quad +\frac{2\pi}{\mu},\quad +\frac{3\pi}{\mu},\dots+\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}$$

и $$x = -\frac{\pi}{\mu},\quad -\frac{2\pi}{\mu},\quad -\frac{3\pi}{\mu},\dots-\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu},$$

не теряя притомъ изъ виду, что μ изображаетъ положительное нечётное число. Слѣдовательно, вторая часть уравненія (B) будетъ дѣлиться безъ остатка на каждый изъ слѣдующихъ μ простыхъ множителей:

$$\text{Sin.}x,\quad \text{Sin.}x-\text{Sin.}\frac{\pi}{\mu},\quad \text{Sin.}x-\text{Sin.}\frac{2\pi}{\mu},\dots\text{Sin.}x-\text{Sin.}\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}$$
$$\text{Sin.}x+\text{Sin.}\frac{\pi}{\mu},\quad \text{Sin.}x+\text{Sin.}\frac{2\pi}{\mu},\dots\text{Sin.}x+\text{Sin.}\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu},$$

а поэтому и на произведеніе ихъ

$$\text{Sin.}x\left(\text{Sin.}^2x-\text{Sin.}^2\frac{\pi}{\mu}\right)\left(\text{Sin.}^2x-\text{Sin.}^2\frac{2\pi}{\mu}\right)\cdots\left(\text{Sin.}^2x-\text{Sin.}^2\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}\right),$$

вмѣсто котораго можно взять

$$\text{Sin.}x\left(1-\frac{\text{Sin.}^2x}{\text{Sin.}^2\frac{\pi}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\text{Sin.}^2x}{\text{Sin.}^2\frac{2\pi}{\mu}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{Sin.}^2x}{\text{Sin.}^2\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}}\right), \qquad (D)$$

откидывая покамѣстъ постоянный множитель.

И такъ, первая часть уравненія (B), или $\text{Sin.}\mu x$, будетъ равняться выраженію (D), умноженному на нѣкоторый численный коэффиціентъ, который опредѣляется непосредственно. Дѣйствительно, такъ какъ въ формулѣ (D) первая степень $\text{Sin.}x$ сопровождается множителемъ 1, и между тѣмъ онъ долженъ равняться $A_1 = \mu$, то и заключаемъ, что искомый коэффиціентъ есть μ. Слѣдовательно

$$\text{Sin.}\mu x = \mu\,\text{Sin.}x\left(1-\frac{\text{Sin.}^2x}{\text{Sin.}^2\frac{\pi}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\text{Sin.}^2x}{\text{Sin.}^2\frac{2\pi}{\mu}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{Sin.}^2x}{\text{Sin.}^2\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}}\right). \qquad (E)$$

Положимъ теперь $\mu x = y$, разумѣя подъ y какой ни есть конечный уголъ, подъ x безконечно малую величину, а подъ μ безконечно большое число цѣлое, и вмѣстѣ съ тѣмъ нечётное. Въ такомъ предположеніи синусы

$$\text{Sin}.x,\quad \text{Sin}.\frac{\pi}{\mu},\quad \text{Sin}.\frac{2\pi}{\mu},\quad \text{Sin}.\frac{3\pi}{\mu},\ldots.$$

можно будетъ замѣнить соотвѣтственно дугами

$$x,\quad \frac{\pi}{\mu},\quad \frac{2\pi}{\mu},\quad \frac{3\pi}{\mu},\ldots.$$

и какъ $x = \frac{y}{\mu}$, то формула (E) приметъ окончательно видъ:

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin}.y &= y\left(1-\frac{y^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots\\ &= y\left(1-\frac{y}{\pi}\right)\left(1+\frac{y}{\pi}\right)\left(1-\frac{y}{2\pi}\right)\left(1+\frac{y}{2\pi}\right)\left(1-\frac{y}{3\pi}\right)\left(1+\frac{y}{3\pi}\right)\cdots\end{aligned}\right\}\quad (F)$$

гдѣ число множителей будетъ безконечное.

Если въ первой изъ формулъ (F) замѣнимъ y дугою z, и потомъ первое разложеніе раздѣлимъ на второе, то получимъ равенство

$$\frac{\text{Sin}.y}{\text{Sin}.z} = \frac{y}{z}\cdot\frac{1-\frac{y^2}{\pi^2}}{1-\frac{z^2}{\pi^2}}\cdot\frac{1-\frac{y^2}{2^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}}\cdot\frac{1-\frac{y^2}{3^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}}\cdots.\quad (G)$$

употребленное нами въ N° 80.

§ 2. Принявъ въ уравненіи (F) $y = \frac{\pi}{2}$, найдется

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots.,$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}.\quad (H)$$

Это примѣчательное выраженіе для четверти окружности принадлежитъ Англійскому математику *Вальису*. Объ немъ упомянуто въ N° 21 нашей книги, при доказательствѣ *Стирлинговой формулы*.

§. 3. Формула (F) доставляетъ также простое средство для опредѣленія суммы нѣкоторыхъ примѣчательныхъ рядовъ. Раздѣливъ (F) на y, и взявъ потомъ Неперовъ логарифмъ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\log.\left(\frac{\text{Sin}.y}{y}\right) &= \log.\left(1-\frac{y^2}{\pi^2}\right)+\log.\left(1-\frac{y^2}{2^2\pi^2}\right)+\log.\left(1-\frac{y^2}{3^2\pi^2}\right)+\cdots\\ &= -\frac{y^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{y^4}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)\\ &\quad -\frac{1}{3}\cdot\frac{y^6}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)\\ &\quad -\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad (I)$$

Съ другой же стороны, такъ какъ

$$\text{Sin}.y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

то $\frac{\text{Sin}.y}{y}$ будетъ функція чётная, почему и можно положить

$$\left.\begin{aligned}\log.\left(\frac{\text{Sin}.y}{y}\right) &= \log.\left(1-\frac{y^2}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4.5}-\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\cdots\right)\\ &= Ay^2+By^4+Cy^6+\ldots.\end{aligned}\right\}\quad (J)$$

Мы начинаемъ разложеніе съ y^2 потому что постояннаго члена не будетъ, въ чёмъ удостовѣряемся непосредственно наблюдая, что при $y = 0$, найдется $\log.\left(\frac{\text{Sin}.y}{y}\right) = \log.1 = 0$. Взявъ производныя послѣдняго разложенія, получимъ:

$$\frac{-\frac{y}{1.3}+\frac{y^3}{1.2.3.5}-\frac{y^5}{1.2.3.4.5.7}+\cdots}{1-\frac{y^2}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4.5}-\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\cdots} = 2Ay+4By^3+6Cy^5+\ldots,$$

откуда

$$-\frac{1}{1.3}+\frac{y^2}{1.2.3.5}-\frac{y^4}{1.2.3.4.5.7}+\cdots =$$

$$\left(1-\frac{y^2}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4.5}-\cdots\right)\left(2A+4By^2+6Cy^4+\ldots\right).$$

Сравненіе коэффиціентовъ при одинакихъ степеняхъ перемѣнной y доставитъ

$$-\frac{1}{1.3} = 2A$$

$$+\frac{1}{1.2.3.5} = 4B - \frac{1}{1.2.3}\cdot 2A$$

$$-\frac{1}{1.2.3.4.5.7} = 6C - \frac{1}{1.2.3}\cdot 4B + \frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot 2A$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда

$$A = -\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{1.2},\quad B = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{30}\cdot\frac{2^3}{1.2.3.4},\quad C = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{42}\cdot\frac{2^5}{1.2.3.4.5.6},\ldots.$$

гдѣ численные коэффиціенты $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}\cdots$ изображаютъ послѣдовательныя *Бернулліевы числа* (ПРИМѢЧАНІЕ I). Если внесемъ найденныя величины для A, B, $C\ldots$ въ уравненіе (J), и сравнимъ потомъ новую формулу съ (I), то получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{6}\cdot\frac{2\pi^2}{1.2}=\frac{\pi^2}{6} \\ 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{1}{30}\cdot\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4}=\frac{\pi^4}{90} \\ 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{1}{42}\cdot\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6}=\frac{\pi^6}{945} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (K)$$

Объ этихъ безконечныхъ рядахъ упомянуто у насъ въ N° 80.

ПРИМѢЧАНІЕ III.

§ 1. Когда, вмѣсто какой либо функціи, желаемъ употребить ея разложеніе въ безконечный рядъ, то, предварительно, необходимо рѣшить, будетъ ли строка *сходящеюся* или *расходящеюся*. Положимъ, что данную функцію $f(x)$ разложили въ безконечный рядъ

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (A)$$

въ которомъ u_n изображаетъ *общій членъ*, составленный извѣстнымъ образомъ изъ перемѣнной x и указателя мѣста n. Рядъ (A) принимаетъ названіе *сходящагося* для опредѣленнаго значенія x, или для x, заключающагося между извѣстными предѣлами, когда сумма

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$

первыхъ его n членовъ, съ непрестаннымъ возрастаніемъ n, будетъ приближаться къ конечной, совершенно опредѣленной величинѣ, которую въ такомъ случаѣ и называютъ *суммою ряда*. При допущенномъ условіи рядъ (A) дѣйствительно изобразитъ разложеніе функціи $f(x)$, и съ надёжностію можетъ быть употребленъ вмѣсто самой функціи.

Напротивъ того, когда сумма s_n, съ непрестаннымъ увеличеніемъ n, не приближается ни къ какой опредѣленной величинѣ, или возрастаетъ неопредѣленно, то рядъ (A) будетъ *расходящійся*, и вообще не можетъ быть принимаемъ за разложеніе функціи $f(x)$.

Возьмемъ для примѣра слѣдующія двѣ безконечныя строки:

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots. \qquad (B)$$

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots. \qquad (C)$$

Для строки (B) найдемъ

$$s_n=x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Если положимъ сперва $x>0$ и <1, то увидимъ, что изъ двухъ членовъ разности

$$\frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x},$$

первый остается постояннымъ при измѣненіи n; второй же $\frac{x^{n+1}}{1-x}$, напротивъ того, при возрастающихъ величинахъ n, будетъ непрестанно уменьшаться, и, наконецъ, по причинѣ $x<1$ и n произвольно большаго, сдѣлается менѣе всякой данной величины. Поэтому дробь $\frac{x}{1-x}$ можно принимать за настоящій предѣлъ, къ которому приближается сумма s_n по мѣрѣ увеличенія n, и въ слѣдствіе этого, при допущенныхъ условіяхъ, позволительно замѣнить функцію $\frac{x}{1-x}$ ея разложеніемъ. И такъ

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \quad \text{при} \begin{cases} x>0 \\ x<1. \end{cases}$$

Напротивъ того, предполагая $x>1$, дробь

$$-\frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{x^{n+1}}{x-1}$$

будетъ неопредѣленно возрастать съ числомъ членовъ n, и сдѣлается наконецъ болѣе всякой данной величины. Въ такомъ случаѣ безконечная строка (B) окажется *расходящеюся*, и не будетъ имѣть суммы. То́ же самое можно сказать о рядѣ (B) въ случаѣ $x=1$.

Положивъ въ (B) $x=-1$, найдемъ безконечный рядъ

$$-1+1-1+1-1+\cdots,$$

сумма котораго остается неопредѣленною, какъ бы далёко не продолжили его. Поэтому самому приведенная строка принадлежитъ также къ числу *расходящихся рядовъ*.

Разсмотримъ теперь рядъ (C). Вопервыхъ, послѣ доказаннаго сей-часъ относительно ряда (B), можно заключить, что и (C) будетъ сходящимся для положительныхъ значеній x, ме́ньшихъ единицы; это прямо слѣдуетъ изъ того что при $x>0$ и <1, члены ряда

$$\frac{x}{1},\quad \frac{x^2}{2},\quad \frac{x^3}{3},\ldots.\frac{x^n}{n}$$

будутъ соотвѣтственно меньше членовъ строки (B), начиная уже со втораго члена. По причинѣ же $x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots.=\frac{x}{1-x}$, получимъ

$$\frac{x}{1-x}>\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

Сверхъ того, такъ какъ сумма (C), при допущенномъ условіи относительно x, будетъ положительная, то и заключаемъ, что безконечная строка (C) приближается къ нѣкоторому опредѣленному числу, заключающемуся между предѣлами 0 и $\frac{x}{1-x}$. Поэтому рядъ (C), для $x>0$ и <1, будетъ *сходящійся*.

Положивъ въ (C) $x=1$, найдется безконечный рядъ

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots,$$

который, какъ легко въ томъ увѣриться, будетъ *расходящійся*. Дѣйствительно, дадимъ ему видъ:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\cdots;$$

такъ какъ каждая совокупность дробей, стоящихъ подъ скобками, даетъ сумму бо́льшую $\frac{1}{2}$, то заключаемъ, что сумма ряда будетъ безконечная. Чтобы доказать вообще неравенство

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}>\frac{1}{2},$$

стоитъ только дроби

$$\frac{1}{2^{n-1}+1},\quad \frac{1}{2^{n-1}+2}\ \ldots.\text{до предпослѣдней } \frac{1}{2^n-1},$$

замѣнить послѣднею, наименьшею дробью $\frac{1}{2^n}$, и тогда получимъ

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2^{n-1}.\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2},$$

что́ прямо ведетъ къ справедливости предъидущаго неравенства, а слѣдовательно и къ заключенію о расходимости ряда (C) при $x=1$.

Для значеній x, превышающихъ единицу, строка (C) подавно будетъ *расходящаяся*, потому что въ этомъ предположеніи члены ряда

$$\frac{x}{1},\quad \frac{x^2}{2},\quad \frac{x^3}{3},\ldots.\frac{x^n}{n},\ldots.$$

соотвѣтственно больше членовъ строки

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\ldots.\frac{1}{n},\ldots.$$

въ расходимости которой мы сей-часъ увѣрились.

§ 2. Изъ сказаннаго должно заключить, что безконечный рядъ можетъ быть употребляемъ тогда только, когда удостовѣримся предварительно, что онъ сходящійся; поэтому, вопросъ о *сходимости безконечныхъ рядовъ* очень важенъ въ математическомъ анализѣ. Много было предложено изслѣдованій по этому предмету; но всѣ придуманные пріёмы оказались болѣе или менѣе неудовлетворительными, потому что основывались преимущественно на частномъ видѣ и на особенныхъ свойствахъ разсматриваемыхъ рядовъ. Наконецъ, очень недавно, найденъ весьма примѣчательный по своей всеобщности способъ для отличенія безконечныхъ строкъ сходящихся отъ расходящихся. Теорія рядовъ обязана этимъ обогащеніемъ Англійскому математику *Моргану*. Впрочемъ, справедливо замѣтить, что Французскій математикъ *Бертранъ*, не зная о трудахъ Моргана, открылъ съ своей стороны то́ же правило, выразя его въ видѣ нѣсколько отличномъ. По важности пред-

мета, мы изложимъ его съ надлежащею подробностію въ концѣ этого параграфа; но прежде приведемъ нѣкоторыя соображенія, необходимыя для полноты статьи.

Если бы можно было выразить въ конечномъ видѣ сумму $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ первыхъ n членовъ разсматриваемаго ряда въ функціи n, то самое опредѣленіе сходящейся строки доставило бы общій признакъ сходимости. И въ самомъ дѣлѣ, стоило бы только положить $n=\infty$ въ найденномъ конечномъ выраженіи, и тогда, судя по результату, конечному или безконечному, опредѣленному или неопредѣленному, рѣшили бы тотчасъ, какого рода рядъ, сходящійся-ли или расходящійся. Но опредѣленіе упоминаемой суммы, въ конечномъ видѣ, рѣдко бываетъ возможнымъ, почему и самое правило, хотя и употребляемое аналистами съ выгодою въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, вообще приноситъ мало пользы.

Предложимъ здѣсь другой способъ для отличенія рядовъ сходящихся отъ расходящихся, давно уже извѣстный математикамъ, но представляющій неполноту по причинѣ сомнительнаго случая, къ которому часто приводитъ. Пусть будетъ безконечный рядъ

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots, \qquad (D)$$

въ которомъ каждый членъ зависитъ извѣстнымъ образомъ какъ отъ занимаемаго имъ мѣста, положимъ n, такъ и отъ нѣкоторой перемѣнной x. Сверхъ того мы допустимъ сперва, что всѣ члены $u_1, u_2, u_3\ldots$ положительные. Чтобы рѣшить, будетъ ли рядъ (D) сходящійся или расходящійся, составляемъ отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ двухъ послѣдовательныхъ общихъ членовъ, и ищемъ предѣлъ его, то есть величину, въ которую $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ обратится, когда примемъ $n=\infty$. Если, для разсматриваемыхъ значеній x, упоминаемый предѣлъ будетъ *менѣе единицы*, то рядъ (D) *сходящійся*, а если *болѣе единицы*, то *расходящійся*. Когда же пред. $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}=1$, или еще, когда отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, при $n=\infty$, не имѣетъ опредѣленнаго значенія, а бываетъ то больше, то меньше единицы, тогда нельзя прямо рѣшить, какого свойства строка (D), сходящаяся-ли или расходящаяся. И такъ признакъ, о которомъ говоримъ, можетъ быть выраженъ слѣдующими условіями:

$$\text{пред.}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}\begin{cases}<1 & \textit{Рядъ сходящійся.}\\ >1 & \textit{Рядъ расходящійся.}\\ =1 & \textit{Случай сомнительный.}\end{cases} \qquad (E)$$

Замѣтимъ также, что неравенства

$$\text{пред.}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}\begin{matrix}<1\\>1\end{matrix}$$

опредѣляютъ предѣлы, между которыми должна заключаться перемѣнная x для сходимости и расходимости ряда (D); дѣйствительно, такъ какъ

$$\text{пред.}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}=\varphi(x),$$

то неравенства

$$\varphi(x)<1 \quad \text{и} \quad \varphi(x)>1$$

очевидно послужатъ къ опредѣленію упоминаемыхъ предѣловъ.

Для доказательства правила, выражаемаго условіями (E), разсмотримъ послѣдовательные члены

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad u_{n+3}\ldots,$$

и положимъ для краткости

$$s=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots, \quad s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n,$$
$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots, \quad s=s_n+r_n,$$

разумѣя подъ r_n *остатокъ*, который, въ случаѣ сходимости ряда (D), долженъ очевидно уменьшаться неопредѣленно съ увеличеніемъ n, и наконецъ обратиться въ нуль, когда перейдемъ къ предѣлу.

Прежде всего замѣтимъ, что для сходимости ряда (D) необходимо, чтобы послѣдовательные члены его, начиная съ опредѣленнаго, положимъ съ u_n, уменьшались въ своей величинѣ, или, иначе, чтобы рядъ былъ *убывающій*. Въ противномъ случаѣ, сумма ряда будетъ очевидно безконечная. И такъ, должно быть:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\theta_1<1$$
$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=\theta_2<1$$
$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}=\theta_3<1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда выводимъ

$$u_{n+1}=\theta_1 u_n, \quad u_{n+2}=\theta_1\theta_2 u_n, \quad u_{n+3}=\theta_1\theta_2\theta_3 u_n, \ldots$$

и слѣдовательно

$$r_n=u_n(\theta_1+\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_2\theta_3+\ldots).$$

Если, изъ всѣхъ количествъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3\ldots$, выберемъ наибольшее, которое означимъ чрезъ θ, то, по причинѣ $\theta_1<1$, $\theta_2<1$, $\theta_3<1\ldots$, будетъ и $\theta<1$; поэтому, замѣнивъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3\ldots$ величиною θ, получимъ

$$\theta+\theta.\theta+\theta.\theta.\theta+\ldots=\theta+\theta^2+\theta^3+\ldots>\theta_1+\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_2\theta_3+\ldots,$$

и наконецъ, замѣтивъ, что по причинѣ $\theta<1$, будетъ (§ 1)

$$\theta+\theta^2+\theta^3+\cdots=\frac{\theta}{1-\theta},$$

найдется

$$s < s_n + \frac{\theta u_n}{1-\theta}.$$

Отсюда слѣдуетъ заключить, что рядъ (D), при допущенномъ условіи, будетъ *сходящійся*, ибо сумма его заключается между двумя конечными предѣлами

$$0 \quad \text{и} \quad s_n + \frac{\theta u_n}{1-\theta}.$$

Условіе, о которомъ упоминаемъ, состоитъ въ томъ, чтобы отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, какъ бы велико не было число n, оставалось менѣе единицы, что̀ и выражается неравенствомъ

$$\text{пред.}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} < 1.$$

Если бы, напротивъ того, имѣли

$$\text{пред.}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} > 1,$$

то выбравъ между величинами $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots$ наименьшую θ, нашлось бы $\theta > 1$, и слѣдовательно

$$\theta + \theta.\theta + \theta.\theta.\theta + \ldots < \theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_2\theta_3 + \ldots$$

Но рядъ $\theta + \theta.\theta + \theta.\theta.\theta + \ldots = \theta + \theta^2 + \theta^3 + \ldots$, въ случаѣ $\theta > 1$, расходящійся; поэтому и рядъ $\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_2\theta_3 + \ldots$, котораго сумма превосходитъ $\theta + \theta^2 + \theta^3 + \ldots$, будетъ также расходящійся, откуда слѣдуетъ заключить, что $s = \infty$, и слѣдовательно строка (D) *расходящаяся*.

Предположеніе

$$\text{пред.}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} = 1$$

приводитъ къ результату

$$\theta + \theta^2 + \theta^3 + \ldots > \theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_2\theta_3 + \ldots,$$

и какъ $\theta = 1$, то и получится

$$\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_2\theta_3 + \ldots < \infty,$$

что̀ ведетъ къ условію

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots < \infty,$$

изъ котораго очевидно нельзя вывести никакого заключенія на счётъ сходимости или расходимости безконечнаго ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

То̀ же самое должно заключить и о томъ случаѣ, когда отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не имѣетъ опредѣленнаго значенія при $n = \infty$, или, иначе, когда пред. $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$ будетъ то больше, то меньше единицы.

Въ послѣднее время аналисты много занимались изслѣдованіемъ этого сомнительнаго случая. *Лежандръ*[1]), *Понселе*[2]), *Гауссъ*[3]), *Коши*[4]), *Куммеръ*[5]), *Дюгамель*[6]), *Раабе*[7]) нашли разныя правила, болѣе или менѣе выгодныя, чтобъ судить о сходимости или расходимости рядовъ, когдо ни одно изъ двухъ условій пред. $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} \lessgtr 1$ не состоится. Наконецъ, какъ уже упомянуто выше, *Морганъ*, въ своемъ Дифференціальномъ и Интегральномъ Исчисленіи, изданномъ въ Лондонѣ въ 1839 году, и *Бертранъ*[8]) предложили способъ, который, по своей всеобщности, удовлетворительнѣе всѣхъ доселѣ извѣстныхъ.

Приступая къ изложенію способа *Моргана*, приведемъ сперва слѣдующую *лемму*, доказанную *Дюгамелемъ*:

Когда даны два безконечные ряда

$$\Sigma v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots$$
$$\Sigma u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

изъ которыхъ первый сходящійся, *и если, сверхъ того, начиная отъ извѣстнаго значенія n, имѣемъ постоянно*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

то и второй рядъ Σu_n *будетъ* сходящійся. *Когда же рядъ* Σv_n расходящійся, *и притомъ*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

то и второй рядъ Σu_n *будетъ* расходящійся.

Для доказательства первой части этого предложенія, помножаемъ сходящійся рядъ Σv_n, начиная съ n-го его члена v_n, на отношеніе $\frac{u_n}{v_n}$; получимъ

$$v_n.\frac{u_n}{v_n} + v_{n+1}.\frac{u_n}{v_n} + v_{n+2}.\frac{u_n}{v_n} + \ldots$$

---

[1]) *Exercices de Calcul Intégral.*

[2]) *Journal für die Mathematik von Crelle*, Томъ XIII.

[3]) *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores*, Томъ II, 1811—1813 г.

[4]) Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, 1-ère Partie: *Analyse Algébrique*, 1821. — *Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence* (Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, 1840, n⁰ 9) и многіе другіе его Мемуары.

[5]) *Journal für die Mathematik von Crelle*, Томъ XIII.

[6]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, par J. Liouville, Томъ IV, 1839 г.

[7]) *Zeitschrift für Physik und Mathematik von Baumgartner und Ettingshausen.*

[8]) Въ статьѣ Бертрана: *Règles sur la convergence des séries* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, Томъ VII, 1842 г.) читатели найдутъ любопытный сводъ разныхъ правилъ, относящихся къ сходимости рядовъ.

Этотъ рядъ очевидно будетъ сходящійся, потому что отношеніе двухъ послѣдовательныхъ его членовъ, какъ и въ сходящейся строкѣ Σv_n, равно $\frac{v_{n+1}}{v_n}$; между тѣмъ члены его, начиная съ $(n+1)$-го, именно

$$v_{n+1}\cdot\frac{u_n}{v_n}+v_{n+2}\cdot\frac{u_n}{v_n}+v_{n+3}\cdot\frac{u_n}{v_n}+\cdots$$

будутъ соотвѣтственно болѣе членовъ

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots.$$

ряда Σu_n. Дѣйствительно, изъ условія

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{v_n}{v_{n+1}} \quad \text{выводимъ} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}<\frac{u_n}{v_n}, \quad \text{откуда} \quad u_{n+1}<v_{n+1}\cdot\frac{u_n}{v_n};$$

равнымъ образомъ

$$\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}<\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}<\frac{u_n}{v_n}, \quad \text{откуда} \quad u_{n+2}<v_{n+2}\cdot\frac{u_n}{v_n},$$

$$\frac{u_{n+3}}{v_{n+3}}<\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}<\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}<\frac{u_n}{v_n}, \quad \text{откуда} \quad u_{n+3}<v_{n+3}\cdot\frac{u_n}{v_n}$$

и такъ далѣе. Поэтому рядъ Σu_n, имѣя сумму мѐньшую чѣмъ сходящійся рядъ

$$v_n\cdot\frac{u_n}{v_n}+v_{n+1}\cdot\frac{u_n}{v_n}+v_{n+2}\cdot\frac{u_n}{v_n}+\cdots,$$

будетъ самъ сходящійся. Вторая часть леммы доказывается совершенно подобнымъ образомъ.

Докажемъ еще одну примѣчательную теорему, принадлежащую *Коши,* на основаніи которой правило *Моргана* выведется уже безъ малѣйшаго затрудненія.

Если изобразимъ чрезъ $f(x)$ функцію постоянно убывающую, начиная, напримѣръ, отъ значенія $x=\alpha\leqq a$, то безконечный рядъ

$$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots+f(a+m)+\ldots.$$

будетъ сходящійся *или* расходящійся *смотря по тому, имѣетъ ли интегралъ*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

значеніе конечное или безконечно большое, какъ бы число a велико не было.

Изъ этой теоремы прямо заключаемъ, что признакъ сходимости для безконечнаго ряда

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots.$$

состоитъ въ томъ, чтобы интегралъ

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

имѣлъ конечную величину. Дѣйствительно, сходимость ряда требуетъ прежде всего, чтобы онъ, начиная съ опредѣленнаго члена, былъ постоянно убывающій. Поэтому, допустивъ что разсматриваемая строка становится убывающею, напримѣръ съ члена $f(a)$,

функція $f(x)$, предполагая въ ней перемѣнную x непрерывною, вообще удовлетворитъ предписанному теоремою условію, и рядъ будетъ сходящійся. Напротивъ того, когда $\int_a^\infty f(x)dx$ имѣетъ величину безконечную, то строка расходящаяся.

Для доказательства теоремы Коши, разсмотримъ интегралъ

$$\int_a^{a+m} f(x)dx,$$

который можетъ быть разложенъ слѣдующимъ образомъ [ПРИМѢЧАНІЕ IX, § 1]:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+m} f(x)dx &= \int_a^{a+1} f(x)dx+\int_{a+1}^{a+2} f(x)dx+\ldots+\int_{a+m-1}^{a+m} f(x)dx\\ &= \int_0^1\big[f(a+x)+f(a+1+x)+\ldots+f(a+m-1+x)\big]dx\\ &= f(a+\omega)+f(a+1+\omega)+\ldots+f(a+m-1+\omega),\end{aligned}$$

разумѣя подъ ω величину положительную, мѐньшую единицы. Такъ какъ функція $f(x)$ предполагается убывающею, то интегралъ

$$\int_a^{a+m} f(x)dx = f(a+\omega)+f(a+1+\omega)+\ldots+f(a+m-1+\omega)$$

будетъ менѣе суммы

$$f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+m-1),$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе слѣдующей:

$$f(a+1)+f(a+2)+\ldots+f(a+m).$$

Первая изъ этихъ двухъ строкъ, при $m=\infty$, обращается въ безконечный рядъ

$$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots,$$

вторая, въ

$$f(a+1)+f(a+2)+f(a+3)+\ldots.,$$

а интегралъ $\int_a^{a+m} f(x)dx$ въ $\int_a^\infty f(x)dx$. Съ другой же стороны

$$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots>\int_a^\infty f(x)dx>f(a+1)+f(a+2)+f(a+3)+\ldots;$$

слѣдовательно, если интегралъ $\int_a^\infty f(x)dx$ имѣетъ значеніе конечное, то и сумма $f(a+1)+f(a+2)+f(a+3)+\ldots.$, а поэтому и $f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots.$ будетъ конечная. Напротивъ того, если интегралъ $\int_a^\infty f(x)dx$ имѣетъ значеніе безконечное, то и сумма $f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots.$, въ силу доказаннаго сей-часъ неравенства, будетъ безконечная, согласно съ теоремою Коши.

Положимъ, напримѣръ, разсматривается безконечный рядъ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

Такъ какъ $f(x)=\frac{1}{x}$, то и получимъ при какомъ ни есть a, равномъ или бо́льшемъ единицы,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \infty;$$

слѣдовательно разсматриваемая строка *расходящаяся*, что̀ уже было показано другимъ образомъ въ концѣ § 1.

Пусть будетъ еще

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots\dots$$

Здѣсь имѣемъ $f(x) = x^{-k}$, а поэтому

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty x^{-k}dx = \infty \quad \text{или} \quad \frac{1}{(k-1)a^{k-1}},$$

смотря по тому, будетъ ли $k < 1$ или $k > 1$; при $k = 1$, интегралъ обращается также въ величину безконечную. Отсюда заключаемъ, что разсматриваемый рядъ будетъ *сходящимся* для значеній показателя k бо̀льшихъ единицы, а *расходящимся*, когда число k менѣе или равно единицѣ.

Совершенно подобнымъ образомъ удостовѣримся, что каждый изъ рядовъ

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n^k} + \dots\dots\dots$$

$$1 + \frac{1}{2(l2)^k} + \frac{1}{3(l3)^k} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n(ln)^k} + \dots\dots\dots$$

$$1 + \frac{1}{2l2(ll2)^k} + \frac{1}{3l3(ll3)^k} + \dots\dots\dots + \frac{1}{nln(lln)^k} + \dots\dots$$

$$1 + \frac{1}{2l2ll2(lll2)^k} + \frac{1}{3l3ll3(lll3)^k} + \dots + \frac{1}{nlnlln(llln)^k} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

въ которыхъ ln означаетъ Неперовъ логариѳмъ числа n, lln Неперовъ же логариѳмъ логариѳма n и такъ далѣе, будетъ сходящійся или расходящійся въ одно время съ первымъ изъ нихъ, именно: *сходящійся*, когда $k > 1$, а *расходящійся*, когда $k < 1$ или $k = 1$. Дѣйствительно, разсматривая второй рядъ, найдемъ

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty \frac{dx}{x(lx)^k} = \int_a^\infty (lx)^{-k}d(lx) = \infty \quad \text{или} \quad \frac{1}{(k-1)(la)^{k-1}},$$

смотря по тому, будетъ ли $k < 1$ или $k > 1$; для $k = 1$, интегралъ обращается также въ безконечность.

Для третьяго ряда получимъ

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty \frac{dx}{xlx(llx)^k} = \int_a^\infty (llx)^{-k}d(llx) = \infty \quad \text{или} \quad \frac{1}{(k-1)(lla)^{k-1}}$$

при тѣхъ же условіяхъ, какъ и для предъидущаго. То̀ же самое докажется для каждаго изъ разсматриваемыхъ рядовъ.

Опредѣливъ признаки сходимости и расходимости приведенныхъ сей-часъ рядовъ, докажемъ одно примѣчательное ихъ свойство. Для этого, разсмотримъ выраженія

$$\left(\frac{l(n+1)}{ln}\right)^k, \quad \left(\frac{ll(n+1)}{lln}\right)^k, \quad \left(\frac{lll(n+1)}{llln}\right)^k, \dots$$

Первое изъ нихъ, независимо отъ показателя k, будетъ

$$\frac{l(n+1)}{ln} = \frac{ln + l(1+\frac{1}{n})}{ln} = 1 + \frac{l(1+\frac{1}{n})}{ln}.$$

Но

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2(1+\frac{\lambda}{n})} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \text{гдѣ} \quad \lambda > 0 \quad \text{и} \quad < 1;$$

слѣдовательно

$$\frac{l(n+1)}{ln} = 1 + \frac{1}{nln} - \frac{1}{2(1+\frac{\lambda}{n})ln.n^2} = 1 + \frac{1}{nln} + \frac{1}{pn^2},$$

разумѣя подъ p величину $-2\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)ln$, которая, при $n = \infty$, не можетъ обратиться въ *нуль*. И такъ

$$\left(\frac{l(n+1)}{ln}\right)^k = 1 + \frac{k}{nln} + \frac{1}{qn^2},$$

гдѣ q изображаетъ количество точно такого же свойства, какъ и p, то есть величину не обращающуюся въ *нуль* для $n = \infty$.

Совершенно подобнымъ образомъ получимъ послѣдовательно:

$$\frac{ll(n+1)}{lln} = \frac{lln + l\left(\frac{l(n+1)}{ln}\right)}{lln} = 1 + \frac{l\left(\frac{l(n+1)}{ln}\right)}{lln},$$

$$l\left(\frac{l(n+1)}{ln}\right) = l\left(1 + \frac{1}{nln} + \frac{1}{pn^2}\right) = \frac{1}{nln} + \frac{1}{p'n^2},$$

$$\frac{ll(n+1)}{lln} = 1 + \frac{1}{nlnlln} + \frac{1}{p''n^2},$$

откуда

$$\left(\frac{ll(n+1)}{lln}\right)^k = 1 + \frac{k}{nlnlln} + \frac{1}{q'n^2},$$

гдѣ p', p'' и q' изображаютъ величины, неуничтожающіяся при $n = \infty$.

На томъ же самомъ основаніи получимъ

$$\left(\frac{lll(n+1)}{llln}\right)^k = 1 + \frac{k}{nlnllnllln} + \frac{1}{q''n^2},$$

гдѣ q'', какъ q и q', не обращается въ *нуль* при $n = \infty$. Подобныя равенства очевидно найдутся при какомъ ни есть числѣ повтореній логариѳмическаго дѣйствія, такъ что

$$\left(\frac{l^{\mu}(n+1)}{l^{\mu}n}\right)^{k}=1+\frac{k}{nlnlln\ldots l^{\mu}n}+\frac{1}{q^{(\mu-1)}.n^{2}},$$

гдѣ $q^{(\mu-1)}$ одинаковаго свойства съ $q, q', q''\ldots.$

Изъ найденныхъ формулъ выведемъ безъ труда

$$\frac{n+1}{n}\left(\frac{l(n+1)}{ln}\right)^{k}=1+\frac{1}{n}+\frac{k}{nln}+\frac{1}{Q.n^{2}}$$

$$\frac{n+1}{n}\cdot\frac{l(n+1)}{ln}\left(\frac{ll(n+1)}{lln}\right)^{k}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nln}+\frac{k}{nlnlln}+\frac{1}{Q'.n^{2}}$$

$$\frac{n+1}{n}\cdot\frac{l(n+1)}{ln}\cdot\frac{ll(n+1)}{lln}\left(\frac{lll(n+1)}{llln}\right)^{k}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nln}+\frac{1}{nlnlln}+\frac{k}{nlnllnllln}+\frac{1}{Q''.n^{2}}$$

. . . .

Здѣсь, какъ и выше, должно замѣтить, что величины $Q, Q', Q''\ldots.$ не уничтожаются, когда положимъ въ нихъ $n=\infty$.

Чтобы узнать, по правилу *Моргана*, будетъ ли рядъ

$$\Sigma u_n=u_1+u_2+u_3+\ldots\;+u_n+u_{n+1}+\ldots.$$

сходящійся или расходящійся, составляемъ разность

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}-1;$$

если эта разность положительная, то рядъ будетъ *сходящійся*, а если отрицательная, то *расходящійся*. Въ случаѣ же $\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=0$, при томъ же условіи $n=\infty$, должно составить выраженіе

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1,$$

и взять предѣлъ его, то есть положить $n=\infty$. Условіе сходимости будетъ

$$\text{пред.}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}>0,$$

а расходимости

$$\text{пред.}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}<0.$$

Когда

$$\text{пред.}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}=0,$$

то составляемъ выраженіе

$$ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]-1,$$

и смотря по тому, будетъ ли оно положительное или отрицательное при $n=\infty$, заключаемъ, что рядъ Σu_n сходящійся или расходящійся. Если же предъидущее выраженіе обращается въ нуль, то разсматриваемъ формулу

$$lln\left(ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]-1\right)-1,$$

и признаки сходимости и расходимости будутъ слѣдующіе:

$$\text{пред.}\left\{lln\left(ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]-1\right)-1\right\}\begin{matrix}>0\ \textit{для сходимости},\\ <0\ \textit{для расходимости},\end{matrix}$$

и такъ далѣе, покуда не дойдемъ до выраженія, неуничтожающагося при $n=\infty$. Дѣйствительно, положимъ напримѣръ, что выраженіе

$$lln\left(ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]-1\right)-1$$

есть первое изъ неуничтожающихся для безконечнаго числа n. Допустимъ что оно положительное, и изобразимъ его величину чрезъ δ. Найдемъ послѣдовательно

$$lln\left(ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]-1\right)-1=\delta$$

$$ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]=1+\frac{1+\delta}{lln}$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=1+\frac{1}{ln}+\frac{1+\delta}{lnlln},$$

и наконецъ

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nln}+\frac{1+\delta}{nlnlln}.$$

Докажемъ теперь, что всегда можно выбрать для разности $k-1$ такое положительное значеніе, при которомъ условіе

$$\frac{u_n}{u^{u}{}_{+1}}>\frac{n+1}{n}\cdot\frac{l(n+1)}{ln}\left(\frac{ll(n+1)}{lln}\right)^{k},$$

для весьма значительнаго числа n, будетъ постоянно выполнено. Такъ какъ

$$\frac{n+1}{n}\cdot\frac{l(n+1)}{ln}\left(\frac{ll(n+1)}{lln}\right)^{k}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nln}+\frac{k}{nlnlln}+\frac{1}{Q'\,n^{2}},$$

то достаточно показать возможность удовлетворенія неравенству

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nln}+\frac{1+\delta}{nlnlln}>1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nln}+\frac{k}{nlnlln}+\frac{1}{Q'.n^{2}},$$

или, по сокращеніи, слѣдующему:

$$1+\delta>k+\frac{lnlln}{Q'.n}.$$

Такъ какъ вторая часть этого неравенства, съ увеличеніемъ n, неопредѣленно приближается къ k, то изъ этого заключаемъ, что взявъ для разности $k-1$ величину меньшую положительной величины δ, удовлетворимъ требуемому условію. И такъ, въ настоящемъ предположеніи, k будетъ величина большая единицы, и притомъ

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{l(n+1)}{ln} \left(\frac{ll(n+1)}{lln}\right)^k,$$

или, что́ всё равно,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{\frac{1}{nln(lln)^k}}{\frac{1}{(n+1)l(n+1)[ll(n+1)]^k}}.$$

И такъ, отношеніе

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}$$

двухъ смежныхъ членовъ, предъидущаго къ послѣдующему, въ безконечномъ ряду

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots,$$

при возрастающихъ величинахъ n, будетъ постоянно болѣе подобнаго же отношенія

$$\frac{\frac{1}{nln(lln)^k}}{\frac{1}{(n+1)l(n+1)[ll(n+1)]^k}}$$

въ разсужденіи строки

$$1+\frac{1}{2l2(ll2)^k}+\frac{1}{3l3(ll3)^k}+\frac{1}{4l4(ll4)^k}+\ldots.$$

Но какъ этотъ второй рядъ, для $k>1$, есть сходящійся, то въ силу *леммы* Дюгамеля заключаемъ, что и первый, именно

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots,$$

при допущенныхъ условіяхъ, равнымъ образомъ будетъ сходящійся.

Сообразивъ всё сказанное, теорему *Моргана* можно предложить въ слѣдующемъ видѣ: *Чтобы рѣшить, будетъ ли безконечная строка*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

сходящаяся *или* расходящаяся, *составляемъ рядъ функцій:*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \varphi(n)$$

$$n[\varphi(n)-1] = \varphi_1(n)$$

$$ln[\varphi_1(n)-1] = \varphi_2(n)$$

$$lln[\varphi_2(n)-1] = \varphi_3(n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l^\mu n[\varphi_\mu(n)-1] = \varphi_{\mu+1}(n).$$

Положивъ въ нихъ $n=\infty$, *и вычтя потомъ изъ каждой единицу, получимъ слѣдующій рядъ членовъ:*

$$\varphi(\infty)-1,\quad \varphi_1(\infty)-1,\quad \varphi_2(\infty)-1,\quad \varphi_3(\infty)-1,\ldots.$$

Разсматриваемая безконечная строка будетъ сходящеюся, *если первый изъ неуничтожающихся въ найденномъ ряду членовъ окажется* положительнымъ, *а* расходящеюся, *если первый неуничтожающійся членъ будетъ* отрицательный.

Правило, найденное *Дюгамелемъ*, и, въ одно время съ нимъ, Цюрихскимъ математикомъ *Раабе*, есть частный случай изложенной сей-часъ общей теоремы. Оно тожественно съ первымъ признакомъ способа *Моргана*, именно:

$$\text{пред.}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\} \begin{matrix} >1 \text{ для рядовъ сходящихся,} \\ <1 \text{ для рядовъ расходящихся.}\end{matrix}$$

Это самое правило было предложено и въ слѣдующемъ видѣ: положивъ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

ищемъ предѣлъ произведенія $n.\alpha$, то есть величину его при $n=\infty$. Рядъ

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

будетъ *сходящійся* или *расходящійся* смотря по тому, окажется ли пред.$(n.\alpha)>1$ или <1; случай же пред.$(n.\alpha)=1$ остается сомнительнымъ.

Тожество послѣднихъ двухъ признаковъ слѣдуетъ изъ уравненія

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

которое прямо ведетъ къ равенству

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = n.\alpha.$$

Окончимъ изложеніе этихъ правилъ полезнымъ замѣчаніемъ *Шультена**) относительно признака сходимости строкъ, для которыхъ функція

$$\varphi(n) = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

есть *алгебрическая*, или даже и *трансцендентная*, по разлагающаяся по отрицательнымъ степенямъ числа n. Въ такомъ случаѣ *строка*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

окажется сходящеюся, *если величина* k, *опредѣляемая уравненіемъ*

$$k = \varphi_1(n)-1 = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1 \quad \text{при} \quad n=\infty,$$

будетъ положительною, а расходящеюся, *если* $k=0$ *или величинѣ отрицательной.*

---

*) *Note sur la théorie de la convergence des suites, par N. G. de Shultén* (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Tomi secundi, Fasciculus II, 1844).

Дѣйствительно, если бы представился случай сомнительный, именно

$$\text{пред.}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}=0,$$

то, по правилу Моргана, надлежало бы обратиться къ функціи

$$\varphi_2(n)-1=ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]-1;$$

но, замѣтимъ, что въ настоящемъ предположеніи эта послѣдняя разность приводится къ -1 при переходѣ къ предѣлу, почему разсматриваемый рядъ и будетъ расходящійся. Для этого достаточно показать, что $\varphi_2(n)$ уничтожается когда $n=\infty$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ функція

$$\varphi_1(n)-1=n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1$$

обращается въ нуль при $n=\infty$, то её можно представить въ видѣ

$$\frac{\chi(n)}{n^\alpha}=\varphi_1(n)-1,$$

разумѣя подъ α число положительное, независимое отъ n, а подъ $\chi(n)$ функцію неуничтожающуюся при положеніи $n=\infty$. И такъ, получимъ

$$\varphi_2(n)=\frac{ln\cdot\chi(n)}{n^\alpha}.$$

Но $\frac{ln}{n^\alpha}$, при $n=\infty$, обращается въ нуль, а функція $\chi(n)$, при томъ же положеніи, не дѣлается безконечною; слѣдовательно $\varphi_2(\infty)=0$, что̀ и имѣли въ виду показать.

Напримѣръ, для ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

найдемъ

$$\varphi(n)-1=\frac{n+1}{n}-1=\frac{1}{n},\quad \varphi(\infty)-1=0,$$

$$\varphi_1(n)-1=n\cdot\frac{1}{n}-1=0,\quad \varphi_1(\infty)-1=0.$$

Такъ какъ $\varphi(\infty)-1$ и $\varphi_1(\infty)-1$ равны *нулю*, то и заключаемъ, что разсматриваемый рядъ *расходящійся*. Если бы обратились къ функціи $\varphi_2(\infty)-1$, то нашли бы для ея величины отрицательную единицу, какъ и должно быть.

Возьмемъ еще рядъ

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\cdot\frac{1}{2n+3}+\cdots,$$

изображающій разложеніе $\text{arc.sin.}1=\frac{\pi}{2}$. Для него имѣемъ

$$\varphi(n)-1=\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{2n+3}{2n+1}-1=\frac{6n+5}{(2n+1)^2},\quad \varphi(\infty)-1=0,$$

$$\varphi_1(n)-1=n\cdot\frac{6n+5}{(2n+1)^2}-1=\frac{2n^2+n-1}{4n^2+4n+1},\quad \varphi_1(\infty)-1=\frac{1}{2}.$$

Изъ того что $\varphi_1(\infty)-1$ есть величина положительная, прямо заключаемъ о сходимости предложеннаго ряда.

§ 3. Разсмотримъ теперь рядъ

$$s=u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-\ldots \qquad (F)$$

съ членами поперемѣнно положительными и отрицательными. Легко показать, что единственное условіе для его сходимости состоитъ въ томъ, чтобы онъ былъ *убывающимъ*. Это свойство прямо обнаруживается написавъ (F) въ двухъ слѣдующихъ видахъ:

$$s=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\ldots$$

и

$$s=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots$$

Такъ какъ каждая изъ разностей u_1-u_2, u_3-u_4,.... u_2-u_3, u_4-u_5,.... есть величина положительная, то заключаемъ, что

$$s>0 \quad \text{и вмѣстѣ съ тѣмъ} \quad s<u_1$$

$$s>u_1-u_2\ldots\ldots\ldots\ldots s<u_1-u_2+u_3$$

$$s>u_1-u_2+u_3-u_4\ldots\ldots s<u_1-u_2+u_3-u_4+u_5$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Поэтому сумма $u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-\ldots$, по мѣрѣ увеличенія числа членовъ, непрестанно приближается къ нѣкоторому предѣлу, заключающемуся между 0 и u_1, или, приблизительнѣе, между

$$u_1-u_2 \quad \text{и} \quad u_1-u_2+u_3$$

$$u_1-u_2+u_3-u_4 \quad \text{и} \quad u_1-u_2+u_3-u_4+u_5$$

и такъ далѣе.

Ясно впрочемъ, что рядъ (F) будетъ сходящійся, хотя бы онъ въ первыхъ своихъ членахъ и не удовлетворялъ условіямъ поперемѣнности знаковъ и убыванія членовъ. Достаточно, чтобы упоминаемыя условія обнаружились съ дальнѣйшаго, но опредѣленнаго члена.

Въ безконечной убывающей строкѣ знаки могутъ перемѣняться чрезъ каждые два, три, четыре.... члена. И въ этомъ предположеніи она останется сходящеюся, въ чёмъ легко удостовѣриться какъ выше. Напримѣръ рядъ

$$s=u_1+u_2+u_3-u_4-u_5-u_6+u_7+u_8+u_9-\ldots$$

будетъ сходящійся, если только

$$u_1>u_2>u_3>u_4>u_5>\ldots;$$

дѣйствительно, положивъ

$$u_1+u_2+u_3=v_1,\quad u_4+u_5+u_6=v_2,\quad u_7+u_8+u_9=v_3\ldots,$$

гдѣ $v_1>v_2>v_3>\ldots$, найдется рядъ

$$s=v_1-v_2+v_3-v_4+v_5-\ldots,$$

который относиться къ разсмотрѣнному уже случаю, и удовлетворяетъ условію сходимости.

Мнимый рядъ

$$(u_1+v_1\sqrt{-1})+(u_2+v_2\sqrt{-1})+(u_3+v_3\sqrt{-1})+\ldots$$

принимаетъ названіе *сходящагося*, когда вещественные ряды

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \quad \text{и} \quad v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots$$

будутъ оба сходящіеся; въ противномъ случаѣ мнимый рядъ называется *расходящимся*.

§ 4. Пояснимъ еще теорію сходимости рядовъ нѣкоторыми примѣрами. Пусть будетъ строка

$$a^x=1+\frac{\log.a.x}{1}+\frac{\log.^2a.x^2}{1.2}+\frac{\log.^3a.x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{\log.^na.x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

Такъ какъ всѣ ея члены положительные, то обращаемся къ признаку (E). Отношеніе двухъ смежныхъ общихъ членовъ

$$\frac{\log.^na.x^n}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{\log.^{n+1}a.x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

будетъ $\frac{\log.a.x}{n+1}$; это отношеніе, при $n=\infty$, и для какого ни есть x, обращается въ *нуль*. Слѣдовательно, разсматриваемый рядъ будетъ *сходящійся* для всѣхъ возможныхъ значеній x. Легко удостовѣриться въ его сходимости и для мнимыхъ величинъ перемѣнной.

Возьмемъ еще строки

$$t-\frac{t^3}{3}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7}+\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{t^9}{9}-\ldots \qquad (G)$$

$$1+\frac{2t^2}{1.3}+\frac{(2t^2)^2}{1.3.5}+\frac{(2t^2)^3}{1.3.5.7}+\ldots, \qquad (H)$$

выведенныя въ № 23. Такъ какъ въ первой строкѣ знаки попремѣнно положительные и отрицательные, то достаточно узнать, будетъ ли она убывающею, по крайней мѣрѣ съ нѣкотораго дальнѣйшаго члена. Для этого возьмемъ отношеніе двухъ общихъ членовъ, независимо отъ знака; эти члены будутъ

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{t^{2n+1}}{2n+1},\quad \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{t^{2n+3}}{2n+3},$$

а упоминаемое отношеніе обратится просто въ

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\cdot t^2=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}\cdot t^2;$$

эта дробь, при возрастающихъ значеніяхъ числа n, будетъ неопредѣленно уменьшаться, и наконецъ, для $n=\infty$, обратится въ *нуль*. Отсюда мы въ правѣ заключить, что нетолько рядъ (G), но даже и строка

$$t+\frac{t^3}{3}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7}+\ldots,$$

въ которой всѣ члены положительные, удовлетворяетъ условію сходимости при какомъ ни есть значеніи t.

Въ сходимости ряда (H) удостовѣримся взявъ предѣлъ отношенія двухъ смежныхъ общихъ членовъ

$$\frac{(2t^2)^n}{1.3.5\ldots(2n+1)},\quad\frac{(2t^2)^{n+1}}{1.3.5\ldots(2n+1)(2n+3)};$$

это отношеніе будетъ $\frac{2t^2}{2n+3}$, а предѣлъ его равенъ *нулю* для всякой величины t.

Для послѣдняго примѣра возьмемъ разложеніе

$$\text{Cos}.x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}-\ldots \qquad (I)$$

Для значеній дуги x, не превышающихъ единицы, этотъ рядъ очевидно будетъ убывающій, и слѣдовательно сходящійся. Но когда величина x сдѣлается довольно значительною, то первые члены строки будутъ возрастать очень быстро, и, поэтому, чтобы рѣшить, каково предложенное разложеніе, сходящееся-ли или расходящееся, должно разсмотрѣть, сдѣлается-ли оно убывающимъ съ нѣкотораго дальнѣйшаго члена. Два смежные общіе члена, независимо отъ знака, будутъ

$$\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)},\quad\frac{x^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n)(2n+1)(2n+2)},$$

а ихъ отношеніе $\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}$; эта дробь, при $n=\infty$, обращается въ *нуль*, изъ чего заключаемъ, что рядъ (I) *сходящійся*. Чтобъ опредѣлить мѣсто члена, съ котораго строка становится убывающею, достаточно рѣшить уравненіе

$$\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=1$$

въ разсужденіи n, и взять для n ближайшее къ положительному корню цѣлое число, но превосходящее этотъ корень. Такъ, напримѣръ, при $x=10$, нашли бы $n=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{100,25}$, и какъ ближайшее цѣлое число къ этому корню есть 5, то и заключаемъ, что разложеніе (I) становится убывающимъ съ *пятаго* своего члена.

§ 5. Въ заключеніе этого Примѣчанія, приведемъ предложеніе, относящееся къ интегрированію посредствомъ рядовъ. Мы докажемъ, что если строка

$$s = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \quad (J)$$

будетъ сходящаяся для всѣхъ значеній перемѣнной x, заключающихся между a и b, то съ полною надёжностію можемъ интегрировать рядъ (J) помноженный на dx между предѣлами α и β, лишь бы только α и β сами не выходили изъ предѣловъ a и b. Такимъ образомъ получимъ

$$\int_\alpha^\beta sdx = \int_\alpha^\beta u_1dx+\int_\alpha^\beta u_2dx+\int_\alpha^\beta u_3dx+\cdots+\int_\alpha^\beta u_ndx+\cdots \quad (K)$$

Для доказательства этого предложенія, означимъ чрезъ r_n остатокъ строки (J), а чрезъ U_1, U_2, $U_3\ldots U_n$ послѣдовательные члены интегральнаго ряда (K). Пусть будетъ также R_n остатокъ строки (K). Получимъ сперва

$$s = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+r_n,$$

и потомъ, умноживъ это тожественное уравненіе на dx, и взявъ интегралъ

$$\int_\alpha^\beta sdx = U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+R_n.$$

Для сходимости ряда (K) достаточно, чтобы величина $R_n=\int_\alpha^\beta r_ndx$, по мѣрѣ увеличенія n, уменьшалась неопредѣленно, и достигала предѣла *нуль*. Очень легко доказать, что если рядъ (J) сходящійся, то R_n удовлетворитъ сказанному условію. Дѣйствительно, при сходимости ряда (J), остатокъ r_n, который изобразимъ чрезъ $\varphi(x, n)$, по мѣрѣ увеличенія n, будетъ уменьшаться, и наконецъ, при $n=\infty$, обратится въ нуль для всѣхъ значеній перемѣнной x, заключающихся между предѣлами a и b. Съ другой же стороны, такъ какъ интегралъ

$$R_n = \int_\alpha^\beta r_ndx = \int_\alpha^\beta \varphi(x, n)\,dx$$

можетъ быть замѣненъ среднимъ ариѳметическимъ значеніемъ функціи $\varphi(x, n)$, умноженнымъ на разность $\beta-\alpha$ предѣловъ [ПРИМѢЧАНІЕ IX, § 1], то и получится

$$R_n = (\beta-\alpha)\varphi(\alpha+\theta(\beta-\alpha), n), \quad \text{гдѣ } \theta>0 \text{ и } <1,$$

или $R_n=(\beta-\alpha)r_n$, предполагая что r_n соотвѣтствуетъ значенію $x=\alpha+\theta(\beta-\alpha)$, очевидно заключающемуся между предѣлами a и b. Но при $n=\infty$, будетъ $r_n=0$; слѣдовательно и R_n имѣетъ также своимъ предѣломъ *нуль*. Изъ этого свойства остатка R_n должно заключить, что интегральный рядъ (K) будетъ *сходящійся* въ одно время съ строкою (J) между одинаковыми предѣлами.

ПРИМѢЧАНІЕ IV.

§ 1. Пусть будетъ

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2}dx,$$

и какъ величина A постоянная, то получимъ также

$$A = \int_0^\infty e^{-y^2}dy;$$

слѣдовательно

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.\int_0^\infty e^{-y^2}dy = A^2.$$

Съ другой же стороны, по причинѣ постоянныхъ предѣловъ, имѣемъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy = A^2.$$

Для опредѣленія этого двойнаго интеграла, положимъ

$$x = r\text{Cos.}\varphi, \qquad y = r\text{Sin.}\varphi,$$

разумѣя подъ r и φ полярныя координаты точки, опредѣляемой абсциссою x и ординатою y. Въ такомъ предположеніи, элементъ площади $dxdy$ должно будетъ замѣнить новымъ элементомъ $mm'n'n$ (чертежъ 12), ограниченнымъ двумя смежными радіусами векторами On, On' и двумя круговыми дугами mm' и nn', изъ которыхъ первая описана радіусомъ r, а вторая, радіусомъ $r+dr$. Такъ какъ разсматриваемый элементъ можно принимать за разность площадей двухъ треугольниковъ Onn' и Omm', въ которыхъ общій уголъ mOm' равенъ $d\varphi$, то, на основаніи способа безконечно малыхъ величинъ, найдется для $mm'n'n$ выраженіе

$$\frac{(r+dr)^2d\varphi}{2}-\frac{r^2d\varphi}{2} = rdrd\varphi.$$

Далѣе, по причинѣ $x^2+y^2=r^2$, получимъ $e^{-(x^2+y^2)}=e^{-r^2}$, и наконецъ

$$\iint e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint e^{-r^2}rdrd\varphi.$$

Такъ какъ первый изъ этихъ двойныхъ интеграловъ долженъ быть распространенъ на всѣ возможныя положительныя значенія x и y, или, иначе, на всё пространство прямаго угла XOY (чертежъ 12), то интегралъ относительно r долженъ быть взятъ отъ $r=0$ до $r=\infty$, а въ разсужденіи φ, отъ $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Поэтому будетъ

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\varphi=A^2.$$

Но

$$\int_0^\infty e^{-r^2}rdr=\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)_0^\infty=\frac{1}{2};$$

подставивъ эту величину въ предъидущую формулу, получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\varphi=\frac{\pi}{4}=A^2,\quad \text{откуда}\quad A=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

и слѣдовательно

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (A)$$

Если примемъ въ соображеніе, что подъинтегральная функція e^{-x^2} есть чётная, то прямо выведемъ [ПРИМѢЧАНІЕ IX, § 1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}. \qquad (B)$$

На основаніи формулы (A), очень легко вывести и интегралъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2m}dx,$$

разумѣя подъ m цѣлое положительное число. Для этого, пусть будетъ α постоянная величина, и положимъ

$$y=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx.$$

Дифференцируя это уравненіе m разъ сряду въ разсужденіи α, получимъ

$$\frac{d^my}{d\alpha^m}=(-1)^m\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2m}dx.$$

Но, съ другой стороны,

$$y=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty e^{-(x\sqrt{\alpha})^2}d(x\sqrt{\alpha})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\alpha^{-\frac{1}{2}};$$

слѣдовательно

$$(-1)^m\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2m}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{d^m(\alpha^{-\frac{1}{2}})}{d\alpha^m};$$

производя означенное дифференцированіе, найдется

$$\frac{d^m(\alpha^{-\frac{1}{2}})}{d\alpha^m}=(-1)^m.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\ldots\frac{2m-1}{2}.\alpha^{-\frac{2m+1}{2}},$$

а поэтому

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2m}dx=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\alpha^{-\frac{2m+1}{2}}.$$

Наконецъ, положивъ $\alpha=1$,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2m}dx=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (C)$$

Принимая послѣдовательно $m=1, 2, 3\ldots$ получимъ формулы:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^2dx=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^4dx=\frac{1.3}{2^2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^6dx=\frac{1.3.5}{2^3}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

которыя употреблены въ N° 80.

Такъ же легко будетъ найти величины интеграловъ съ нечётными степенями перемѣнной x. Дѣйствительно, наблюдая что

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}xdx=\left(-\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha}\right)_0^\infty=\frac{1}{2}.\alpha^{-1},$$

получимъ послѣ m-кратнаго дифференцированія

$$(-1)^m\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2m+1}dx=(-1)^m.\frac{1}{2}.1.2.3.4\ldots m.\alpha^{-(m+1)}.$$

Полагая $\alpha=1$, найдется

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2m+1}dx=\frac{1}{2}.1.2.3.4\ldots m. \qquad (D)$$

Замѣтимъ, что выведенныя нами формулы (A), (B), (C) и (D) могутъ прямо служить для опредѣленія интеграловъ, въ которые, вмѣсто показательной функціи e^{-x^2}, войдетъ выраженіе e^{-Bx^2}, разумѣя подъ B постоянную величину. Дѣйствительно, положивъ $Bx^2=t^2$, и наблюдая что предѣлы въ разсужденіи новой перемѣнной t не измѣнятся, получимъ, перемѣнивъ t на x:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-Bx^2}dx=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-Bx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}},\\&\int_0^\infty e^{-Bx^2}x^{2m}dx=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\pi}}{B^m\sqrt{B}},\\&\int_0^\infty e^{-Bx^2}x^{2m+1}dx=\frac{1}{2}.\frac{1.2.3\ldots m}{B^{m+1}}.\end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

§ 2. Главное свойство выведенныхъ здѣсь интеграловъ по приложенію ихъ къ рѣшенію вопросовъ изъ Анализа Вѣроятностей, состоитъ въ томъ что по замѣненіи безконечныхъ предѣловъ величинами посредственными, значенія этихъ интеграловъ почти не измѣнятся. Войдемъ въ нѣкоторыя подробности по этому предмету.

Положимъ, напримѣръ, что вмѣсто интеграла (A), желаемъ вычислить $\int_0^4 e^{-x^2}dx$; съ этою цѣлію, возьмемъ рядъ

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{(2x^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2x^2)^3} + \ldots\right],$$

выведенный въ N° 23 [формула (29)], гдѣ подробно объяснено почему, и въ какомъ случаѣ эта строка можетъ быть съ надёжностію употребляема въ первыхъ своихъ членахъ. Основываясь на этомъ разложеніи мы видимъ, что разность между интегралами

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{и} \quad \int_0^x e^{-x^2}dx,$$

для $x = 4$, опредѣлится выраженіемъ

$$\frac{e^{-4^2}}{8}\left[1 - \frac{1}{2.4^2} + \frac{1.3}{(2.4^2)^2} - \ldots\right] < \frac{e^{-4^2}}{8}.$$

Вычисляя посредствомъ логарифмическихъ таблицъ эту послѣднюю величину, найдемъ приблизительно

$$\frac{e^{-4^2}}{8} = \frac{1}{71089000}.$$

Эта разность такъ незначительна, что, довольствуясь извѣстною степенью приближенія, можно, интегралъ

$$\int_0^x e^{-x^2}dx$$

замѣнить интеграломъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

когда верхній предѣлъ x будетъ не менѣе какого нибудь посредственнаго числа, напримѣръ 3, 4, 5 и проч.

Для соображенія, приводимъ еще разность интеграловъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx - \int_0^3 e^{-x^2}dx = 0{,}00001957729\ldots.$$

Изложенное здѣсь свойство объясняется весьма простымъ образомъ тѣмъ, что подъинтегральная функція e^{-x^2} убываетъ чрезвычайно быстро, даже при посредственномъ увеличеніи перемѣнной x. То́ же заключеніе справедливо и въ случаѣ, когда, вмѣсто показательной функціи e^{-x^2}, имѣемъ подъ интеграломъ e^{-Bx^2}. Такъ, напримѣръ, интегралъ

$$\int_{-a}^{+b} e^{-Bx^2}dx$$

будетъ весьма мало разнствовать отъ интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bx^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}},$$

когда $a\sqrt{B}$ и $b\sqrt{B}$ будутъ означать числа посредственныя, напримѣръ не мéньшія 4. Для доказательства этого утвержденія, замѣтимъ что

$$\int_{-a}^{+b} e^{-Bx^2}dx = \int_{-a}^{0} e^{-Bx^2}dx + \int_0^{+b} e^{-Bx^2}dx,$$

и какъ подъинтегральная функція e^{-Bx^2} не перемѣняетъ знака, то и будетъ

$$\int_{-a}^{0} e^{-Bx^2}dx = \int_0^a e^{-Bx^2}dx;$$

слѣдовательно

$$\int_{-a}^{+b} e^{-Bx^2}dx = \int_0^a e^{-Bx^2}dx + \int_0^b e^{-Bx^2}dx.$$

Положивъ $Bx^2 = u^2$, и замѣтивъ что верхній предѣлъ въ отношеніи u будетъ $a\sqrt{B}$, получимъ

$$\int_0^a e^{-Bx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^{a\sqrt{B}} e^{-u^2}du.$$

Такъ какъ мы предположили, что число $a\sqrt{A}$ не менѣе 4, то получимъ весьма приблизительно

$$\int_0^a e^{-Bx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^{a\sqrt{B}} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}.$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдется приближенное значеніе

$$\int_0^b e^{-Bx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^{b\sqrt{B}} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}.$$

Слѣдовательно, при допущенномъ условіи относительно произведеній $a\sqrt{B}$ и $b\sqrt{B}$, получимъ съ большимъ приближеніемъ

$$\int_{-a}^{+b} e^{-Bx^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bx^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}.$$

Такъ, напримѣръ, въ N° 69 разсматривался интегралъ

$$\int_{-\left(\frac{pq'}{q} - q'\right)}^{+\infty} e^{-Bt^2}dt,$$

гдѣ

$$B = \frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')},$$

а p, q, q' изображали значительныя числа; мы замѣнили его интеграломъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bt^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}.$$

Справедливость подобнаго замѣненія прямо обнаруживается тѣмъ, что новый предѣлъ

$$-\left(\frac{pq'}{q}-q'\right)\sqrt{B}=-\left(\frac{pq'}{q}-q'\right)\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')}}$$

будетъ число посредственной величины. Дѣйствительно, давъ послѣднему произведенію видъ

$$-\sqrt{\frac{qq'(p-q)}{2p(q+q')}},$$

и замѣтивъ, что числитель подкоренной величины содержитъ три множителя, а знаменатель только два фактора, которые всѣ изображаютъ весьма большія числа, сравнимыя между собой, мы въ правѣ будемъ заключить, что этотъ новый предѣлъ равенъ числу довольно значительному, которое вообще превосходитъ четыре единицы.

Для численнаго опредѣленія интеграловъ, разсмотрѣнныхъ въ этой статьѣ, будетъ служить значительнымъ пособіемъ таблицы, помѣщенныя въ концѣ нашей книги. Отсылаемъ читателей къ ОБЪЯСНЕНІЮ этихъ таблицъ.

§ 3. Въ концѣ № 23 приведено безъ доказательства разложеніе интеграла $\int_t^\infty e^{-t^2}dt$ въ непрерывную дробь, предложенное *Лапласомъ*. Выведемъ теперь эту примѣчательную формулу.

Положимъ

$$\int e^{-t^2}dt=\varphi(t)+C,$$

разумѣя подъ C постоянную произвольную величину. Дифференцируя это уравненіе, получимъ

$$\varphi'(t)=e^{-t^2}.$$

Но, съ другой стороны, принявъ

$$z=\int_t^\infty e^{-t^2}dt=\varphi(\infty)-\varphi(t),$$

будетъ

$$\frac{dz}{dt}=-\varphi'(t)=-e^{-t^2}.$$

Положимъ теперь

$$z=\frac{e^{-t^2}}{2t}\cdot y,$$

гдѣ y изображаетъ неизвѣстную функцію перемѣнной t. Найдется

$$\frac{dz}{dt}=e^{-t^2}\left[\frac{1}{2t}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{y}{2t^2}-y\right]=-e^{-t^2},$$

или, по сокращеніи,

$$\frac{1}{2t}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{y}{2t^2}-y+1=0.$$

Прежде всего замѣтимъ, что при $t=\infty$, y обращается въ единицу. Дѣйствительно, такъ какъ дробь

$$y=\frac{\int_t^\infty e^{-t^2}dt}{\frac{e^{-t^2}}{2t}},$$

при $t=\infty$, принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, то истинная величина y опредѣлится отношеніемъ производной числителя къ производной знаменателя для того же значенія $t=\infty$; такимъ образомъ получимъ

$$y=\left(\frac{-e^{-t^2}}{-e^{-t^2}\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)}\right)_{t=\infty}=1.$$

Пусть будетъ $\frac{1}{2t^2}=x$; по причинѣ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\quad\text{или}\quad\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dt}{dx}},$$

а также

$$-\frac{1}{t^3}\cdot\frac{dt}{dx}=1,\quad\text{откуда}\quad\frac{dt}{dx}=-t^3,$$

предыдущее дифференціальное уравненіе приметъ видъ

$$2x^2\cdot\frac{dy}{dx}+xy+y-1=0.$$

Сверхъ того извѣстно, что это уравненіе, при $x=0$, должно доставить $y=1$, ибо, при $t=\infty$, имѣемъ въ одно время $y=1$ и $x=0$, по причинѣ $x=\frac{1}{2t^2}$.

Приложимъ къ послѣднему дифференціальному уравненію обыкновенный способъ превращенія интеграла въ непрерывную дробь. Такъ какъ для весьма малыхъ значеній перемѣнной x, y будетъ очень мало разнствовать отъ 1, то положимъ

$$y=\frac{1}{1+y_1},$$

гдѣ y_1 обращается въ нуль для $x=0$. Найдется

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(1+y_1)^2}\cdot\frac{dy_1}{dx},$$

и слѣдовательно

$$\frac{2x^2}{(1+y_1)^2}\cdot\frac{dy_1}{dx}-\frac{x}{1+y_1}-\frac{1}{1+y_1}+1=0,$$

или

$$2x^2\cdot\frac{dy_1}{dx}+y_1^2-xy_1+y_1-x=0.$$

Чтобы найти приближенную величину для y_1, стоитъ только замѣтить, что при весьма маломъ x, члены $2x^2.\frac{dy_1}{dx}$, y_1^2, $-xy_1$ будутъ несравненно меньше остальныхъ двухъ y_1 и $-x$; поэтому можно положить

$$y_1 = \frac{x}{1+y_2}.$$

Дифференціальное уравненіе, опредѣляющее y_2, будетъ

$$2x^2.\frac{dy_2}{dx}+y_2^2-xy_2+y_2-2x=0.$$

Откидывая первые три члена, какъ несравненно меньшіе двухъ послѣднихъ, получимъ приближенное значеніе $y_2=2x$, въ слѣдствіе чего должно положить

$$y_2 = \frac{2x}{1+y_3}.$$

Новое уравненіе въ y_3 будетъ имѣть видъ

$$2x^2.\frac{dy_3}{dx}+y_3^2-xy_3+y_3-3x=0,$$

откуда получится приближенное значеніе $3x$ для перемѣнной y_3, почему и примемъ

$$y_3 = \frac{3x}{1+y_4}.$$

На такомъ же основаніи найдемъ для y_4 выраженіе

$$y_4 = \frac{4x}{1+y_5},$$

и такъ далѣе. Такимъ образомъ получимъ

$$y = \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+.}}}}}$$

и наконецъ

$$\int_t^\infty e^{-t^2}dt = \frac{e^{-t^2}}{2t}.\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+.}}}}} \qquad (F)$$

гдѣ положено для простоты $x=\frac{1}{2t^2}$. Формула (F) есть та самая, которая приведена въ концѣ N° 31.

ПРИМѢЧАНІЕ V.

Пусть будутъ a и r какія ни есть величины, а n цѣлое положительное число. Произведеніе n членовъ ариѳметической прогрессіи

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ldots a+(n-1)r$$

называется *факторіальною функціею*, и изображается знакоположеніемъ $a^{n|r}$. И такъ

$$a^{n|r} = a(a+r)(a+2r)\ldots(a+[n-1]r),$$

въ слѣдствіе чего имѣемъ

$$a^{1|r}=a,\quad a^{2|r}=a(a+r),\quad a^{3|r}=a(a+r)(a+2r)\ \text{и проч.}$$

Вмѣсто одночленныхъ факторіальныхъ выраженій $a^{1|r}$, $a^{2|r}$, $a^{3|r}\ldots$, можно точно такъ же разсматривать и многочленныя. Положимъ, напримѣръ, что въ предъидущей общей формулѣ замѣняемъ одночленное количество a двучленнымъ $a+b$; получимъ

$$(a+b)^{n|r} = (a+b)(a+b+r)(a+b+2r)\ldots(a+b+[n-1]r).$$

На такомъ основаніи представляется любопытный вопросъ: какъ выражается факторіальный биномъ $(a+b)^{n|r}$ посредствомъ одночленныхъ факторіальныхъ количествъ $a^{1|r}, a^{2|r}, a^{3|r}\ldots$, $b^{1|r}$, $b^{2|r}$, $b^{3|r}\ldots$ и цѣлаго числа n? Мы увидимъ сей-часъ, что эта зависимость опредѣляется формулою, совершенно подобною *Ньютонову биному*, именно:

$$(a+b)^{n|r} = a^{n|r}+na^{n-1|r}.b^{1|r}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2|r}.b^{2|r}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3|r}.b^{3|r}+\ldots \qquad (A)$$

Численные коэффиціенты разложенія (A) одинаковы съ коэффиціентами степени $(a+b)^n$, и поэтому будутъ не иное что̀, какъ *биноміальные;* законъ же одночленныхъ факторіальныхъ функцій очевиденъ.

Для доказательства общей формулы (A) сдѣлаемъ сперва частныя предположенія о числѣ n. Такъ полагая послѣдовательно $n=1, 2, 3\ldots$ получимъ:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{1|r} &= a+b = a^{1|r}+b^{1|r} \\
(a+b)^{2|r} &= (a+b)(a+b+r) = a(a+r)+2ab+b(b+r) \\
&= a^{2|r}+2a^{1|r}.b^{1|r}+b^{2|r} \\
(a+b)^{3|r} &= (a+b)(a+b+r)(a+b+2r) \\
&= a(a+r)(a+2r)+3a(a+r)b+3ab(b+r)+b(b+r)(b+2r) \\
&= a^{3|r}+3a^{2|r}.b^{1|r}+3a^{1|r}.b^{2|r}+b^{3|r}.
\end{aligned}
$$

. . . .

Найденныя разложенія для $(a+b)^{1|r}$, $(a+b)^{2|r}$, $(a+b)^{3|r}\ldots$ согласуются съ общею формулою (A). Чтобы доказать ея справедливость вообще, можно употребить извѣстный пріёмъ, состоящій въ повѣркѣ этой формулы для числа $n+1$, допуская ея справедливость для n. Такимъ образомъ общность разложенія (A) будетъ доказана. Въ самомъ дѣлѣ, зная что оно справедливо для $n=3$, мы въ правѣ заключить, что оно имѣетъ мѣсто и для $n+1=4$, а слѣдовательно и для $4+1=5$, $5+1=6$, и вообще для какого ни есть цѣлаго положительнаго числа n.

И такъ, допустимъ формулу (A) для цѣлаго числа n, и докажемъ ея справедливость при измѣненіи n въ $n+1$. Означивъ для простоты чрезъ N_1, N_2, $N_3\ldots$ биноміальные коэффиціенты n, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\ldots$, получимъ

$$(a+b)^{n|r} = a^{n|r}+N_1a^{n-1|r}.b^{1|r}+N_2a^{n-2|r}.b^{2|r}+N_3a^{n-3|r}.b^{3|r}+\ldots.$$

Если помножимъ обѣ части этого равенства на $a+b+nr$, то, въ слѣдствіе самаго опредѣленія факторіальныхъ функцій, найдется:

$$
\left.
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1|r} = &(a^{n|r}+N_1a^{n-1|r}.b^{1|r}+N_2a^{n-2|r}.b^{2|r}+N_3a^{n-3|r}.b^{3|r}+\ldots)(a+nr) \\
&+(a^{n|r}+N_1a^{n-1|r}.b^{1|r}+N_2a^{n-2|r}.b^{2|r}+N_3a^{n-3|r}.b^{3|r}+\ldots)b;
\end{aligned}
\right\} (B)
$$

съ другой же стороны

$$
\begin{aligned}
a^{n|r}(a+nr) &= a^{n+1|r} \\
a^{n-1|r}(a+nr) &= a^{n-1|r}(a+\overline{n-1}.r+r) = a^{n|r}+r.a^{n-1|r} \\
a^{n-2|r}(a+nr) &= a^{n-2|r}(a+\overline{n-2}\ r+2r) = a^{n-1|r}+2r.a^{n-2|r} \\
a^{n-3|r}(a+nr) &= a^{n-3|r}(a+\overline{n-3}.r+3r) = a^{n-2|r}+3r.a^{n-3|r}
\end{aligned}
$$

. . . .

а также

$$b=b^{1|r},\quad b^{1|r}.b=b^{2|r}-rb^{1|r},\quad b^{2|r}.b=b^{3|r}-2rb^{2|r}\quad \text{и проч.}$$

По внесеніи этихъ величинъ въ формулу (B), получимъ:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1|r} = a^{n+1|r}&+N_1(a^{n|r}+r.a^{n-1|r})b^{1|r}+N_2(a^{n-1|r}+2r.a^{n-2|r})b^{2|r} \\
&+N_3(a^{n-2|r}+3r.a^{n-3|r})b^{3|r}+\ldots. \\
&+a^{n|r}.b^{1|r}+N_1(a^{n-1|r}.b^{2|r}-r.a^{n-1|r}.b^{1|r}) \\
&+N_2(a^{n-2|r}.b^{3|r}-2r.a^{n-2|r}.b^{2|r})+\ldots.
\end{aligned}
$$

Располагая найденное разложеніе по нисходящимъ порядкамъ факторіальной функціи въ отношеніи къ a, найдется послѣ надлежащихъ сокращеній:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1|r} = a^{n+1|r}&+(N_1+1)a^{n|r}.b^{1|r}+(N_2+N_1)a^{n-1|r}.b^{2|r} \\
&+(N_3+N_2)a^{n-2|r}.b^{3|r}+\ldots.
\end{aligned}
$$

Наконецъ, если замѣтимъ, что суммы N_1+1, N_2+N_1, $N_3+N_2,\ldots$ соотвѣтственно изображаютъ биноміальные коэффиціенты, относящіеся къ порядку $n+1$, что́ очевидно слѣдуетъ изъ равенствъ

$$
\begin{aligned}
N_1+1 &= n+1 \\
N_2+N_1 &= \frac{n(n-1)}{1.2}+n = \frac{(n+1)n}{1.2} \\
N_3+N_2 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}
\end{aligned}
$$

. . . .

и вообще

$$N_k+N_{k-1} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2.3\ldots k},$$

то получимъ формулу

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1|r} = a^{n+1|r}&+(n+1)a^{n|r}\,b^{1|r}+\frac{(n+1)n}{1.2}a^{n-1|r}.b^{2|r} \\
&+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}a^{n-2|r}.b^{3|r}+\ldots,
\end{aligned}
$$

доказывающую, что законъ, выражаемый разложеніемъ (A), справедливъ вообще.

Для полученія формулы (36) [N° 28], стоитъ только положить $r=-1$ въ разложеніи (A).

ПРИМѢЧАНІЕ VI.

Пусть будетъ z_x какая ни есть функція величины x, и положимъ, что эта перемѣнная независимая получаетъ постоянное приращеніе $\Delta x = 1$. На такомъ основаніи получимъ рядъ уравненій:

$$\begin{array}{lll}
z_{x+1}-z_x = \Delta z_x & \Delta z_{x+1}-\Delta z_x = \Delta^2 z_x & \Delta^2 z_{x+1}-\Delta^2 z_x = \Delta^3 z_x \\
z_{x+2}-z_{x+1} = \Delta z_{x+1} & \Delta z_{x+2}-\Delta z_{x+1} = \Delta^2 z_{x+1} & \ldots\ldots\ldots \\
z_{x+3}-z_{x+2} = \Delta z_{x+2} & \ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots & & \\
z_{x+s}-z_{x+s-1} = \Delta z_{x+s-1} & &
\end{array}$$

изъ которыхъ выведемъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned}
\Delta z_x &= z_{x+1}-z_x; \\
\Delta^2 z_x &= \Delta z_{x+1}-\Delta z_x = (z_{x+2}-z_{x+1})-(z_{x+1}-z_x) \\
&= z_{x+2}-2z_{x+1}+z_x; \\
\Delta^3 z_x &= \Delta^2 z_{x+1}-\Delta^2 z_x = (\Delta z_{x+2}-\Delta z_{x+1})-(\Delta z_{x+1}-\Delta z_x) \\
&= (z_{x+3}-z_{x+2})-(z_{x+2}-z_{x+1})-(z_{x+2}-z_{x+1})+(z_{x+1}-z_x) \\
&= z_{x+3}-3z_{x+2}+3z_{x+1}-z_x; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Вообще, разность порядка s опредѣлится слѣдующею формулою:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^s z_x = z_{x+s}-s.z_{x+s-1}+\frac{s(s-1)}{1.2}.z_{x+s-2}-\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}.z_{x+s-3}+\ldots \\
-(-1)^s s.z_{x+1}+(-1)^s z_x.
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Положимъ въ частности

$$z_x = \left[\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]^m;$$

такъ какъ факторіальное количество

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$$

доставляетъ по разложеніи цѣлую функцію степени n относительно перемѣнной x, а

$$[x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)]^m$$

цѣлую же функцію степени mn, то очевидно, что разность порядка s выраженія z_x, именно $\Delta^s z_x$ обратится въ *нуль*, когда $s > mn$. Дѣйствительно, такъ какъ разность порядка mn для функціи z_x будетъ постоянная, то всѣ дальнѣйшія ея разности уничтожатся. И такъ, въ силу уравненія (A), получимъ:

$$z_{x+s}-s.z_{x+s-1}+\frac{s(s-1)}{1.2}.z_{x+s-2}-\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}.z_{x+s-3}+\ldots. = 0, \quad (B)$$

при условіи $s > mn$ или $m < \frac{s}{n}$.

Посмотримъ теперь на какомъ членѣ прекратится рядъ (B), когда примемъ $x = 0$. Въ этомъ предположеніи послѣдовательныя состоянія функціи z_x, именно

$$z_x,\ z_{x+1},\ z_{x+2},\ z_{x+3}\ldots z_{x+s-1},\ z_{x+s}$$

замѣняются слѣдующими:

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3\ldots z_{s-1},\ z_s,$$

которыя, по принятому въ N° 36 знакоположенію, соотвѣтственно равнозначащи съ

$$P^m{}_0,\ P^m{}_1,\ P^m{}_2,\ P^m{}_3\ldots P^m{}_{s-1},\ P^m{}_s.$$

Такъ какъ общій членъ $P^m{}_\mu$ этого ряда опредѣляется формулою

$$P^m{}_\mu = \left[\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]^m,$$

то прямо видимъ, что $P^m{}_\mu$ обращается въ *нуль* для

$$\mu = 0,\ \mu = 1,\ \mu = 2,\ldots \mu = n-1.$$

И такъ, первый неуничтожающійся членъ будетъ $P^m{}_n = 1$. Слѣдовательно, въ предположеніи $x = 0$, и при условіи $m < \frac{s}{n}$, формула (B) приметъ видъ:

$$0 = P^m{}_s - s.P^m{}_{s-1}+\frac{s(s-1)}{1.2}.P^m{}_{s-2}-\ldots+(-1)^{s-n}.\frac{s(s-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(s-n)}.P^m{}_n.$$

Вторая часть этого уравненія тожественна со второю частію формулы (50) [N° 36]. Слѣдовательно, согласно съ сказаннымъ въ упоминаемомъ N°, величина y, изображающая полное число сложностей, заключающихъ въ себѣ всѣ s нумеровъ лотереи, обратится въ нуль, когда $m < \frac{s}{n}$, или, что̀ всё равно, когда $s > mn$.

Для полученія вѣроятности p, что въ m розыгрышей лотереи выйдутъ всѣ составляющіе её s нумеровъ, предполагая, что при каждомъ розыгрышѣ выходитъ по n нумеровъ, обращаемся къ формулѣ (47) [N° 36]. Такъ какъ въ силу этой формулы $p = \frac{y}{P^m{}_s}$, и какъ съ другой стороны y опредѣляется уравненіемъ

$$y = P^m{}_s - s\,.\,P^m{}_{s-1} + \frac{s(s-1)}{1.2}\,.\,P^m{}_{s-2} - \ldots + (-1)^{s-n}\,.\,\frac{s(s-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(s-n)}\,.\,P^m{}_n = \varDelta^s\,.\,P^m{}_x\,,$$

въ которомъ, по взятіи разности порядка s, должно будетъ положить $x = 0$, то и получимъ

$$p = \frac{\varDelta^s\,.\,P^m{}_x}{\left[\frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]^m} = \frac{\varDelta^s\,.\,[x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)]^m}{[s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)]^m}. \qquad (C)$$

Въ этомъ выраженіи, повторяемъ, должно положить $x = 0$ по совершеніи дѣйствій, означенныхъ знакомъ $\varDelta^s$. Формула (C) заключаетъ въ себѣ рѣшеніе *Лапласа**); онъ вывелъ её изъ уравненія въ конечныхъ разностяхъ, доставляемаго условіями вопроса, о которомъ сей-часъ упомянуто.

---

*) *Théorie analytique des Probabilités*, стр. 191—193.

ПРИМѢЧАНІЕ VII.

По причинѣ частаго употребленія разностныхъ уравненій въ Теоріи Вѣроятностей, мы предложимъ здѣсь нѣкоторыя подробности объ ихъ интегрированіи.

§ 1. *Уравненіемъ въ разностяхъ* называется всякое уравненіе, заключающее въ себѣ перемѣнныя независимыя, неизвѣстную ихъ функцію и разности этихъ величинъ. Если ограничимся покамѣстъ одною перемѣнною независимою x, и положимъ, что приращеніе ея $\varDelta x$ есть количество постоянное, то, изобразивъ чрезъ y искомую функцію, видъ разностнаго уравненія будетъ:

$$F(x,\ y,\ \varDelta y,\ \varDelta^2 y,\ \varDelta^3 y, \ldots) = 0.$$

Вмѣсто разностей $\varDelta y$, $\varDelta^2 y$, $\varDelta^3 y\ldots$ можно ввести послѣдовательныя состоянія функціи y, наблюдая что

$$\varDelta y = y_1 - y,\quad \varDelta^2 y = \varDelta y_1 - \varDelta y = (y_2 - y_1) - (y_1 - y) = y_2 - 2y_1 + y,$$
$$\varDelta^3 y = \varDelta^2 y_1 - \varDelta^2 y = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y \quad \text{и проч.}$$

Такимъ образомъ предъидущее уравненіе приметъ видъ

$$f(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ y_3\ldots) = 0,$$

въ которомъ преимущественно и разсматриваются уравненія въ конечныхъ разностяхъ.

Разностныя уравненія, подобно дифференціальнымъ, раздѣляются на *порядки* и на *степени*. Порядокъ опредѣляется высшею разностію $\varDelta^m y$, а степень, высшею степенью этой самой разности $(\varDelta^m y)^n$, входящею въ предложенное уравненіе. Такъ изъ двухъ уравненій

$$x^2 + y - (\varDelta y)^3 + x(\varDelta^3 y)^2 = 0 \quad \text{и} \quad y + x^2 y^4{}_1 + xy_2 - y^3{}_2 = 0$$

первое будетъ *третьяго порядка второй степени*, а второе, *втораго порядка третей степени*.

Возьмемъ въ частности уравненіе втораго порядка

$$f(x,\ y,\ y_1,\ y_2) = 0.$$

Изъ него выведемъ

$y_2 = \mathrm{f}(x, y, y_1)$, $\quad y_3 = \mathrm{f}(x+\Delta x, y_1, y_2)$, $\quad y_4 = \mathrm{f}(x+2\Delta x, y_2, y_3)$ и проч.

Подставляя послѣдовательно на мѣсто $y_2, y_3 \ldots$ величины, опредѣляемыя этими самыми уравненіями, будетъ

$$y_3 = \varphi(x, y, y_1), \quad y_4 = \chi(x, y, y_1), \quad \text{и вообще} \quad y_n = \psi(x, y, y_1).$$

Отсюда заключаемъ, что изъ разностнаго уравненія втораго порядка выводимъ всѣ члены ряда

$$y_2, \; y_3, \; y_4 \ldots y_n \ldots$$

посредствомъ величинъ y и y_1.

Совершенно подобнымъ образомъ удостовѣримся, что изъ разностнаго уравненія m-го порядка, можно вывести послѣдовательные члены ряда

$$y_m, \; y_{m+1}, \; y_{m+2} \ldots$$

посредствомъ предшествующихъ m членовъ

$$y, \; y_1, \; y_2, \; y_3 \ldots y_{m-1},$$

изображающихъ величины произвольныя. И такъ, безконечный рядъ

$$y, \; y_1, \; y_2, \; y_3 \ldots y_{m-1}, \; y_m, \; y_{m+1}, \; y_{m+2} \ldots,$$

къ которому приводитъ уравненіе въ разностяхъ какого ни есть порядка m, заключаетъ въ себѣ m членовъ $y, y_1, y_2, y_3 \ldots y_{m-1}$, совершенно произвольныхъ.

Подъ интеграломъ уравненія m-го порядка

$$F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y \ldots \Delta^m y) = 0 \quad \text{или} \quad f(x, y, y_1, y_2 \ldots y_m) = 0$$

мы будемъ разумѣть общій членъ $y_{m+\mu}$ ряда

$$y, \; y_1, \; y_2 \ldots y_{m-1}, \; y_m \ldots y_{m+\mu} \ldots,$$

выраженный въ функціи перемѣнной независимой x, произвольныхъ величинъ $y, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}$ и указателя мѣста $m+\mu+1$, или, проще, цѣлаго числа μ. Сверхъ того мы допустимъ, что упоминаемыя здѣсь произвольныя величины *постоянны*, то есть не заключаютъ въ себѣ произвольной функціи $\varphi\left(\mathrm{Sin.}\frac{2\pi x}{\Delta x}, \mathrm{Cos.}\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$, не перемѣняющей своего значенія при переходѣ отъ x къ $x+\Delta x$. Такое предположеніе оправдывается свойствомъ всѣхъ задачъ, которыя рѣшены въ этомъ сочиненіи, гдѣ x предполагается всегда цѣлымъ числомъ, а $\Delta x = 1$. Въ этомъ случаѣ дѣйствительно получится

$$\varphi\left(\mathrm{Sin.}\frac{2\pi x}{\Delta x}, \mathrm{Cos.}\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) = \varphi(0, 1) = \textit{Постоянной}.$$

И такъ, интегралъ уравненія въ разностяхъ, въ приведенномъ сей-часъ смыслѣ, долженъ, для полноты, заключать въ себѣ столько постоянныхъ произвольныхъ величинъ, сколько содержится единицъ въ порядкѣ предложеннаго уравненія.

Послѣ сихъ предварительныхъ объясненій, приступимъ къ самымъ пріёмамъ интегрированія. Начнемъ съ уравненій перваго порядка.

§ 2. Пусть будутъ P_x и Q_x данныя функціи независимой величины x, а y_x неизвѣстная функція этой самой перемѣнной; сверхъ того положимъ $\Delta x = 1$. Ищется интегралъ линейнаго уравненія перваго порядка

$$y_{x+1} = P_x . y_x + Q_x. \tag{A}$$

Изобразимъ чрезъ X_x и z_x двѣ новыя неизвѣстныя функціи x, и положимъ $y_x = X_x . z_x$; найдется $y_{x+1} = X_{x+1} . z_{x+1}$, и слѣдовательно

$$X_{x+1} . z_{x+1} = P_x X_x . z_x + Q_x.$$

Но $X_{x+1} = X_x + \Delta X_x$, почему предъидущее уравненіе приметъ видъ

$$X_x . z_{x+1} + z_{x+1} . \Delta X_x = P_x X_x . z_x + Q_x$$

или

$$X_x(z_{x+1} - P_x . z_x) + z_{x+1} . \Delta X_x - Q_x = 0.$$

По причинѣ произвольности одного изъ множителей X_x, z_x величины y_x, можно будетъ положить

$$z_{x+1} - P_x . z_x = 0,$$

и слѣдовательно

$$z_{x+1} . \Delta X_x - Q_x = 0.$$

Для полученія величины z_x, составляемъ рядъ уравненій:

$$\begin{aligned} z_x &= P_{x-1} . z_{x-1} \\ z_{x-1} &= P_{x-2} . z_{x-2} \\ z_{x-2} &= P_{x-3} . z_{x-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 &= P_0 . z_0; \end{aligned}$$

перемноживъ ихъ между собою, найдемъ

$$z_x = P_{x-1} . P_{x-2} . P_{x-3} \ldots P_1 . P_0 . z_0.$$

Условимся, для сокращенія, изображать чрезъ $[P_{x-1}]^{x}$ факторіальную функцію $P_{x-1} P_{x-2} \ldots P_0$; тогда будетъ $z_{x+1} = [P_x]^{x+1} . z_0$. Подставляя эту величину въ уравненіе $z_{x+1} . \Delta X_x - Q_x = 0$, опредѣляющее X_x, получимъ

$$\Delta X_x = \frac{Q_x}{[P_x]^{x+1} . z_0}.$$

Взявъ интегралъ, и изобразивъ чрезъ $\frac{C}{z_0}$ постоянную произвольную величину, найдется

$$X_x = \frac{C}{z_0} + \Sigma \frac{Q_x}{[P_x]^{x+1} . z_0},$$

и наконецъ, по причинѣ $y_x = X_x . z_x$,

$$y_x = [P_{x-1}]^{x} \cdot \left\{ C + \Sigma \frac{Q_x}{[P_x]^{x+1}} \right\}. \qquad (B)$$

Если бы рѣшенное сей-часъ уравненіе было предложено въ видѣ

$$\Delta y + y f(x) = F(x),$$

подобномъ *Бернулліеву* дифференціальному уравненію, то, замѣнивъ Δy разностію $y_1 - y$, получили бы равенство

$$y_1 = [1 - f(x)] y + F(x),$$

которое, по сравненіи съ (A), доставило бы $P_x = 1 - f(x)$, $Q_x = F(x)$. Слѣдовательно, въ силу формулы (B),

$$y = [1 - f(x-1)]^{x} \cdot \left\{ C + \Sigma \frac{F(x)}{[1 - f(x)]^{x+1}} \right\}. \qquad (C)$$

Когда коэффиціенты P_x и Q_x предполагаются постоянными, то получаемъ уравненіе вида

$$y_{x+1} = a y_x + b.$$

Въ силу формулы (B) интегралъ его будетъ

$$y_x = a^x \left(C + \frac{b}{a} \Sigma a^{-x} \right),$$

и какъ

$$\Sigma a^{-x} = \frac{a^{-x}}{a^{-1} - 1},$$

то и найдется окончательно

$$y_x = C a^x - \frac{b}{a-1},$$

гдѣ C изображаетъ постоянную произвольную величину.

Интегрированіе разностныхъ уравненій высшихъ порядковъ съ коэффиціентами перемѣнными чаще всего представляетъ непреодолимыя затрудненія. Случай линейныхъ уравненій съ коэффиціентами постоянными и съ послѣднимъ членомъ, выраженнымъ въ функціи перемѣнной независимой, разрѣшается вполнѣ. Изложимъ употребляемый на сей конецъ способъ, примѣнивъ его къ уравненію втораго порядка.

§ 3. И такъ, займемся теперь интегрированіемъ двухъ уравненій втораго порядка

$$y_{x+2} + a y_{x+1} + b y_x = 0 \qquad (D)$$

и

$$y_{x+2} + a y_{x+1} + b y_x = f(x). \qquad (E)$$

Начнемъ съ перваго изъ нихъ. Пусть будетъ m постоянная неопредѣленная величина, и положимъ

$$y_x = m^x; \text{ найдется } y_{x+1} = m^{x+1} \text{ и } y_{x+2} = m^{x+2};$$

подставляя эти значенія въ формулу (D), получимъ

$$m^{x+2} + a m^{x+1} + b m^x = 0, \text{ или } m^2 + am + b = 0.$$

Изобразимъ чрезъ m_1 и m_2 корни послѣдняго уравненія; эти корни могутъ быть: 1° вещественные неравные; 2° вещественные равные, и 3° мнимые неравные. Легко видѣть, что во всѣхъ трехъ случаяхъ сумма

$$C_1 m_1^x + C_2 m_2^x,$$

гдѣ C_1 и C_2 изображаютъ постоянныя произвольныя величины, удовлетворяетъ уравненію (D). Въ первомъ и третьемъ случаяхъ она можетъ быть принята за полный интегралъ уравненія въ разностяхъ (D), почему и будетъ

$$y = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x, \qquad (F)$$

а во второмъ, по причинѣ $m_1 = m_2$, она теряетъ свою общность, потому что заключаетъ только одну постоянную произвольную величину, выражающуюся суммою $C_1 + C_2$.

Чтобы найти полный интегралъ уравненія (D) въ случаѣ равныхъ корней, полагаемъ $y_x = m_1^x . z_x$; получимъ

$$m_1^{x+2} . z_{x+2} + a m_1^{x+1} . z_{x+1} + b m_1^x z_x = 0,$$

откуда

$$m_1^2 . z_{x+2} + a m_1 . z_{x+1} + b z_x = 0.$$

Но, по свойству уравненія $m^2 + am + b = 0$, имѣющаго оба корня равные, будетъ $a = -2m_1$ и $b = m_1^2$; слѣдовательно найдется просто

$$z_{x+2} - 2 z_{x+1} + z_x = 0,$$

и какъ $z_{x+2} - 2 z_{x+1} + z_x = \Delta^2 z_x$, то и получимъ

$$\Delta^2 z_x = 0, \quad \text{откуда} \quad z_x = C_1 + C_2 x.$$

Поэтому, при равныхъ корняхъ, имѣемъ:

$$y_x = m_1^x (C_1 + C_2 x). \qquad (G_1)$$

Когда корни уравненія $m^2 + am + b = 0$ мнимые, то изобразивъ ихъ чрезъ $\lambda + \mu\sqrt{-1}$ и $\lambda - \mu\sqrt{-1}$, формула (F) доставитъ

$$y_x = C_1 (\lambda + \mu\sqrt{-1})^x + C_2 (\lambda - \mu\sqrt{-1})^x.$$

Чтобъ освободиться отъ мнимости, полагаемъ

$$\lambda + \mu\sqrt{-1} = \varrho(\text{Cos.}\varphi + \text{Sin.}\varphi . \sqrt{-1}), \quad \text{гдѣ} \quad \varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad \varphi = \text{arc.tang.} \frac{\mu}{\lambda}.$$

Слѣдовательно

$$(\lambda + \mu\sqrt{-1})^x = \varrho^x (\text{Cos.}\varphi x + \text{Sin.}\varphi x . \sqrt{-1}).$$

Совершенно подобнымъ образомъ получимъ

$$(\lambda-\mu\sqrt{-1})^x = \varrho^x(\mathrm{Cos}.\varphi x-\mathrm{Sin}.\varphi x.\sqrt{-1}),$$

почему

$$y_x = \varrho^x[(C_1+C_2)\mathrm{Cos}.\varphi x+(C_1-C_2)\mathrm{Sin}.\varphi x.\sqrt{-1}].$$

Замѣнивъ произвольныя величины C_1+C_2 и $(C_1-C_2)\sqrt{-1}$ постоянными A и B, найдется окончательно

$$y = \varrho^x(A\mathrm{Cos}.\varphi x+B\mathrm{Sin}.\varphi x). \qquad (H)$$

Положимъ, напримѣръ, что ищется интегралъ уравненія

$$y_{x+2}-6y_{x+1}+9y_x = 0$$

при слѣдующихъ условіяхъ: $y_0=1$ и $y_1=2$. Такъ какъ уравненіе $m^2-6m+9=0$ имѣетъ корни равные, которыхъ общая величина есть 3, то и получимъ въ силу формулы (G)

$$y_x = 3^x(C_1+C_2x).$$

Постоянныя произвольныя C_1 и C_2 опредѣляются условіями $y_0=1$ и $y_1=2$. Подставляя 0 и 1 на мѣсто x, найдемъ

$$y_0 = 1 = C_1 \quad \text{и} \quad y_1 = 2 = 3(C_1+C_2), \quad \text{откуда} \quad C_2 = -\frac{1}{3}.$$

Слѣдовательно, искомый интегралъ будетъ

$$y_x = 3^x(1-\frac{1}{3}x).$$

Для интегрированія уравненія (E) употребляемъ способъ *Лагранжа*, состоящій въ измѣненіи постоянныхъ произвольныхъ. Приложимъ его къ тому случаю, когда корни уравненія $m^2+am+b=0$ будутъ вещественные неравные. И такъ мы полагаемъ, что ищется интегралъ уравненія

$$y_{x+2}+ay_{x+1}+by_x = f(x)$$

въ томъ предположеніи, что корни m_1 и m_2 уравненія $m^2+am+b=0$ будутъ вещественные неравные. Принимаемъ за искомый интегралъ формулу (F) съ тою только разницею, что постоянныя величины C_1 и C_2 замѣняемъ въ ней неизвѣстными функціями A_x и B_x перемѣнной независимой x. И такъ, получимъ

$$y_x = A_xm_1^{\,x}+B_xm_2^{\,x}. \qquad (I)$$

Отсюда выведемъ

$$y_{x+1} = A_{x+1}.m_1^{\,x+1}+B_{x+1}.m_2^{\,x+1},$$

или

$$y_{x+1} = (A_x+\varDelta A_x)m_1^{\,x+1}+(B_x+\varDelta B_x)m_2^{\,x+1}. \qquad (K)$$

Такъ какъ въ величину y_x входятъ двѣ неопредѣленныя функціи A_x и B_x, между тѣмъ какъ надлежитъ удовлетворить одному только условію, именно, предложенному уравненію (E),

то мы имѣемъ полное право располагать одною изъ этихъ функцій, или, подчинить ихъ какой либо взаимной зависимости. Простѣйшее, и вмѣстѣ съ тѣмъ наивыгоднѣйшее предположеніе будетъ то́, что величина y_{x+1} сохранила тотъ же видъ, который имѣла для уравненія (D), не заключающаго въ себѣ члена $f(x)$. Для этого должно въ формулѣ (K) уравнить нулю члены, происшедшіе отъ измѣняемости A_x и B_x. Поэтому будетъ

$$y_{x+1} = m_1A_xm_1^{\,x}+m_2B_xm_2^{\,x} \qquad (L)$$

и

$$m_1.m_1^{\,x}\varDelta A_x+m_2.m_2^{\,x}\varDelta B_x = 0. \qquad (M)$$

Слѣдовательно, для величины y_{x+2} найдется выраженіе

$$y_{x+2} = m_1^{\,2}(A_x+\varDelta A_x)m_1^{\,x}+m_2^{\,2}(B_x+\varDelta B_x)m_2^{\,x},$$

или

$$y_{x+2} = m_1^{\,2}A_x.m_1^{\,x}+m_2^{\,2}B_x.m_2^{\,x}+m_1^{\,2}.m_1^{\,x}\varDelta A_x+m_2^{\,2}.m_2^{\,x}\varDelta B_x. \qquad (N)$$

Подставляя величины для y_x, y_{x+1} и y_{x+2}, опредѣляемыя формулами (I), (L), (N) въ уравненіе (E), получимъ

$$A_xm_1^{\,x}(m_1^{\,2}+am_1+b)+B_xm_2^{\,x}(m_2^{\,2}+am_2+b)+m_1^{\,2}.m_1^{\,x}\varDelta A_x+m_2^{\,2}.m_2^{\,x}\varDelta B_x = f(x),$$

и какъ $m_1^{\,2}+am_1+b=0$, $m_2^{\,2}+am_2+b=0$, то и получимъ просто

$$m_1^{\,2}.m_1^{\,x}\varDelta A_x+m_2^{\,2}.m_2^{\,x}\varDelta B_x = f(x).$$

Это уравненіе, вмѣстѣ съ (M), послужитъ для опредѣленія разностей $\varDelta A_x$ и $\varDelta B_x$. Рѣшивъ ихъ, найдется

$$\varDelta A_x = \frac{1}{m_1(m_1-m_2)}.m_1^{\,-x}.f(x), \qquad \varDelta B_x = -\frac{1}{m_2(m_1-m_2)}.m_2^{\,-x}.f(x),$$

откуда

$$A_x = C_1+\frac{1}{m_1(m_1-m_2)}\Sigma m_1^{\,-x}.f(x), \qquad B_x = C_2-\frac{1}{m_2(m_1-m_2)}\Sigma m_2^{\,-x}.f(x),$$

разумѣя подъ C_1 и C_2 постоянныя произвольныя величины. И такъ, интегралъ предложеннаго уравненія будетъ

$$y_x = C_1m_1^{\,x}+C_2m_2^{\,x}+\frac{1}{m_1-m_2}\left\{m_1^{\,x-1}\Sigma m_1^{\,-x}.f(x)-m_2^{\,x-1}\Sigma m_2^{\,-x}.f(x)\right\}.$$

Положимъ, напримѣръ, что дано уравненіе

$$y_{x+2}-6y_{x+1}+8y_x = x,$$

для котораго

$$m_1 = 4, \qquad m_2 = 2, \qquad f(x) = x.$$

Слѣдовательно

$$y_x = C_1.4^x+C_2.2^x+\frac{1}{2}\left\{4^{x-1}\Sigma 4^{-x}.x-2^{x-1}\Sigma 2^{-x}.x\right\},$$

и какъ съ другой стороны

$$\Sigma 4^{-x}.x = -\frac{4^{-x}}{9}(12x+4), \qquad \Sigma 2^{-x}.x = -2.2^{-x}(x+1),$$

то и получимъ окончательно

$$y_x = C_1.4^x + C_2.2^x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{4}{9}.$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдется интегралъ уравненія (E) и въ тѣхъ случаяхъ, когда корни уравненія $m^2+am+b=0$ будутъ равные или мнимые.

Способъ, изложенный въ этомъ параграфѣ, можетъ быть приложенъ къ интегрированію линейныхъ уравненій

$$y_{x+m}+ay_{x+m-1}+by_{x+m-2}+\ldots+ky_{x+1}+ly_x = 0$$

и

$$y_{x+m}+ay_{x+m-1}+by_{x+m-2}+\ldots+ky_{x+1}+ly_x = f(x)$$

какого ни есть порядка m. Это распространеніе не представляетъ ни малѣйшаго затрудненія.

Иногда рѣшаемые вопросы приводятъ къ разсматриванію нѣсколькихъ разностныхъ уравненій съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ функцій одной перемѣнной независимой. Подобныя уравненія называются *совокупными*. Способъ множителей, употребляемый для интегрированія совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, равно прилагается и къ разностнымъ. Не останавливаясь на этомъ предметѣ, отсылаемъ читателей къ N° 51 нашей книги, гдѣ они найдутъ примѣръ рѣшенія трехъ совокупныхъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ.

§ **4.** Предложимъ теперь нѣкоторыя понятія объ способѣ *Лагранжа* для интегрированія уравненій въ частныхъ разностяхъ, такъ часто встрѣчающихся въ вопросахъ изъ Анализа Вѣроятностей.

Пусть будетъ $y_{x,t}$ нѣкоторая функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x и t; выраженіе $y_{x+1,t}$ изобразитъ значеніе этой самой функціи, когда измѣнимъ въ ней x въ $x+1$, не перемѣняя t; $y_{x,t+1}$ будетъ означать новое состояніе функціи, полученное отъ измѣненія t въ $t+1$, не перемѣняя x. Разности $y_{x+1,t}-y_{x,t}$ и $y_{x,t+1}-y_{x,t}$, изображаемыя соотвѣтственно чрезъ $\Delta_x y_{x,t}$ и $\Delta_t y_{x,t}$, называются *частными разностями*, первая, въ разсужденіи x, а вторая, въ разсужденіи t. Когда желаемъ означить, что въ разсматриваемой функціи перемѣнная x измѣнилась, положимъ въ $x+m$, а t въ $t+n$, то пишемъ просто $y_{x+m,t+n}$. Всякое уравненіе, заключающее въ себѣ перемѣнныя независимыя величины и функціи $y_{x,t}$, $y_{x+1,t}$, $y_{x,t+1}$, $y_{x+1,t+1}$ и проч., называется *уравненіемъ въ частныхъ разностяхъ*.

Такъ какъ въ ГЛАВѢ III нашей книги читатели найдутъ достаточное число рѣшенныхъ вопросовъ, зависящихъ отъ интегрированія подобнаго рода уравненій, то мы ограничимся здѣсь общими замѣчаніями и поясненіемъ теоріи однимъ примѣромъ.

Положимъ, что разсматривается слѣдующій двойной рядъ, происходящій отъ функціи $y_{x,t}$ о двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x и t:

$$\left.\begin{array}{llllll}
y_{0,0} & y_{1,0} & y_{2,0} & y_{3,0}\ldots\ldots y_{x,0} & y_{x+1,0}\ldots\ldots \\
y_{0,1} & y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1}\ldots\ldots y_{x,1} & y_{x+1,1}\ldots\ldots \\
y_{0,2} & y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2}\ldots\ldots y_{x,2} & y_{x+1,2}\ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
y_{0,t} & y_{1,t} & y_{2,t} & y_{3,t}\ldots\ldots y_{x,t} & y_{x+1,t}\ldots\ldots \\
y_{0,t+1} & y_{1,t+1} & y_{2,t+1} & y_{3,t+1}\ldots\ldots y_{x,t+1} & y_{x+1,t+1}\ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (O)$$

и что законъ этого двойнаго ряда выражается линейнымъ уравненіемъ между величинами

$$y_{x,t}, \quad y_{x+1,t}, \quad y_{x,t+1}\ldots y_{x+m,t}, \quad y_{x+m-1,t+1}\ldots y_{x,t+n},$$

соотвѣтственно умноженными на постоянные коэффиціенты. Такого рода ряды Лагранжъ назвалъ *двойными возвратными* (*séries récurrentes doubles*).

Для примѣра, пусть будетъ линейное уравненіе въ частныхъ разностяхъ

$$Ay_{x,t} = By_{x-1,t}+Cy_{x,t-1}+Dy_{x-1,t-1}, \qquad (P)$$

въ которомъ A, B, C, D изображаютъ постоянные коэффиціенты. Положимъ

$$y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t,$$

принимая a, α и β постоянными; найдется

$$y_{x-1,t} = a\alpha^{x-1}\beta^t, \qquad y_{x,t-1} = a\alpha^x\beta^{t-1}, \qquad y_{x-1,t-1} = a\alpha^{x-1}\beta^{t-1},$$

и уравненіе (P), по раздѣленіи на $a\alpha^{x-1}\beta^{t-1}$, приметъ видъ

$$A\alpha\beta = B\beta + C\alpha + D.$$

Опредѣляя отсюда одну изъ величинъ посредствомъ другой, напримѣръ β чрезъ α, получимъ

$$\beta = \frac{D+C\alpha}{A\alpha-B},$$

и слѣдовательно

$$y_{x,t} = a\alpha^x\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t.$$

Въ этомъ частномъ выраженіи, удовлетворяющемъ уравненію (P), величины a и α произвольныя; ихъ можно замѣнить сколькими угодно новыми системами a' и α', a'' и α'', a''' и α''' и такъ далѣе. Сумма

$$y_{x,t} = a\alpha^x\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t + a'\alpha'^x\left(\frac{D+C\alpha'}{A\alpha'-B}\right)^t + a''\alpha''^x\left(\frac{D+C\alpha''}{A\alpha''-B}\right)^t + \dots,$$

въ слѣдствіе линейнаго вида разсматриваемаго уравненія, также удовлетворитъ ему. Разложивъ количество $\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t$ по нисходящимъ степенямъ величины α, получится рядъ

$$\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t = T_0\alpha^{\mu t} + T_1\alpha^{\mu t-1} + T_2\alpha^{\mu t-2} + T_3\alpha^{\mu t-3} + \dots,$$

гдѣ T_0, T_1, T_2, T_3.... изобразятъ извѣстныя функціи перемѣнной t. На такомъ основаніи, приведенная сей-часъ величина для $y_{x,t}$, приметъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} y_{x,t} = \; & T_0(a\alpha^{x+\mu t} + a'\alpha'^{x+\mu t} + a''\alpha''^{x+\mu t} + \dots) \\ & + T_1(a\alpha^{x+\mu t-1} + a'\alpha'^{x+\mu t-1} + a''\alpha''^{x+\mu t-1} + \dots) \\ & + T_2(a\alpha^{x+\mu t-2} + a'\alpha'^{x+\mu t-2} + a''\alpha''^{x+\mu t-2} + \dots) \\ & + T_3(a\alpha^{x+\mu t-3} + a'\alpha'^{x+\mu t-3} + a''\alpha''^{x+\mu t-3} + \dots) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (Q)$$

Замѣтимъ теперь, что коэффиціентъ величины T_0, именно

$$a\alpha^{x+\mu t} + a'\alpha'^{x+\mu t} + a''\alpha''^{x+\mu t} + \dots$$

есть нѣкоторая функція показателя $x+\mu t$, общаго всѣмъ его членамъ. Изобразимъ эту функцію чрезъ $\varphi(x+\mu t)$. Коэффиціентъ

$$a\alpha^{x+\mu t-1} + a'\alpha'^{x+\mu t-1} + a''\alpha''^{x+\mu t-1} + \dots$$

при T_1 изобразитъ очевидно ту же самую функцію показателя $x+\mu t-1$, и такъ далѣе. Слѣдовательно

$$y_{x,t} = T_0\varphi(x+\mu t) + T_1\varphi(x+\mu t-1) + T_2\varphi(x+\mu t-2) + \dots \qquad (R)$$

Легко видѣть, что функція φ будетъ произвольная. Дѣйствительно, замѣтимъ, что интегралъ (Q) удовлетворяетъ уравненію (P) независимо отъ частныхъ значеній постоянныхъ величинъ a и α, a' и α', a'' и α'',..., а единственно потому что члены, заключающіе одинаковыя степени количествъ α, α', α''.... взаимно уничтожаются по виду коэффиціентовъ T_0, T_1, T_2.... Тò же самое случится и съ функціями $\varphi(x+\mu t)$, $\varphi(x+\mu t-1)$, $\varphi(x+\mu t-2)$....: по внесеніи въ уравненіе (P) величинъ $y_{x,t}$, $y_{x-1,t}$, $y_{x,t-1}$, $y_{x-1,t-1}$, опредѣляемыхъ формулою (R), коэффиціенты при $\varphi(x+\mu t)$, $\varphi(x+\mu t-1)$, $\varphi(x+\mu t-2)$.... уничтожатся въ слѣдствіе существующей зависимости между T_0, T_1, T_2.... точно такъ, какъ еслибъ разсматривались коэффиціенты при различныхъ суммахъ

$$\begin{gathered} a\alpha^{x+\mu t} + a'\alpha'^{x+\mu t} + \dots \\ a\alpha^{x+\mu t-1} + a'\alpha'^{x+\mu t-1} + \dots \\ a\alpha^{x+\mu t-2} + a'\alpha'^{x+\mu t-2} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Если въ выраженіи

$$y_{x,t} = a\alpha^x\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t + a'\alpha'^x\left(\frac{D+C\alpha'}{A\alpha'-B}\right)^t + \dots$$

положимъ $t=0$, то получимъ

$$y_{x,0} = a\alpha^x + a'\alpha'^x + \dots = \varphi(x).$$

Слѣдовательно вообще

$$\varphi(x+\mu t-n) = y_{x+\mu t-n,0},$$

и интегралъ (R) приметъ видъ

$$y_{x,t} = T_0 y_{x+\mu t,0} + T_1 y_{x+\mu t-1,0} + T_2 y_{x+\mu t-2,0} + \dots \qquad (S)$$

Объяснивъ съ подробностію выводъ интеграла (S), можно будетъ въ приложеніяхъ сократить рядъ сужденій слѣдующимъ образомъ: дано уравненіе (P); для отысканія его интеграла, полагаемъ $y_{x,t} = \alpha^x\beta^t$, откуда

$$y_{x-1,t} = \alpha^{x-1}\beta^t, \quad y_{x,t-1} = \alpha^x\beta^{t-1}, \quad y_{x-1,t-1} = \alpha^{x-1}\beta^{t-1}.$$

Внесеніе этихъ величинъ въ (P) доставитъ уравненіе

$$A\alpha\beta = B\beta + C\alpha + D,$$

изъ котораго выведемъ

$$\beta = \frac{D+C\alpha}{A\alpha-B},$$

и слѣдовательно

$$y_{x,t} = \alpha^x\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t.$$

Положимъ, что разложивъ $\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t$ по нисходящимъ степенямъ α, получили

$$\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t = T_0\alpha^{\mu t} + T_1\alpha^{\mu t-1} + T_2\alpha^{\mu t-2} + \dots;$$

отсюда

$$y_{x,t} = T_0\alpha^{x+\mu t} + T_1\alpha^{x+\mu t-1} + T_2\alpha^{x+\mu t-2} + \dots$$

Наблюдая же что $y_{x,0} = \alpha^x$, и вообще $y_{m,0} = \alpha^m$, найдемъ окончательно

$$y_{x,t} = T_0 y_{x+\mu t,0} + T_1 y_{x+\mu t-1,0} + T_2 y_{x+\mu t-2,0} + \dots,$$

согласно съ формулою (S).

Полное опредѣленіе интеграла уравненія (P) посредствомъ формулы (S) требуетъ, чтобы извѣстны были всѣ члены $y_{x+\mu t,0}$, $y_{x+\mu t-1,0}$, $y_{x+\mu t-2,0}$.... первой горизонтальной строки двойнаго ряда (O), начиная отъ члена $y_{x+\mu t,0}$, и идя отъ правой руки къ лѣвой не только до члена $y_{0,0}$, но даже продолжая эту строку неопредѣленно для отрицательныхъ указателей x. Слѣдовательно, въ общемъ случаѣ, $y_{x,t}$ выразится безконечнымъ рядомъ. Иногда же этотъ рядъ будетъ состоять изъ ограниченнаго числа членовъ, что

случилось бы, напримѣръ, еслибъ $y_{x,0}$ постоянно обращался въ нуль для отрицательныхъ указателей x. Рядъ (S) будетъ также конечный, если $A=0$ или $B=0$.

Полагая $A=0$, найдется

$$\left(\frac{D+C\alpha}{A\alpha-B}\right)^t=\left(-\frac{D}{B}\right)^t\left(\frac{C}{D}\alpha+1\right)^t=$$

$$\left(-\frac{D}{B}\right)^t\left\{\frac{C^t}{D^t}\cdot\alpha^t+t\cdot\frac{C^{t-1}}{D^{t-1}}\cdot\alpha^{t-1}+\frac{t(t-1)}{1.2}\cdot\frac{C^{t-2}}{D^{t-2}}\cdot\alpha^{t-2}+\ldots+t\cdot\frac{C}{D}\cdot\alpha+1\right\};$$

слѣдовательно, въ силу формулы (S), для уравненія

$$By_{x-1,t}+Cy_{x,t-1}+Dy_{x-1,t-1}=0,$$

получимъ интегралъ

$$y_{x,t}=\left(-\frac{D}{B}\right)^t\left\{\frac{C^t}{D^t}\cdot y_{x+t,0}+t\cdot\frac{C^{t-1}}{D^{t-1}}\cdot y_{x+t-1,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}\cdot\frac{C^{t-2}}{D^{t-2}}\cdot y_{x+t-2,0}+\ldots\right.$$
$$\left.+t\cdot\frac{C}{D}\cdot y_{x+1,0}+y_{x,0}\right\}.$$

При $B=0$, уравненіе (P) приметъ видъ

$$Ay_{x,t}=Cy_{x,t-1}+Dy_{x-1,t-1};$$

полагая $y_{x,t}=\alpha^x\beta^t$, будетъ

$$A\alpha\beta=C\alpha+D,\quad\text{откуда}\quad\beta=\frac{C\alpha+D}{A\alpha},$$

и слѣдовательно

$$y_{x,t}=\alpha^x\left(\frac{C\alpha+D}{A\alpha}\right)^t=\alpha^x\left(\frac{C\alpha+D}{A}\right)^t\alpha^{-t}.$$

Разложивъ $\left(\frac{C\alpha+D}{A}\right)^t$, и замѣнивъ потомъ каждую степень α^m выраженіемъ $y_{m,0}$, получимъ

$$y_{x,t}=\left(\frac{D}{A}\right)^t\left\{\frac{C^t}{D^t}\cdot y_{x,0}+t\cdot\frac{C^{t-1}}{D^{t-1}}\cdot y_{x-1,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}\cdot\frac{C^{t-2}}{D^{t-2}}\cdot y_{x-2,0}+\ldots\right.$$
$$\left.+t\cdot\frac{C}{D}\cdot y_{x-t+1,0}+y_{x-t,0}\right\}.$$

Опредѣленіе произвольныхъ функцій $y_{x+\mu t,0}$, $y_{x+\mu t-1,0}$,... въ общемъ интегралѣ (S) зависитъ отъ частныхъ условій рѣшаемаго вопроса. Въ N°N° 38, 39 и 40 предложены примѣры этого опредѣленія. Тамъ же читатели найдутъ приложеніе объясненнаго въ этомъ параграфѣ способа къ интегрированію линейнаго уравненія перваго порядка съ тремя независимыми величинами, а равно рѣшеніе одного разностнаго уравненія втораго порядка.

ПРИМѢЧАНІЕ VIII.

Имѣя уравненіе [N° 40]

$$1=p^t\cdot y_{-t,0}+tp^{t-1}q\cdot y_{-t+2,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}p^{t-2}q^2\cdot y_{-t+4,0}+\ldots,\tag{A}$$

изъ котораго, въ слѣдствіе условія $y_{0,0}=1$, выводимъ послѣдовательно

$$\begin{aligned}py_{-1,0}&=1\\p^2y_{-2,0}&=1-2pq\\p^3y_{-3,0}&=1-3pq\\p^4y_{-4,0}&=1-4pq+2p^2q^2\\p^5y_{-5,0}&=1-5pq+5p^2q^2\\&\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

должно вывести общее выраженіе для $p^t\cdot y_{-t,0}$.

Легко видѣть, что разложеніе величины $p^t\cdot y_{-t,0}$ должно простираться по возрастающимъ степенямъ произведенія pq, и что первый членъ его будетъ равенъ 1. На такомъ основаніи полагаемъ

$$p^t\cdot y_{-t,0}=1+A_t\cdot pq+B_t\cdot p^2q^2+C_t\cdot p^3q^3+\ldots,\tag{B}$$

разумѣя подъ A_t, B_t, C_t,... неизвѣстныя функціи перемѣнной t. Измѣняя въ этой формулѣ t въ $t-2$, $t-4$,..., получимъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned}p^{t-2}\cdot y_{-t+2,0}&=1+A_{t-2}\cdot pq+B_{t-2}\cdot p^2q^2+C_{t-2}\cdot p^3q^3+\ldots\\p^{t-4}\cdot y_{-t+4,0}&=1+A_{t-4}\cdot pq+B_{t-4}\cdot p^2q^2+C_{t-4}\cdot p^3q^3+\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Внесемъ теперь найденныя величины для

$$p^t\cdot y_{-t,0},\quad p^{t-2}\cdot y_{-t+2,0},\quad p^{t-4}\cdot y_{-t+4,0}\ldots$$

въ формулу (A); располагая разложеніе по степенямъ pq, найдется

$$1 = 1+(A_t+t)pq+\left(B_t+tA_{t-2}+\frac{t(t-1)}{1.2}\right)p^2q^2 + \left(C_t+tB_{t-2}+\frac{t(t-1)}{1.2}A_{t-4}+\frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\right)p^3q^3+\ldots.$$

Такъ какъ это уравненіе должно быть тожественное, то получимъ

$$0 = A_t+t$$

$$0 = B_t+tA_{t-2}+\frac{t(t-1)}{1.2}$$

$$0 = C_t+tB_{t-2}+\frac{t(t-1)}{1.2}A_{t-4}+\frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}$$

....

Отсюда выведемъ $A_t = -t$, и какъ $A_{t-2} = -(t-2)$, то найдется $B_t = +\frac{t(t-3)}{1.2}$; потомъ, по причинѣ $A_{t-4} = -(t-4)$ и $B_{t-2} = +\frac{(t-2)(t-5)}{1.2}$, получимъ $C_t = -\frac{t(t-4)(t-5)}{1.2.3}$, и такъ далѣе. Внесеніе этихъ величинъ въ уравненіе (B) доставитъ искомое разложеніе для $p^t.y_{-t,0}$, именно:

$$\left.\begin{array}{l} p^t.y_{-t,0} = 1-t.pq+\frac{t(t-3)}{1.2}.p^2q^2-\frac{t(t-4)(t-5)}{1.2.3}.p^3q^3+\frac{t(t-5)(t-6)(t-7)}{1.2.3.4}.p^4q^4+\ldots. \\ \qquad +(-)^m.\frac{t(t-m-1)(t-m-2)\ldots(t-2m+1)}{1.2.3\ldots m}p^mq^m-\ldots. \end{array}\right\} \quad (C)$$

ПРИМѢЧАНІЕ IX.

§ 1. *Алгебрическій Анализъ*, въ обширномъ смыслѣ, имѣетъ предметомъ изслѣдованіе функцій, происходящихъ отъ конечнаго числа алгебрическихъ дѣйствій надъ данными количествами. Алгебрическими дѣйствіями называются, какъ извѣстно, *сложеніе*, *вычитаніе*, *умноженіе*, и, какъ частный случай сего послѣдняго, *возвышеніе въ цѣлыя положительныя степени*, *дѣленіе*, и накопецъ *рѣшеніе уравненій*, изъ котораго проистекаетъ *извлеченіе корней*. *Трансцендентный Анализъ* или *Интегральное Исчисленіе* занимается свойствами функцій, получаемыхъ посредствомъ тѣхъ же дѣйствій алгебрическихъ, но повторенныхъ безконечное число разъ. Всѣ упоминаемыя дѣйствія, кромѣ рѣшенія уравненій, могутъ быть отнесены къ *сложенію;* поэтому, приступая къ изложенію началъ Трансцендентнаго Анализа, должно, прежде всего, показать происхожденіе и главныя свойства новыхъ функцій, раждающихся отъ повторенія въ безконечномъ числѣ этого первоначальнаго дѣйствія. На сей конецъ предложимъ себѣ слѣдующій вопросъ:

Дана нѣкоторая функція $f(x)$, непрерывная между предѣлами x_0 и X, и которая можетъ быть вычислена для всякаго значенія x, заключающагося между x_0 и X. Требуется опредѣлить среднюю ариѳметическую величину для $f(x)$, предполагая что непрерывная перемѣнная x переходитъ чрезъ всѣ возможныя степени величинъ, начиная отъ $x = x_0$ до $x = X$.

Для рѣшенія вопроса надлежало бы сложить всѣ возможныя значенія функціи $f(x)$, измѣняя перемѣнную x отъ x_0 до X, и потомъ, сумму этихъ значеній раздѣлить на ихъ число. Но такъ какъ между x_0 и X заключается безконечное множество чиселъ, то опредѣленіе искомой средней ариѳметической величины потребуетъ безконечнаго числа сложеній и одного дѣленія на безконечно большое число. Посмотримъ къ чему приведетъ насъ дальнѣйшее развитіе этихъ условій.

Изобразимъ чрезъ ε приращеніе количества x, или, иначе, разность двухъ послѣдовательныхъ значеній этой перемѣнной. Непрерывность числа x требуетъ, чтобы приращеніе ε было менѣе всякой данной величины, то есть количество безконечно малое. Если, между данными двумя предѣлами x_0 и X, включимъ безконечное число $m-1$ величинъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію, и примемъ за разность ея упоминаемое приращеніе ε, то отъ $x=x_0$, до $x=X$ исключительно, получимъ m членовъ

$$x_0\,,\quad x_0+\varepsilon\,,\quad x_0+2\varepsilon\,,\quad x_0+3\varepsilon\,,\ldots\; x_0+[m-1]\varepsilon\,,$$

которымъ будутъ соотвѣтствовать слѣдующія значенія функціи $f(x)$:

$$f(x_0),\quad f(x_0+\varepsilon),\quad f(x_0+2\varepsilon),\quad f(x_0+3\varepsilon),\ldots f(x_0+[m-1]\varepsilon).$$

На такомъ основаніи, означивъ знакоположеніемъ $\mathop{M}\limits_{x_0}^{X}f(x)$ среднюю ариѳметическую величину функціи $f(x)$ отъ x_0 включительно, до X исключительно, получимъ

$$\mathop{M}\limits_{x_0}^{X}f(x)=\frac{f(x_0)+f(x_0+\varepsilon)+f(x_0+2\varepsilon)+\ldots+f(x_0+[m-1]\varepsilon)}{m},$$

или

$$m\mathop{M}\limits_{x_0}^{X}f(x)=f(x_0)+f(x_0+\varepsilon)+f(x_0+2\varepsilon)+\ldots+f(x_0+[m-1]\varepsilon), \qquad (A)$$

гдѣ m, какъ уже сказано, изображаетъ безконечно большое число. Сверхъ того, такъ какъ

$$x_0+(m-1)\varepsilon=X-\varepsilon,$$

то найдется

$$m=\frac{X-x_0}{\varepsilon}. \qquad (B)$$

Положимъ теперь, что между x_0 и X включили какое ни есть конечное или безконечное число $n-1$ новыхъ значеній x_1, x_2, $x_3\ldots x_{n-1}$, перемѣнной x, написанныхъ въ возрастающемъ порядкѣ. Если означимъ чрезъ m_1 число величинъ x, отъ x_0 до x_1 исключительно, чрезъ m_2, $m_3\ldots m_n$ подобныя числа относительно предѣловъ x_1 и x_2, x_2 и x_3, $\ldots x_{n-1}$ и X, то, удержавъ прежнее знакоположеніе, получимъ въ силу формулъ (A) и (B):

$$\left.\begin{aligned}
m_1\mathop{M}\limits_{x_0}^{x_1}f(x)&=f(x_0)+f(x_0+\varepsilon)+f(x_0+2\varepsilon)+\ldots+f(x_0+[m_1-1]\varepsilon)\\
m_2\mathop{M}\limits_{x_1}^{x_2}f(x)&=f(x_1)+f(x_1+\varepsilon)+f(x_1+2\varepsilon)+\ldots+f(x_1+[m_2-1]\varepsilon)\\
m_3\mathop{M}\limits_{x_2}^{x_3}f(x)&=f(x_2)+f(x_2+\varepsilon)+f(x_2+2\varepsilon)+\ldots+f(x_2+[m_3-1]\varepsilon)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_n\mathop{M}\limits_{x_{n-1}}^{X}f(x)&=f(x_{n-1})+f(x_{n-1}+\varepsilon)+f(x_{n-1}+2\varepsilon)+\ldots+f(x_{n-1}+[m_n-1]\varepsilon)
\end{aligned}\right\}\quad (C)$$

а также

$$m_1=\frac{x_1-x_0}{\varepsilon},\quad m_2=\frac{x_2-x_1}{\varepsilon},\quad m_3=\frac{x_3-x_2}{\varepsilon},\ldots m_n=\frac{X-x_{n-1}}{\varepsilon}. \qquad (D)$$

Сложивъ уравненія (D), найдется

$$m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n=\frac{X-x_0}{\varepsilon}=m.$$

Далѣе, замѣтивъ что сумма вторыхъ частей уравненій (C) равна второй же части формулы (A), получимъ

$$m\mathop{M}\limits_{x_0}^{X}f(x)=m_1\mathop{M}\limits_{x_0}^{x_1}f(x)+m_2\mathop{M}\limits_{x_1}^{x_2}f(x)+m_3\mathop{M}\limits_{x_2}^{x_3}f(x)+\ldots+m_n\mathop{M}\limits_{x_{n-1}}^{X}f(x).$$

Наконецъ, внеся на мѣсто m, m_1, m_2, $m_3\ldots m_n$ ихъ величины, опредѣляемыя формулами (B) и (D), и освободясь отъ ε, будетъ

$$(X-x_0)\mathop{M}\limits_{x_0}^{X}f(x)=(x_1-x_0)\mathop{M}\limits_{x_0}^{x_1}f(x)+(x_2-x_1)\mathop{M}\limits_{x_1}^{x_2}f(x)+(x_3-x_2)\mathop{M}\limits_{x_2}^{x_3}f(x)+\ldots+(X-x_{n-1})\mathop{M}\limits_{x_{n-1}}^{X}f(x). \quad (E)$$

Вотъ основная формула, показывающая какимъ образомъ можно всякую среднюю ариѳметическую, помноженную на разность предѣловъ, разлагать на подобныя же произведенія при раздробленіи первоначальныхъ предѣловъ перемѣнной. Необходимо замѣтить, что сумма, составляющая вторую часть уравненія (E), не измѣнится, во первыхъ, сколько бы мы не включили промежуточныхъ чиселъ x_1, x_2, $x_3\ldots x_{n-1}$ между x_0 и X, а во вторыхъ, каковъ бы ни былъ законъ измѣненія этихъ чиселъ, потому что во всякомъ случаѣ она равна постоянной, совершенно опредѣленной величинѣ $(X-x_0)\mathop{M}\limits_{x_0}^{X}f(x)$.

Положимъ теперь, что число промежуточныхъ величинъ x_1, x_2, $x_3\ldots x_{n-1}$ безконечно велико, и, въ этомъ предположеніи, разложимъ разность $X-x_0$ на элементы

$$x_1-x_0=dx_0,\quad x_2-x_1=dx_1,\quad x_3-x_2=dx_2\ldots X-x_{n-1}=dx_{n-1};$$

формула (E) приметъ видъ:

$$(X-x_0)\mathop{M}\limits_{x_0}^{X}f(x)=dx_0\mathop{M}\limits_{x_0}^{x_1}f(x)+dx_1\mathop{M}\limits_{x_1}^{x_2}f(x)+dx_2\mathop{M}\limits_{x_2}^{x_3}f(x)+\ldots+dx_{n-1}\mathop{M}\limits_{x_{n-1}}^{X}f(x).$$

Съ другой же стороны, такъ какъ вообще средняя ариѳметическая $\mathop{M}\limits_{a}^{b}f(x)$ будетъ болѣе наименьшаго и менѣе наибольшаго значенія функціи $f(x)$ между предѣлами a и b, то, по причинѣ ея непрерывности, получимъ

$$\mathop{M}\limits_{a}^{b}f(x)=f(a+\lambda[b-a]),\qquad \text{гдѣ}\ \ \lambda>0\ \ \text{и}\ \ <1. \qquad (F)$$

И такъ

$$(X-x_0)\underset{x_0}{\overset{X}{M}}f(x)=$$

$$dx_0f(x_0+\lambda_0dx_0)+dx_1f(x_1+\lambda_1dx_1)+dx_2f(x_2+\lambda_2dx_2)+\ldots+dx_{n-1}f(x_{n-1}+\lambda_{n-1}dx_{n-1}),$$

гдѣ, какъ и выше, λ_0, λ_1, $\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}$ изображаютъ положительныя числа, меньшія единицы. Но

$$f(x_0+\lambda_0dx_0)=f(x_0)+\lambda_0dx_0f'(x_0+\lambda'_0dx_0);$$

поэтому, если предположимъ, что функція $f'(x)$, равно какъ $f(x)$, остается непрерывною между предѣлами x_0 и X, и означимъ вообще конечную величину $\lambda_if'(x_i+\lambda'_idx_i)$ чрезъ Q_i, то получимъ рядъ равенствъ

$$f(x_0+\lambda_0dx_0)=f(x_0)+Q_0dx_0$$
$$f(x_1+\lambda_1dx_1)=f(x_1)+Q_1dx_1$$
$$f(x_2+\lambda_2dx_2)=f(x_2)+Q_2dx_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x_{n-1}+\lambda_{n-1}dx_{n-1})=f(x_{n-1})+Q_{n-1}dx_{n-1},$$

въ силу которыхъ предъидущее уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$(X-x_0)\underset{x_0}{\overset{X}{M}}f(x)=f(x_0)dx_0+f(x_1)dx_1+f(x_2)dx_2+\ldots+f(x_{n-1})dx_{n-1}$$
$$+Q_0dx_0^2+Q_1dx_1^2+Q_2dx_2^2+\ldots+Q_{n-1}dx^2_{n-1}.$$

Легко видѣть, что сумма

$$f(x_0)dx_0+f(x_1)dx_1+\ldots+f(x_{n-1})dx_{n-1}$$

равна среднему значенію функціи $f(x)$ между предѣлами x_0 и X, помноженному на ихъ разность $X-x_0$. Дѣйствительно, изобразивъ чрезъ A наименьшую, а чрезъ B наибольшую величину функціи $f(x)$, найдется

$$f(x_0)dx_0+f(x_1)dx_1+\ldots+f(x_{n-1})dx_{n-1}>(dx_0+dx_1+\ldots+dx_{n-1})A$$

и

$$f(x_0)dx_0+f(x_1)dx_1+\ldots+f(x_{n-1})dx_{n-1}<(dx_0+dx_1+\ldots+dx_{n-1})B.$$

Но

$$dx_0+dx_1+dx_2+\ldots+dx_{n-1}=X-x_0;$$

слѣдовательно, сумма $f(x_0)dx_0+f(x_1)dx_1+\ldots+f(x_{n-1})dx_{n-1}$ заключается между предѣлами

$$(X-x_0)A \quad \text{и} \quad (X-x_0)B,$$

и поэтому

$$f(x_0)dx_0+f(x_1)dx_1+\ldots+f(x_{n-1})dx_{n-1}=(X-x_0)f(x_0+\theta[X-x_0]),$$

гдѣ $\theta>0$ и <1.

Что касается до суммы

$$Q_0dx_0^2+Q_1dx_1^2+\ldots+Q_{n-1}dx^2_{n-1},$$

то, по причинѣ безконечно малой величины элементовъ dx_0, $dx_1\ldots dx_{n-1}$, она должна быть откинута. И въ самомъ дѣлѣ, пусть $Q_\lambda dx_\lambda$ будетъ наименьшая, а $Q_\mu dx_\mu$ наибольшая изъ величинъ Q_0dx_0, $Q_1dx_1\ldots Q_{n-1}dx_{n-1}$. Получимъ

$$Q_0dx_0^2+Q_1dx_1^2+\ldots+Q_{n-1}dx^2_{n-1}>(dx_0+dx_1+\ldots+dx_{n-1})Q_\lambda dx_\lambda$$

и

$$Q_0dx_0^2+Q_1dx_1^2+\ldots+Q_{n-1}dx^2_{n-1}<(dx_0+dx_1+\ldots+dx_{n-1})Q_\mu dx_\mu.$$

И такъ, сумма $Q_0dx_0^2+Q_1dx_1^2+\ldots+Q_{n-1}dx^2_{n-1}$, заключаясь между двумя безконечно малыми величинами $(X-x_0)Q_\lambda dx_\lambda$ и $(X-x_0)Q_\mu dx_\mu$, будетъ сама безконечно малая. Отбросивъ её въ сравненіи съ конечною величиною $f(x_0)dx_0+f(x_1)dx_1+\ldots+f(x_{n-1})dx_{n-1}$, получимъ просто

$$(X-x_0)\underset{x_0}{\overset{X}{M}}f(x)=f(x_0)dx_0+f(x_1)dx_1+f(x_2)dx_2+\ldots+f(x_{n-1})dx_{n-1}. \qquad (G)$$

Вторая часть этого уравненія называется *опредѣленнымъ интеграломъ*, и изображается знакоположеніемъ

$$\int_{x_0}^{X}f(x)dx,$$

которое слѣдовательно означаетъ сумму всѣхъ возможныхъ значеній произведенія $f(x)dx$ между предѣлами x_0 и X. И такъ

$$\int_{x_0}^{X}f(x)dx=(X-x_0)\underset{x_0}{\overset{X}{M}}f(x), \qquad (H)$$

или, соображаясь съ уравненіемъ (F),

$$\int_{x_0}^{X}f(x)dx=(X-x_0)f(x_0+\lambda[X-x_0]), \quad \text{гдѣ} \quad \lambda>0 \ \text{и} <1. \qquad (I)$$

Формула (H) опредѣляетъ весьма простую зависимость между опредѣленнымъ интеграломъ $\int_{x_0}^{X}f(x)dx$ и среднею ариѳметическою величиною $\underset{x_0}{\overset{X}{M}}f(x)$. Она показываетъ, что опредѣленный интегралъ равняется средней ариѳметической величинѣ подъинтегральной функціи $f(x)$, помноженной на разность предѣловъ; и на-оборотъ: средняя ариѳметическая равна опредѣленному интегралу, раздѣленному на разность предѣловъ. Изъ этого прямо усматриваемъ, что вычисленіе средней ариѳметической величины для безконечнаго числа значеній функціи, или нахожденіе опредѣленнаго интеграла, составляетъ одну и ту же задачу.

Опредѣленный интегралъ $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ обращается просто въ среднюю ариѳметическую $\overset{X}{\underset{x_0}{M}} f(x)$, когда разность предѣловъ $X-x_0$ равна единицѣ. И такъ, имѣемъ вообще

$$\int_a^{a+1} f(x)dx = \overset{a+1}{\underset{a}{M}} f(x).$$

Замѣтимъ еще, что если послѣдовательные члены формулы (E) замѣнимъ опредѣленными интегралами, то получимъ

$$\int_{x_0}^X f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^X f(x)dx. \qquad (J)$$

Въ силу этой формулы, всякій опредѣленный интегралъ можетъ быть разложенъ на сколько угодно другихъ подобныхъ же интеграловъ чрезъ включеніе промежуточныхъ величинъ между данными его предѣлами x_0 и X.

Займемся теперь изложеніемъ главныхъ свойствъ интеграловъ.

§ 2. Если въ формулѣ (H) замѣнимъ постоянный предѣлъ X перемѣннымъ x, и удержимъ нижній x_0, разумѣя подъ нимъ постоянное число, то получимъ

$$\int_{x_0}^x f(x)dx = (x-x_0)\overset{x}{\underset{x_0}{M}} f(x);$$

ясно, что этотъ интегралъ, называемый *неопредѣленнымъ* по причинѣ неопредѣленности верхняго предѣла x, будетъ зависѣть отъ x, отъ постоянной величины x_0 и отъ вида функціи f. И такъ, можно изобразить его чрезъ $\psi(x)$, и искать потомъ, какимъ образомъ отъ данной функціи $f(x)$ перейти къ неизвѣстной $\psi(x)$. Во первыхъ замѣтимъ, что эта функція $\psi(x)$ должна уничтожаться для $x=x_0$, что очевидно слѣдуетъ изъ предъидущаго уравненія; поэтому $\psi(x_0)=0$. Съ другой стороны, измѣнивъ x въ $x+h$ въ уравненіи

$$\int_{x_0}^x f(x)dx = \psi(x), \quad \text{получимъ} \quad \int_{x_0}^{x+h} f(x)dx = \psi(x+h).$$

Разложимъ интегралъ $\int_{x_0}^{x+h} f(x)dx$ на два другіе, включивъ между его предѣлами x_0 и $x+h$ новое число x. По формулѣ (J) найдется

$$\int_{x_0}^{x+h} f(x)dx = \int_{x_0}^x f(x)dx + \int_x^{x+h} f(x)dx = \psi(x+h).$$

Но, въ силу уравненія (I),

$$\int_x^{x+h} f(x)dx = hf(x+\lambda h);$$

слѣдовательно

$$\psi(x)+hf(x+\lambda h) = \psi(x+h),$$

откуда

$$f(x+\lambda h) = \frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}.$$

Взявъ предѣлы обѣихъ частей этого уравненія, то есть положивъ $h=0$, получимъ

$$f(x) = \psi'(x). \qquad (K)$$

Это равенство выражаетъ главное, основное свойство интеграла. Изъ него заключаемъ, что интегралъ $\psi(x)$ есть такая функція, производная которой равна подъинтегральной $f(x)$. Если уравненію (K) дадимъ видъ

$$f(x)dx = \psi'(x)dx = d.\psi(x), \quad \text{или} \quad \int_{x_0}^x f(x)dx = \int_{x_0}^x d.\psi(x) = \psi(x), \qquad (L)$$

то усмотримъ непосредственно, что дифференціалъ интеграла равенъ подъинтегральной функціи, и что слѣдовательно интегральный или суммовой знакъ $\int$ уничтожаетъ дифференціальный d, и на-оборотъ. И такъ, интегрированіе есть дѣйствіе прямопротивоположное дифференцированію. На этомъ послѣднемъ свойствѣ часто основываютъ самое опредѣленіе интеграловъ.

Мы замѣтили сей-часъ, что функція $\psi(x)$ должна удовлетворять условію $\psi(x_0)=0$; легко освободиться отъ этого требованія положивъ

$$\psi(x) = \varphi(x)+C,$$

разумѣя подъ C постоянную величину. Дѣйствительно, такъ какъ

$$\psi'(x) = \varphi'(x) \quad \text{и} \quad \psi(x_0) = \varphi(x_0)+C = 0, \quad \text{откуда} \quad C = -\varphi(x_0),$$

то и получимъ

$$\int_{x_0}^x f(x)dx = \varphi(x)-\varphi(x_0),$$

гдѣ функція $\varphi(x)$ должно удовлетворять одному только условію, именно $\varphi'(x)=f(x)$. И такъ, когда функція $\varphi(x)$ будетъ извѣстна, то опредѣленный интегралъ

$$\int_{x_0}^X f(x)dx = \varphi(X)-\varphi(x_0) \qquad (M)$$

получится подставивъ въ $\varphi(x)$ сперва верхній предѣлъ, потомъ нижній, и вычтя второй результатъ изъ перваго.

Когда разсматривается неопредѣленный интегралъ, то предѣлы обыкновенно не пишутся, и, вмѣсто члена $-\varphi(x_0)$, ставятъ постоянную произвольную величину C. И такъ

$$\int f(x)dx = \varphi(x)+C.$$

При этомъ должно разумѣть, что нижній предѣлъ есть величина постоянная, вообще неопредѣленная, а верхній, перемѣнная x.

Если подъинтегральная функція будетъ *чётная*, то есть такого свойства, что не перемѣняетъ ни величины, ни знака при переходѣ перемѣнной отъ положительнаго значенія къ тому же отрицательному, и если, сверхъ того, предѣлы интеграла равны, но имѣютъ противные знаки, то получимъ

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 2\int_{0}^{+a} f(x)dx. \quad (N)$$

Въ справедливости этого равенства удостовѣряемся непосредственно замѣтивъ, что для всѣхъ значеній x отъ 0 до $-a$ функція $f(x)$ получаетъ тѣ же самыя величины какъ отъ 0 до $+a$, ибо, по предположенію, $f(-x) = f(+x)$. Слѣдовательно и сумма дифференціальныхъ элементовъ какъ въ первомъ случаѣ, такъ и во второмъ, будетъ одинаковая, откуда заключаемъ, что для полученія интеграла $\int_{-a}^{+a} f(x)dx$ стоитъ только удвоить интегралъ $\int_{0}^{+a} f(x)dx$.

Когда предстоитъ надобность перемѣнить порядокъ предѣловъ въ опредѣленномъ интегралѣ, то вмѣстѣ съ тѣмъ перемѣняемъ его знакъ. Это прямо слѣдуетъ изъ формулы (H), доставляющей

$$\int_{X}^{x_0} f(x)dx = (x_0 - X)\overset{x_0}{\underset{X}{M}} f(x) = -(X - x_0)\overset{x_0}{\underset{X}{M}} f(x);$$

но какъ средняя ариѳметическая $\overset{x_0}{\underset{X}{M}} f(x)$ очевидно не измѣнится, станемъ ли складывать значенія функціи $f(x)$ начиная отъ $x = X$ до $x = x_0$, или отъ $x = x_0$ до $x = X$, то и будетъ $\overset{x_0}{\underset{X}{M}} f(x) = \overset{X}{\underset{x_0}{M}} f(x)$. Слѣдовательно

$$\int_{X}^{x_0} f(x)dx = -(X - x_0)\overset{X}{\underset{x_0}{M}} f(x) = -\int_{x_0}^{X} f(x)dx. \quad (O)$$

Если подъинтегральная функція опредѣленнаго интеграла выражается произведеніемъ $f(x).F(x)$ двухъ другихъ функцій, непрерывныхъ между предѣлами x_0 и X интегрированія, и если, сверхъ того, одна изъ нихъ, напримѣръ $F(x)$, не перемѣняетъ знака между этими предѣлами, то интегралъ произведенія получится умноживъ интегралъ $\int_{x_0}^{X} F(x)dx$ функціи не перемѣняющей знака, на нѣкоторую среднюю величину $f(x_0 + \lambda[X - x_0])$ другой функціи $f(x)$. И такъ

$$\int_{x_0}^{X} f(x).F(x)dx = f(x_0 + \lambda[X - x_0])\int_{x_0}^{X} F(x)dx. \quad (P)$$

Чтобы доказать это предложеніе, замѣтимъ во первыхъ, что на основаніи формулы (H) будетъ

$$\int_{x_0}^{X} f(x).F(x)dx = (X - x_0)\overset{X}{\underset{x_0}{M}}[f(x).F(x)].$$

Означимъ соотвѣтственно чрезъ A и B наименьшую и наибольшую величину функціи $f(x)$, и положимъ что функція $F(x)$ постоянно положительная; очевидно получимъ

$$\overset{X}{\underset{x_0}{M}}[f(x).F(x)] > A\overset{X}{\underset{x_0}{M}} F(x) \quad \text{и} \quad \overset{X}{\underset{x_0}{M}}[f(x).F(x)] < B\overset{X}{\underset{x_0}{M}} F(x),$$

и слѣдовательно

$$\overset{X}{\underset{x_0}{M}}[f(x).F(x)] = f(x_0 + \lambda[X - x_0])\overset{X}{\underset{x_0}{M}} F(x),$$

гдѣ $f(x_0 + \lambda[X - x_0])$ изображаетъ нѣкоторую среднюю величину функціи $f(x)$, заключающуюся между наименьшимъ и наибольшимъ ея значеніями A и B. Помноживъ послѣднее уравненіе на разность $X - x_0$ предѣловъ, и замѣнивъ произведеніе $(X - x_0)\overset{X}{\underset{x_0}{M}} F(x)$ опредѣленнымъ интеграломъ $\int_{x_0}^{X} F(x)dx$, получимъ формулу (P). Если бы функція $F(x)$ была постоянно отрицательная между предѣлами x_0 и X, то надлежало бы въ предъидущихъ неравенствахъ перемѣнить знаки $>$ и $<$ одинъ на другой; окончательное же слѣдствіе осталось бы безъ измѣненія. Но когда эта самая функція $F(x)$ перемѣняетъ знакъ между предѣлами интегрированія, то предложеніе, выражаемое формулою (P), не всегда будетъ состояться; это утвержденіе основывается на томъ, что предъидущія неравенства окажутся иногда несправедливыми.

§ 3. Результаты, выведенные въ предъидущихъ двухъ параграфахъ, могутъ быть распространены и на кратные интегралы. Положимъ, напримѣръ, что разсматривается двойной интегралъ

$$\int_{x_0}^{X}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dxdy,$$

означающій, что должно взять сперва опредѣленный интегралъ $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$ относительно y, считая x постояннымъ, а потомъ, найденную такимъ образомъ функцію перемѣнной x умножить на dx, и интегрировать между постоянными предѣлами x_0 и X. Слѣдовательно, въ силу формулы (H),

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = [\psi(x) - \varphi(x)]\overset{y=\psi(x)}{\underset{y=\varphi(x)}{M}} f(x, y).$$

Помножая на dx, и интегрируя между предѣлами x_0 и X, будетъ

$$\int_{x_0}^{X}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dxdy = (X-x_0) \underset{x=x_0}{\overset{x=X}{M}} \left\{[\psi(x)-\varphi(x)] \underset{y=\varphi(x)}{\overset{y=\psi(x)}{M}} f(x,y)\right\}. \qquad (Q)$$

Легко видѣть, что простой интегралъ $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ изображаетъ площадь кривой, опредѣляемой уравненіемъ $y=f(x)$, ограниченную съ двухъ сторонъ ординатами $f(x_0)$ и $f(X)$, а съ остальныхъ двухъ, осью обсциссъ и дугою разсматриваемой кривой линіи. Величина $\underset{x_0}{\overset{X}{M}} f(x)$ будетъ означать среднюю ариѳметическую всѣхъ ординатъ, какія можно вообразить между двумя крайними, почему площадь $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ кривой линіи равняется площади прямоугольника, имѣющаго основаніемъ своимъ разность $X-x_0$ предѣловъ, а высотою, эту самую среднюю ординату $\underset{x_0}{\overset{X}{M}} f(x)$, то есть произведенію $(X-x_0)\underset{x_0}{\overset{X}{M}} f(x)$.

Подобныя геометрическія соображенія могутъ быть распространены и на двойной интегралъ (Q). Дѣйствительно, пусть будетъ $z=f(x,y)$ уравненіе кривой поверхности, отнесенной къ тремъ прямоугольнымъ плоскостямъ. Интегралъ

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = [\psi(x)-\varphi(x)] \underset{\varphi(x)}{\overset{\psi(x)}{M}} f(x,y),$$

въ которомъ x принимается за постоянную величину, изобразитъ площадь сѣченія кривой поверхности плоскостію, перпендикулярною къ оси x-овъ, и проходящею на разстояніи x отъ начала координатъ. Въ томъ же самомъ предположеніи, выраженіе $\underset{y=\varphi(x)}{\overset{y=\psi(x)}{M}} f(x,y)$ означаетъ среднюю ариѳметическую всѣхъ возможныхъ значеній вертикальной ординаты $z=f(x,y)$, заключающихся между предѣлами $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$; площадь прямоугольника, имѣющаго основаніемъ разность предѣловъ, а высотою эту среднюю ариѳметическую, то есть произведеніе $[\psi(x)-\varphi(x)] \underset{y=\varphi(x)}{\overset{y=\psi(x)}{M}} f(x,y)$, опредѣлитъ упомянутую площадь сѣченія. Наконецъ, знакоположеніе

$$\underset{x=x_0}{\overset{x=X}{M}} \left\{[\psi(x)-\varphi(x)] \underset{y=\varphi(x)}{\overset{y=\psi(x)}{M}} f(x,y)\right\}$$

очевидно изобразитъ среднюю ариѳметическую всѣхъ возможныхъ площадей сѣченій, какія только можно получить между предѣлами $x=x_0$ и $x=X$. Умноживъ эту среднюю площадь на разность предѣловъ $X-x_0$, получится окончательно, между желаемыми предѣлами, объёмъ тѣла, ограниченнаго данною поверхностію.

ПРИМѢЧАНІЕ X.

Пусть будетъ

$$s = 1+2(\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}2\varphi+\text{Cos.}3\varphi+\ldots+\text{Cos.}n\varphi),$$

и слѣдовательно, по правиламъ обратнаго способа разностей,

$$s = 1+2\Sigma\text{Cos.}(n+1)\varphi. \qquad (A)$$

Для опредѣленія интеграла $\Sigma\text{Cos.}(n+1)\varphi$ беремъ разность функціи $\text{Sin.}m\varphi$, наблюдая притомъ, что въ настоящемъ случаѣ перемѣнная величина есть m, а конечное приращеніе $\Delta m=1$. И такъ

$$\Delta\text{Sin.}m\varphi = \text{Sin.}(m+1)\varphi-\text{Sin.}m\varphi = 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varphi.\text{Cos.}\tfrac{2m+1}{2}\varphi,$$

откуда

$$\text{Sin.}m\varphi = 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varphi\Sigma\text{Cos.}\tfrac{2m+1}{2}\varphi,$$

или, прибавляя постоянную величину,

$$\Sigma\text{Cos.}\tfrac{2m+1}{2}\varphi = \frac{\text{Sin.}m\varphi}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi}+C.$$

Положимъ $\frac{2m+1}{2}=n+1$; найдется $m=\frac{2n+1}{2}$, и слѣдовательно

$$\Sigma\text{Cos.}(n+1)\varphi = \frac{\text{Sin.}\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi}+C.$$

Подставивъ эту величину въ формулу (A), получимъ

$$s = 1+\frac{\text{Sin.}\frac{2n+1}{2}\varphi}{\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi}+2C.$$

Для опредѣленія постоянной величины C замѣчаемъ, что сумма предложеннаго ряда, для $n=0$, обращается въ 1; поэтому будетъ

$$1 = 1+1+2C, \quad \text{откуда} \quad 2C=-1,$$

и слѣдовательно

$$s = \frac{\text{Sin.}\frac{2n+1}{2}\varphi}{\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi}, \qquad (B)$$

что и имѣли въ виду доказать.

ОБЪЯСНЕНІЕ ТАБЛИЦЪ.

Первая изъ двухъ таблицъ, приложенныхъ къ концу этой книги, заимствована изъ *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, на 1834 годъ. Она заключаетъ въ себѣ два столбца, отмѣченные буквами t и i. Въ столбцѣ подъ буквою t находятся по порядку всѣ числа отъ 0 до 2 чрезъ *каждую сотую*. Во второмъ столбцѣ, подъ буквою i, помѣщенъ интегралъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

соотвѣтствующій аргументу t. Эта таблица тѣмъ полезна, что во многихъ случаяхъ прямо доставляетъ приближенную величину вѣроятности, когда t не превосходитъ *двухъ единицъ*.

Для значеній t, простирающихся до *трехъ единицъ*, можно употреблять вторую таблицу, которую мы заимствовали изъ сочиненія: *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres;* par Kramp, Strasbourg, 1799. Она состоитъ изъ трехъ вертикальныхъ столбцовъ, отмѣченныхъ буквами T, I и L. Столбецъ подъ буквою T заключаетъ въ себѣ по порядку всѣ числа отъ 0 до 3 чрезъ *каждую сотую*. Во второмъ столбцѣ, подъ буквою I, помѣщены численныя величины интеграла

$$I = \int_T^\infty e^{-t^2}dt,$$

соотвѣтствующія аргументу T. Наконецъ, третій столбецъ, отмѣченный буквою L, содержитъ Бригговы логариѳмы интеграла I, помноженнаго на 10^{10}. И такъ

$$L = \text{Log.}(10^{10}.I) = 10 + \text{Log.}I.$$

Эта таблица служитъ большимъ пособіемъ при численномъ рѣшеніи многихъ вопросовъ о случайностяхъ, потому что интегралы

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty e^{-t^2}dt,\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt$$

весьма часто входятъ въ формулы, опредѣляющія искомыя вѣроятности. Второй изъ нихъ выражается посредствомъ перваго формулою:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty e^{-t^2}dt - \int_T^\infty e^{-t^2}dt\right],$$

и какъ

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то имѣемъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty e^{-t^2}dt.$$

Такъ какъ въ формулы, опредѣляющія искомыя вѣроятности, входитъ постоянное число $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, то приводимъ его величину, а также и его Бригговъ логариѳмъ:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1{,}12832\ldots,\quad \text{Log.}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) = 0{,}0524556.$$

Если бы требовалось найти численную величину интеграла

$$\int_0^T e^{-t^2}dt \quad \text{или} \quad \int_T^\infty e^{-t^2}dt$$

для значенія аргумента T съ тремя или бо̀льшимъ числомъ десятичныхъ цифръ, то и въ этомъ случаѣ, при пособіи способовъ интерполированія, приведенныя таблицы послужили бы для рѣшенія задачи. Положимъ, напримѣръ, что ищется величина интеграла

$$\int_T^\infty e^{-t^2}dt \quad \text{для значенія} \quad T = 0{,}176.$$

Съ этою цѣлію можемъ употребить извѣстную формулу интерполированія

$$f(x+i) = u + \frac{i}{h}.\Delta u + \frac{i}{h}.\frac{i-h}{2h}.\Delta^2 u + \frac{i}{h}.\frac{i-h}{2h}.\frac{i-2h}{3h}.\Delta^3 u + \ldots,$$

гдѣ $u = f(x)$. Въ настоящемъ случаѣ будетъ: $x = 0{,}17$, $\Delta x = h = 0{,}01$, $i = 0{,}006$. Для полученія разностей Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u \ldots$ выписываемъ изъ таблицы слѣдующія значенія интеграловъ I, полагая для краткости

$$I(T) = \int_T^\infty e^{-t^2}dt:$$

$$u = I(0{,}17) = 0{,}71785047$$
$$u_1 = I(0{,}18) = 0{,}70815215$$
$$u_2 = I(0{,}19) = 0{,}69848869$$
$$u_3 = I(0{,}20) = 0{,}68886189$$

Первыя разности:

$$u_1 - u = \Delta u = -0{,}00969832$$
$$u_2 - u_1 = \Delta u_1 = -0{,}00966346$$
$$u_3 - u_2 = \Delta u_2 = -0{,}00962680$$

Вторыя разности:

$$\Delta u_1 - \Delta u = \Delta^2 u = +0{,}00003486$$

$$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1 = +0{,}00003666$$

Третья разность:

$$\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = \Delta^3 u = +0{,}00000180.$$

Сверхъ того имѣемъ:

$$\frac{i}{h} = 0{,}6\,, \quad \frac{i-h}{2h} = -0{,}2\,, \quad \frac{i-2h}{3h} = -0{,}4666\ldots.$$

Слѣдовательно

$$u = +0{,}71785047$$

$$\frac{i}{h}\cdot\Delta u = -0{,}00581899$$

$$\frac{i}{h}\cdot\frac{i-h}{2h}\cdot\Delta^2 u = -0{,}00004183$$

$$\frac{i}{h}\cdot\frac{i-h}{2h}\cdot\frac{i-2h}{3h}\cdot\Delta^3 u = +0{,}00000010.$$

При такихъ опредѣленіяхъ приведенная выше формула интерполированія доставитъ:

$$f(x+i) = I(0{,}176) = \int_{0{,}176}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 0{,}71198975.$$

Когда потребуется опредѣлить интегралъ

$$\int_T^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

для аргумента T, превышающаго число 3, и слѣдовательно выходящаго изъ предѣловъ таблицы, тогда можно обратиться къ безконечнымъ рядамъ, выведеннымъ въ N° 23 (ГЛАВА II), а также къ ПРИМѢЧАНІЮ IV.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

ПРИБАВЛЕНІЕ*).

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ПО ПРИБЛИЖЕНІЮ ПРЕДѢЛОВЪ ПОТЕРИ УБИТЫМИ И РАНЕНЫМИ, ПРЕТЕРПѢВАЕМОЙ ОТРЯДОМЪ ВОЙСКЪ ВО ВРЕМЯ СРАЖЕНІЯ.

Въ этомъ Прибавленіи мы выведемъ аналитическія формулы для опредѣленія по приближенію предѣловъ потери убитыми и ранеными, понесенной отрядомъ войскъ во время сраженія. Средство, предлагаемое нами для достиженія этой цѣли, состоитъ въ томъ, чтобы предварительно назначить на-удачу изъ каждаго полка, баталіона, эскадрона или роты извѣстное число людей, которые, во время дѣйствія, должны занимать обыкновенныя свои мѣста. Для возможнаго уравненія статочностей, необходимо принять нѣкоторыя предосторожности: такъ, напримѣръ, должно стараться чтобы число назначенныхъ людей, въ каждомъ родѣ оружія, было чувствительнымъ образомъ пропорціонально количеству войскъ этого самаго рода, участвующихъ въ дѣлѣ; также, чтобы сказанное число людей было распредѣлено равномѣрно въ каждой изъ трехъ шеренгъ, потому что онѣ не одинаково подвергаются огню непріятеля. Однимъ словомъ, чѣмъ правильнѣе будутъ уравновѣшены статочности, тѣмъ результатъ вычисленія заслужитъ болѣе довѣрія. Далѣе, положимъ, что по принятіи надлежащихъ мѣръ, узнали, во время сраженія, сколько изъ числа назначенныхъ солдатъ находится убитыхъ и раненыхъ. Простая пропорція покажетъ

*) Во время печатанія этой книги, я представилъ въ Академію Наукъ Разсужденіе подъ заглавіемъ: *Sur une application curieuse de l'Analyse des Probabilités à la détermination approximative des limites de la perte réelle en hommes qu'éprouve un corps d'armée pendant un combat.* Оно напечатано въ Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, VI Série, *Sciences Mathématiques et Physiques*, Tome IV. Такъ какъ этотъ вопросъ представляетъ довольно любопытное приложеніе началъ, изложенныхъ въ Главѣ VII, то я рѣшился помѣстить здѣсь его рѣшеніе, въ видѣ *Прибавленія*.

вѣроятное число выбывшихъ изъ строя. Возьмемъ теперь нѣкоторые предѣлы, заключающіе это вѣроятное число, и опредѣлимъ вѣроятность, что дѣйствительная потеря людьми не выходитъ изъ допущенныхъ предѣловъ. Если случится, что принявъ предѣлы довольно тѣсные, получимъ для ихъ вѣроятности значеніе, мало удаляющееся отъ единицы или достовѣрности, то въ такомъ случаѣ приближеніе, котораго достигли, можетъ быть полезно на практикѣ. Численные результаты, приведенные въ концѣ этого Прибавленія, обнаружатъ какъ самую степень приближенія, такъ и мѣру довѣрія, котораго это приближеніе заслуживаетъ.

Мы не дѣлаемъ никакихъ замѣчаній о приведеніи нашего способа въ исполненіе; въ этомъ отношеніи должно положиться на опытность людей, имѣющихъ практическія свѣдѣнія въ военномъ дѣлѣ. Они же рѣшатъ, до какой степени примѣненіе нашего анализа можетъ быть полезно на практикѣ. Но, считаемъ необходимымъ предварить, что неудобство употребленія формулъ, довольно сложныхъ по самой сущности вопроса, легко можетъ быть устранено. Для этого стоитъ только вычислить напередъ таблицу, въ которой, съ перваго взгляда, найдется искомый результатъ. Въ концѣ этой статьи мы объяснимъ построеніе подобной таблицы.

Перейдемъ теперь къ аналитическому рѣшенію вопроса, составляющаго предметъ этого Прибавленія. Задача состоитъ въ вычисленіи вѣроятности, что дѣйствительная потеря убитыми и ранеными заключается между извѣстными предѣлами, а также въ разысканіи этихъ самыхъ предѣловъ, когда предварительно условились въ наименьшемъ значеніи ихъ вѣроятности. Сверхъ того, надлежитъ внимательно разобрать, каково должно быть отношеніе назначеннаго числа слѣдимыхъ людей къ полному числу сражающихся, чтобы получаемые результаты имѣли надлежащую степень точности на практикѣ, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, заслуживали бы достаточнаго довѣрія.

Изобразимъ чрезъ N полное число людей, которые должны участвовать въ дѣлѣ, а чрезъ n число всѣхъ чиновъ, выбранныхъ на-удачу изъ итога N. Положимъ, по отобраннымъ свѣдѣніямъ въ опредѣленное время сраженія, оказывается, что изъ этого числа n убито или ранено i человѣкъ, которыхъ, для сокращенія рѣчи, мы будемъ называть вообще *выбывшими изъ строя*. Разность $n-i$ изобразитъ число *оставшихся въ строю* изъ того же числа n. На такомъ основаніи, послѣ наблюденнаго событія, можно будетъ сдѣлать слѣдующія $(N-n+1)$ предположенія относительно *полнаго числа* выбывшихъ и оставшихся въ строю:

Предположенія:	*Выбывшихъ изъ строя:*	*Оставшихся въ строю:*
1-ое	i	$N-i$
2-ое	$i+1$	$N-i-1$
3-ье	$i+2$	$N-i-2$
....		....
$(N-n+1)$-ое	$i+N-n$	$n-i$.

Если означимъ чрезъ x вѣроятность, что участвующій въ сраженіи будетъ убитъ или раненъ въ промежутокъ времени, протекающій отъ начала дѣйствія до разсматриваемаго мгновенія, то $1-x$ изобразитъ вѣроятность противнаго событія. Значенія x, соотвѣтствующія различнымъ предположеніямъ, будутъ:

Предположенія:	*Значенія* x:	*Значенія* $1-x$:
1-ое	$\frac{i}{N}$	$\frac{N-i}{N}$
2-ое	$\frac{i+1}{N}$	$\frac{N-i-1}{N}$
3-ье	$\frac{i+2}{N}$	$\frac{N-i-2}{N}$
....		....
$(N-n+1)$-ое	$\frac{i+N-n}{N}$	$\frac{n-i}{N}$.

Пусть будетъ P вѣроятность *a priori* наблюденнаго событія; получимъ

$$P=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots(n-i)}\cdot x^i(1-x)^{n-i}.$$

Внося послѣдовательно въ эту формулу величины x, относящіяся къ различнымъ предположеніямъ, получимъ соотвѣтственныя значенія вѣроятности наблюденнаго событія. Изобразивъ чрезъ P_μ величину P для μ-го предположенія, найдемъ

$$P_\mu=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots(n-i)}\cdot\frac{(i+\mu-1)^i(N-i-\mu+1)^{n-i}}{N^n}.$$

Замѣтимъ теперь, что въ силу теоремы *Якова Бернулли*, *вѣроятное число* людей, выбывшихъ изъ строя, опредѣлится четвертымъ членомъ k пропорціи $n:i=N:k=\frac{Ni}{n}$. Когда $\frac{Ni}{n}$ будетъ дробное число, то для величины k возьмемъ ближайшее цѣлое, заключающееся въ $\frac{Ni}{n}$. На такомъ основаніи предложимъ себѣ вопросъ, найти вѣроятность, что *дѣйствительное число* выбывшихъ изъ строя будетъ заключаться между предѣлами $k-\omega$ и $k+\omega$, разумѣя подъ ω цѣлое число, болѣе или менѣе значительное. Для полученія этой

вѣроятности, которую означимъ чрезъ p, употребимъ правило, относящееся къ опредѣленію вѣроятности нѣсколькихъ предположеній. Если изобразимъ чрезъ Q_μ вѣроятность μ-го предположенія, то получимъ (N° 52)

$$Q_\mu = \frac{P_\mu}{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_{N-n+1}}.$$

Для опредѣленія вѣроятности p, что одно изъ предположеній, при которыхъ число выбывшихъ изъ строя людей не выходитъ изъ предѣловъ $k-\omega$ и $k+\omega$, имѣетъ мѣсто безразлично, замѣтимъ что числамъ

$$k-\omega, \quad k, \quad k+\omega$$

соотвѣтствуютъ предположенія

$$(k-\omega-i+1)\text{-ое}, \quad (k-i+1)\text{-ое}, \quad (k+\omega-i+1)\text{-ое};$$

слѣдовательно, если положимъ для сокращенія

$$k-\omega-i+1 = \omega_0 \quad \text{и} \quad k+\omega-i+1 = \Omega,$$

то, согласно съ правиломъ, приведеннымъ въ концѣ N° 52, получимъ

$$p = Q_{\omega_0}+Q_{\omega_0+1}+Q_{\omega_0+2}+\ldots+Q_\Omega,$$

или

$$p = \frac{P_{\omega_0}+P_{\omega_0+1}+P_{\omega_0+2}+\ldots+P_\Omega}{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_{N-n+1}}.$$

Пусть будутъ x' и x'' значенія вѣроятности x, соотвѣтствующія предположеніямъ порядковъ ω_0 и Ω; будетъ

$$x' = \frac{k-\omega}{N}, \quad x'' = \frac{k+\omega}{N}.$$

Равнымъ образомъ, изобразивъ чрезъ x_0 и X величины x, относящіяся къ первому и послѣднему предположенію, получимъ

$$x_0 = \frac{i}{N}, \quad X = \frac{i+N-n}{N}.$$

При такихъ условіяхъ предъидущая величина p, въ силу формулы опредѣляющей P_μ, приметъ видъ

$$p = \frac{\underset{x=x'}{\overset{x=x''}{\mathrm{S}}} x^i(1-x)^{n-i}}{\underset{x=x_0}{\overset{x=X}{\mathrm{S}}} x^i(1-x)^{n-i}}, \qquad (A)$$

гдѣ числа k, x', x'', x_0 и X опредѣляются слѣдующими уравненіями:

$$k = \frac{Ni}{n}, \quad x' = \frac{k-\omega}{N}, \quad x'' = \frac{k+\omega}{N}, \quad x_0 = \frac{i}{N}, \quad X = \frac{i+N-n}{N}. \qquad (B)$$

И такъ, отношеніе двухъ конечныхъ суммъ, составляющихъ дробь (A), и взятыхъ соотвѣтственно между показанными предѣлами включительно, изобразитъ вѣроятность, что въ слѣдствіе наблюденнаго событія полное число выбывшихъ изъ строя людей будетъ заключаться между предѣлами $k-\omega$ и $k+\omega$, включая сюда и самые предѣлы. Поэтому, вопросъ приведенъ къ вычисленію выраженія (A) съ надлежащею степенью приближенія, ибо, точное опредѣленіе величины p, по причинѣ чрезвычайной продолжительности выкладокъ, требуемыхъ формулою (A), рѣшительно невозможно.

Чтобы судить о степени приближенія, съ которою будетъ вычислена вѣроятность p, необходимо условиться предварительно въ относительной величинѣ чиселъ N, n и ω; они, вмѣстѣ съ i, составляютъ данныя вопроса въ томъ случаѣ, когда имѣемъ въ виду найти вѣроятность p допущенныхъ предѣловъ. По самой сущности вопроса естественно предположить, какъ въ N° 22 (ГЛАВА II), что n и ω суть величины порядка $\sqrt{N}$. Такъ, напримѣръ, еслибъ число N равнялось 10000, то можно бы было, сообразуясь впрочемъ съ практическими требованіями, приписать n и ω значенія, мало удаляющіяся отъ 200, 300, 400.... Можно также предположить, что наблюденныя числа i и $n-i$, очевидно меньшія n, пропорціональны тому же порядку $\sqrt{N}$, то есть изображаютъ величины вида $\lambda\sqrt{N}$, разумѣя подъ λ коэффиціентъ посредственной величины, который часто можетъ быть меньше единицы. Сверхъ того мы допустимъ, что ищется вѣроятность p съ точностію до величинъ порядка $\frac{1}{N}$, почему и откидываемъ члены этого порядка, именно количества пропорціональныя $\frac{1}{N}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{i^2}$, $\frac{1}{(n-i)^2}$. Такая степень приближенія, по причинѣ значительности числа N, будетъ вообще весьма достаточна.

На такомъ основаніи легко доказать, что въ формулѣ (A) конечныя суммы S могутъ быть замѣнены характеристиками опредѣленныхъ интеграловъ съ дополнительнымъ членомъ въ числителѣ. Дѣйствительно, положимъ для краткости

$$y = x^i(1-x)^{n-i}, \quad y' = x'^i(1-x')^{n-i}, \quad y'' = x''^i(1-x'')^{n-i};$$

получимъ

$$\underset{x=x'}{\overset{x=x''}{\mathrm{S}}}\, y = \sum_{x=x'}^{x=x''} y + y''$$

и сверхъ того, по извѣстной формулѣ *Эйлера* [ПРИМѢЧАНІЕ I],

$$\sum_{x'}^{x''} y = \frac{1}{h}\int_{x'}^{x''} y\,dx - \frac{1}{2}(y''-y') + \frac{h}{12}\left[\left(\frac{dy''}{dx}\right) - \left(\frac{dy'}{dx}\right)\right] - \ldots$$

Слѣдовательно

$$\underset{x=x'}{\overset{x=x''}{\mathrm{S}}}\, y = \frac{1}{h}\int_{x'}^{x''} y\,dx + \frac{1}{2}(y''+y') + \frac{h}{12}\left[\left(\frac{dy''}{dx}\right) - \left(\frac{dy'}{dx}\right)\right] - \ldots$$

Замѣтимъ теперь, что h, изображающій конечное приращеніе вѣроятности x, равенъ, по смыслу нашего вопроса, дроби $\frac{1}{N}$. Поэтому предъидущая формула приметъ видъ

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=x'}^{x=x''} y = N\int_{x'}^{x''} ydx + \frac{1}{2}(y''+y') + \frac{1}{12N}\left[\left(\frac{dy''}{dx}\right) - \left(\frac{dy'}{dx}\right)\right] - \cdots \qquad (C)$$

Легко показать, что вторая часть этого уравненія приводится къ двумъ первымъ своимъ членамъ

$$N\int_{x'}^{x''} ydx + \frac{1}{2}(y''+y'),$$

когда, по сдѣланному сей-часъ условію, откинемъ величины порядка $\frac{1}{N}$, а слѣдовательно и меньшія. Дѣйствительно, въ силу извѣстнаго свойства опредѣленныхъ интеграловъ [ПРИМѢЧАНІЕ IX, § 1], и наблюдая что $x' = \frac{k-\omega}{N}$, $x'' = \frac{k+\omega}{N}$, имѣемъ

$$N\int_{x'}^{x''} ydx = N(x''-x') \mathop{M}\limits_{x=x'}^{x=x''} y = 2\omega \mathop{M}\limits_{x=x'}^{x=x''} y,$$

разумѣя подъ знакоположеніемъ $\mathop{M}\limits_{x=x'}^{x=x''} y$ среднюю ариѳметическую величину функціи $y = x^i(1-x)^{n-i}$ для всѣхъ возможныхъ значеній перемѣнной независимой x между предѣлами $x' = \frac{k-\omega}{N}$ и $x'' = \frac{k+\omega}{N}$. Отношеніе втораго члена $\frac{1}{2}(y''+y')$ формулы (C) къ первому $2\omega \mathop{M}\limits_{x=x'}^{x=x''} y$ будетъ сравнимо съ $\frac{1}{\omega}$, и слѣдовательно порядка $\frac{1}{\sqrt{N}}$. И такъ, членъ $\frac{1}{2}(y''+y')$ долженъ быть удержанъ.

Вычислимъ теперь третій членъ

$$\frac{1}{2N}\left[\left(\frac{dy''}{dx}\right) - \left(\frac{dy'}{dx}\right)\right].$$

Такъ какъ

$$\frac{dy}{dx} = (i-nx)x^{i-1}(1-x)^{n-i-1},$$

то, внося на мѣсто x' и x'' ихъ величины (B), получимъ

$$\frac{1}{12N}\left[\left(\frac{dy''}{dx}\right) - \left(\frac{dy'}{dx}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{12N}\left[\left(i-n\cdot\frac{k+\omega}{N}\right)x''^{i-1}(1-x'')^{n-i-1} - \left(i-n\cdot\frac{k-\omega}{N}\right)x'^{i-1}(1-x')^{n-i-1}\right],$$

и, въ слѣдствіе равенства $k = \frac{Ni}{n}$,

$$\frac{1}{12N}\left[\left(\frac{dy''}{dx}\right) - \left(\frac{dy'}{dx}\right)\right] = -\frac{n\omega}{12N^2}\left[x''^{i-1}(1-x'')^{n-i-1} + x'^{i-1}(1-x')^{n-i-1}\right].$$

Вторая часть этого уравненія есть количество порядка $\frac{1}{N\sqrt{N}}$ въ отношеніи къ первому члену $2\omega \mathop{M}\limits_{x=x'}^{x=x''} y$, въ которомъ первый множитель ω пропорціоналенъ $\sqrt{N}$, а второй $2 \mathop{M}\limits_{x=x'}^{x=x''} y$ изображаетъ количество, сравнимое съ суммою

$$x''^{i-1}(1-x'')^{n-i-1} + x'^{i-1}(1-x')^{n-i-1}.$$

И такъ, членъ $\frac{1}{12N}\left[\left(\frac{dy''}{dx}\right) - \left(\frac{dy'}{dx}\right)\right]$, и подавно дальнѣйшіе, должны быть отброшены при допущенной степени приближенія; останется просто

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=x'}^{x=x''} y = N\int_{x'}^{x''} ydx + \frac{1}{2}(y''+y').$$

Разсмотримъ теперь знаменатель формулы (A). Найдется, какъ и выше,

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=x_0}^{x=X} y = N\int_{x_0}^{X} ydx + \frac{1}{2}(Y+y_0) + \frac{1}{12N}\left[\left(\frac{dY}{dx}\right) - \left(\frac{dy_0}{dx}\right)\right] - \cdots, \qquad (D)$$

гдѣ y означаетъ ту же функцію $x^i(1-x)^{n-i}$, а Y и y_0 величины

$$Y = X^i(1-X)^{n-i}, \quad y_0 = x_0{}^i(1-x_0)^{n-i}.$$

Сверхъ того, такъ какъ $x_0 = \frac{i}{N}$, $X = \frac{i+N-n}{N}$, то получимъ

$$N\int_{x_0}^{X} ydx = (N-n) \mathop{M}\limits_{x=x_0}^{x=X} y.$$

Что́ же касается до слѣдующаго члена $\frac{1}{2}(Y+y_0)$, то отношеніе его къ $(N-n) \mathop{M}\limits_{x=x_0}^{x=X} y$ будетъ порядка $\frac{1}{N-n}$, или, проще, порядка $\frac{1}{N}$, потому что n пропорціоналенъ $\sqrt{N}$. Слѣдовательно $\frac{1}{2}(Y+y_0)$, и подавно дальнѣйшіе члены формулы (D) должны быть откинуты. На такомъ основаніи найдемъ окончательно:

$$p = \frac{N\int_{x'}^{x''} x^i(1-x)^{n-i}dx + \frac{1}{2}\left[x''^i(1-x'')^{n-i} + x'^i(1-x')^{n-i}\right]}{N\int_{x_0}^{X} x^i(1-x)^{n-i}dx}, \qquad (E)$$

гдѣ k, x', x'', x_0 и X опредѣляются формулами (B).

Теперь надобно найти по приближенію величины интеграловъ, входящихъ во вторую часть уравненія (E). Въ Главѣ VII мы уже опредѣлили интегралъ, находящійся въ числителѣ дроби (E) съ тою степенью точности, какая здѣсь требуется. Формула (95) [N° 56], по измѣненіи въ ней буквъ m, n, r соотвѣтственно въ i, $n-i$, n, доставитъ

$$\int_{x'}^{x''} x^i(1-x)^{n-i}dx = 2.\frac{i^i(n-i)^{n-i}}{n^n}.\frac{\sqrt{2i(n-i)}}{n\sqrt{n}}\int_0^T e^{-t^2}dt, \qquad (F)$$

гдѣ

$$T = \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2i(n-i)}}.\frac{\omega}{N}.$$

Интегралъ, входящій въ знаменатель дроби (E), не можетъ быть вычисленъ посредствомъ формулы (F), потому что предѣлы его x_0 и X слишкомъ удалены отъ вѣроятной величины $x=\frac{i}{n}$, соотвѣтствующей наибольшему значенію функціи $y=x^i(1-x)^{n-i}$. Для опредѣленія этого интеграла, разложимъ его сперва слѣдующимъ образомъ:

$$\int_{x_0}^{X} ydx = \int_0^1 ydx - \int_0^{x_0} ydx - \int_X^1 ydx, \qquad (G)$$

и покажемъ потомъ, что при допущенной степени приближенія, мы имѣемъ полное право замѣнить $\int_{x_0}^{X} ydx$ интеграломъ $\int_0^1 ydx$, откинувъ остальные два $\int_0^{x_0} ydx$ и $\int_X^1 ydx$ по причинѣ ихъ малости. Для этого, прежде всего, должно опредѣлить интегралъ $\int_0^1 x^i(1-x)^{n-i}dx$. Формула (114) [ГЛАВА VIII, N° 68] рѣшаетъ нашъ вопросъ съ требуемою степенью приближенія; поставивъ въ ней i и $n-i$ на мѣсто p и q, получимъ

$$\int_0^1 x^i(1-x)^{n-i}dx = \frac{i^i(n-i)^{n-i}}{n^{n+1}}.\sqrt{\frac{2\pi i(n-i)}{n}}\left\{1-\frac{13i(n-i)-n^2}{12i(n-i)n}\right\}. \qquad (H)$$

Изъ этого выраженія легко заключить, что интегралъ

$$\int_0^1 x^i(1-x)^{n-i}dx$$

есть количество порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$, или, что̀ всё равно, порядка $\frac{1}{\sqrt[4]{N}}$. На такомъ основаніи покажемъ, что послѣдніе два интеграла формулы (G), именно

$$\int_0^{x_0} x^i(1-x)^{n-i}dx \quad \text{и} \quad \int_X^1 x^i(1-x)^{n-i}dx$$

должны быть откинуты въ сравненіи съ интеграломъ (H). Начнемъ съ перваго изъ нихъ.

Такъ какъ функція $x^i(1-x)^{n-i}$ имѣетъ только одну наибольшую величину, соотвѣтствующую значенію $x=\frac{i}{n}$, то отсюда слѣдуетъ, что эта функція будетъ постоянно возрастающею отъ $x=0$ до $x=\frac{i}{n}$, а потомъ постоянно убывающею до $x=1$. Но такъ какъ величина $x_0=\frac{i}{N}$ менѣе $\frac{i}{n}$, то функція $x^i(1-x)^{n-i}$, между предѣлами 0 и x_0, достигнетъ наибольшаго своего значенія при $x=x_0$, и обратится тогда въ $x_0^i(1-x_0)^{n-i}$. Съ другой же стороны имѣемъ [ПРИМѢЧАНІЕ IX, § 1]

$$\int_0^{x_0} x^i(1-x)^{n-i}dx = x_0 \underset{x=0}{\overset{x=x_0}{M}} x^i(1-x)^{n-i},$$

и какъ въ силу сдѣланнаго сей-часъ замѣчанія

$$\underset{x=0}{\overset{x=x_0}{M}} x^i(1-x)^{n-i} < x_0^i(1-x_0)^{n-i},$$

то получимъ

$$\int_0^{x_0} x^i(1-x)^{n-i}dx < x_0.x_0^i(1-x_0)^{n-i}.$$

Когда на мѣсто x_0 внесемъ его величину $\frac{i}{N}$, то послѣднее неравенство приметъ видъ

$$\int_0^{x_0} x^i(1-x)^{n-i}dx < \left(\frac{i}{N}\right)^{i+1}.\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-i}.$$

Мы уже замѣтили выше, что интегралъ (H) есть количество порядка $\frac{1}{\sqrt[4]{N}}$. Что̀ же касается до интеграла

$$\int_0^{x_0} x^i(1-x)^{n-i}dx,$$

то, въ слѣдствіе предъидущаго неравенства, его величина будетъ количество порядка $\left(\frac{i}{N}\right)^{i+1}$, то есть $\frac{1}{N^{\frac{i+1}{2}}}$, или даже еще меньше; но какъ i изображаетъ число цѣлое, состоящее по крайней мѣрѣ изъ нѣсколькихъ единицъ, то значеніе разсматриваемаго интеграла въ сравненіи съ $\int_0^1 x^i(1-x)^{n-i}dx$ окажется совершенно нечуствительнымъ.

Поступая совершенно подобнымъ образомъ, удостовѣримся, что интегралъ

$$\int_X^1 x^i(1-x)^{n-i}dx,$$

по малости своей, также долженъ быть откинутъ. Дѣйствительно, давъ ему видъ

$$\int_X^1 x^i(1-x)^{n-i}dx = (1-X)\underset{X}{\overset{1}{M}} x^i(1-x)^{n-i} = \frac{n-i}{N}\underset{X}{\overset{1}{M}} x^i(1-x)^{n-i},$$

и замѣтивъ притомъ что

$$\underset{X}{\overset{1}{M}} x^i(1-x)^{n-i} < X^i(1-X)^{n-i} = \left(\frac{n-i}{N}\right)^{n-i}.\left(1-\frac{n-i}{N}\right)^i,$$

получимъ

$$\int_X^1 x^i(1-x)^{n-i}dx < \left(\frac{n-i}{N}\right)^{n-i+1}.\left(1-\frac{n-i}{N}\right)^i.$$

И такъ, величина этого интеграла будетъ количество порядка

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^{n-i+1} = \frac{1}{N^{\frac{n-i+1}{2}}},$$

которое, по своей малости, должно быть откинуто. Слѣдовательно, изъ числа трехъ интеграловъ, составляющихъ вторую часть уравненія (G), надлежитъ удержать только первый, опредѣляемый формулою (H). Внеся въ (E) величины (F) и (H), и раздѣливъ потомъ числитель и знаменатель полученной дроби на

$$N \cdot \frac{i^i(n-i)^{n-i}}{n^n} \cdot \frac{\sqrt{2i(n-i)}}{n\sqrt{n}},$$

найдемъ окончательно для вѣроятности p выраженіе

$$p = \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt + \frac{n^{n+1}\sqrt{n}}{2Ni^i(n-i)^{n-i}\sqrt{2\pi i(n-i)}}\left[x''^i(1-x'')^{n-i} + x'^i(1-x')^{n-i}\right]}{1 - \frac{13i(n-i)-n^2}{12i(n-i)n}} \qquad (I)$$

съ слѣдующими опредѣленіями:

$$k = \frac{Ni}{n}, \quad x' = \frac{k-\omega}{N}, \quad x'' = \frac{k+\omega}{N}, \quad T = \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2i(n-i)}} \cdot \frac{\omega}{N}. \qquad (J)$$

Такова величина вѣроятности p, вычисленная съ требуемою степенью точности.

Если искомое число будетъ ω, то есть уклоненіе дѣйствительной потери отъ вѣроятной $k = \frac{Ni}{n}$, при данномъ *наименьшемъ* значеніи вѣроятности p, тогда, для рѣшенія задачи, можно поступать слѣдующимъ образомъ: замѣтивъ, что $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt$ изображаетъ преобладающій по своей величинѣ членъ выраженія p въ формулѣ (I), мы найдемъ безъ труда при пособіи таблицъ, помѣщенныхъ въ концѣ книги, приближенное значеніе для T, соотвѣтствующее данной наименьшей величинѣ вѣроятности p; потомъ уже, на основаніи равенства

$$T = \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2i(n-i)}} \cdot \frac{\omega}{N},$$

опредѣлимъ непосредственно неизвѣстную ω въ функціи другихъ данныхъ количествъ.

Приведемъ теперь нѣкоторыя численныя приложенія формулы (I). Положимъ, напримѣръ, что 10-ти тысячный корпусъ долженъ участвовать въ дѣлѣ, и что изъ этого числа назначается 100 человѣкъ, то есть одинъ со ста. Допустимъ, что въ извѣстное время сраженія, изъ числа 100 слѣдимыхъ людей, выбыло изъ строя 20 человѣкъ. Получимъ слѣдующія данныя:

$$N = 10000, \quad n = 100, \quad i = 20, \quad n-i = 80, \quad k = \frac{Ni}{n} = 2000.$$

Условимся теперь въ величинѣ ω; пусть, напримѣръ, $\omega = 100$. Слѣдовательно, мы ищемъ вѣроятность p, что дѣйствительная потеря разнствуетъ отъ вѣроятной 2000 не болѣе какъ на сто человѣкъ, или, иначе, что она заключается между предѣлами 1900 и 2100. При такихъ данныхъ получимъ

$$T = \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0{,}1767\ldots.$$

Употребляя способъ, изложенный въ ОБЪЯСНЕНІИ ТАБЛИЦЪ, найдемъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty e^{-t^2}dt = 0{,}1973\ldots.$$

Съ другой стороны, такъ какъ

$$x'' = \frac{21}{100}, \quad x' = \frac{19}{100},$$

то второй членъ числителя дроби (I) можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$\frac{1}{800\sqrt{2\pi}}\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{20} \cdot \left(\frac{79}{80}\right)^{80} + \left(\frac{19}{20}\right)^{20} \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^{80}\right\} = A.$$

Но

$$\sqrt{2\pi} = 2{,}5066\ldots, \quad \frac{1}{800\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2005{,}28\ldots} = 0{,}00049\ldots$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{20} \cdot \left(\frac{79}{80}\right)^{80} = 0{,}9699\ldots, \quad \left(\frac{19}{20}\right)^{20} \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^{80} = 0{,}9684\ldots$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{20} \cdot \left(\frac{79}{80}\right)^{80} + \left(\frac{19}{20}\right)^{20} \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^{80} = 1{,}9384\ldots$$

И такъ

$$A = (0{,}00049\ldots) \times (1{,}9384\ldots) = 0{,}00095.$$

Опредѣлимъ теперь членъ, который вычитается изъ 1 въ знаменателѣ формулы (I). Получимъ

$$\frac{13i(n-i)-n^2}{12i(n-i)n} = \frac{108}{19200} = 0{,}0056\ldots.$$

Слѣдовательно

$$p = \frac{0{,}1973+0{,}0009}{1-0{,}0056} = 0{,}199\ldots$$

И такъ, искомая вѣроятность p, равная въ настоящемъ случаѣ дроби 0,199.... или около $\frac{1}{5}$, очевидно оказывается слишкомъ слабою, чтобы можно было съ нѣкоторымъ довѣріемъ основываться на ней. Это самое показываетъ, что принятая нами ипотеза на счётъ относительной величины чиселъ N, n и ω, по самой сущности вопроса, не можетъ вести къ предположенной цѣли. Чтобъ получить бóльшую вѣроятность, должно, или уве-

личить число n назначенныхъ людей, или допустить бо̀льшій промежутокъ 2ω для предѣловъ потери. Еще выгоднѣе увеличить въ одно время какъ n, такъ и ω.

Положимъ, напримѣръ, что при прежнемъ количествѣ войска, именно 10-ти тысячахъ, назначено 400 человѣкъ, то есть 4 со 100, а для ω взято число 200. Пусть изъ слѣдимаго числа 400 людей выбыло изъ строя 80 человѣкъ. Получимъ

$$N = 10000,\quad n = 400,\quad i = 80,\quad n-i = 320,\quad k = 2000,\quad \omega = 200,$$

и слѣдовательно

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\ldots,\qquad \int_0^T e^{-t^2}dt = 0{,}6050\ldots$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt = (1{,}1283\ldots)\times(0{,}6050\ldots) = 0{,}6826\ldots$$

Съ другой же стороны, такъ какъ

$$x'' = \frac{11}{80},\qquad x' = \frac{9}{80},$$

то придаточный членъ въ числителѣ формулы (I) будетъ

$$A = \frac{1}{400\sqrt{2\pi}}\left\{\left(\frac{11}{10}\right)^{80}\cdot\left(\frac{39}{40}\right)^{320}+\left(\frac{9}{10}\right)^{80}\cdot\left(\frac{41}{40}\right)^{320}\right\}.$$

Но какъ по приближенію имѣемъ

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{80}\cdot\left(\frac{39}{40}\right)^{320} = 0{,}6207,\qquad \left(\frac{9}{10}\right)^{80}\cdot\left(\frac{41}{40}\right)^{320} = 0{,}5902,$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{80}\cdot\left(\frac{39}{40}\right)^{320}+\left(\frac{9}{10}\right)^{80}\cdot\left(\frac{41}{40}\right)^{320} = 1{,}2109,\qquad \frac{1}{400\sqrt{2\pi}} = 0{,}0009,$$

то и найдется

$$A = (0{,}0009)\times(1{,}2109) = 0{,}0012.$$

Членъ, вычитаемый изъ 1 въ знаменателѣ формулы (I), будетъ

$$\frac{13i(n-i)-n^2}{12i(n-i)n} = \frac{1728}{1228800} = 0{,}0014.$$

Поэтому получимъ окончательно

$$p = \frac{0{,}6826+0{,}0012}{1-0{,}0014} = 0{,}684.$$

И такъ, вѣроятность, что по назначеніи 400 человѣкъ изъ 10-ти тысячъ, разность между дѣйствительною и вѣроятною потерею будетъ разниствовать не болѣе какъ на 200 человѣкъ по избытку или по недостатку, равняется слишкомъ $\frac{2}{3}$. Хотя эта вѣроятность и превышаетъ дробь $\frac{1}{2}$, но она еще слишкомъ слаба, чтобы можно было положиться на

надёжность допущенныхъ предѣловъ. Должно опять увеличить одно изъ чиселъ n или ω, а еще лучше, оба въ одно время, какъ уже было замѣчено выше.

Положимъ, что рѣшились изъ 100 человѣкъ назначить *пятерыхъ*, а для числа ω принять $2\frac{1}{2}$ процента. Тогда будетъ

$$N = 10000,\quad n = 500,\quad \omega = 250.$$

Сверхъ того, пусть $i = 100$, и слѣдовательно $n-i = 400$. Найдется

$$T = \frac{5\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} = 0{,}9882\ldots.$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt = 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty e^{-t^2}dt = 1-0{,}16235\ldots = 0{,}83765\ldots$$

Дополнительный членъ числителя въ формулѣ (I) равенъ

$$\frac{\sqrt{5}}{800\sqrt{2\pi}}\left\{\left(\frac{9}{8}\right)^{100}\cdot\left(\frac{31}{32}\right)^{400}+\left(\frac{7}{8}\right)^{100}\cdot\left(\frac{33}{32}\right)^{400}\right\} = 0{,}00081\ldots$$

Величина, вычитаемая изъ единицы въ знаменателѣ той же формулы, равна $0{,}00112\ldots$.

Слѣдовательно

$$p = \frac{0{,}83765+0{,}00081}{1-0{,}00112} = 0{,}839\ldots.$$

И такъ, мы дошли до вѣроятности почти равной $\frac{9}{10}$. Если бы еще нѣсколько увеличили отношенія $\frac{n}{N}$ и $\frac{\omega}{N}$, то достигли бы значенія, превышающаго дробь $\frac{9}{10}$, которая, безъ сомнѣнія, была бы достаточна на практикѣ.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о составленіи таблицы для непосредственнаго соображенія величины предѣловъ дѣйствительной потери убитыми и ранеными. Съ этою цѣлію, естественно принимать отношеніе $\frac{n}{N}$ постояннымъ, равнымъ, положимъ $\frac{5}{100}$ какъ въ послѣднемъ примѣрѣ, или даже нѣсколько превышающимъ эту дробь для бо̀льшей точности. Въ послѣднемъ предположеніи, предѣлъ интеграла

$$T = \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2i(n-i)}}\cdot\frac{\omega}{N}$$

будетъ вообще болѣе *единицы;* поэтому, при вычисленіи интеграла $\int_{x'}^{x''} x^i(1-x)^{n-i}dx$ по приближенію [N° 56], нельзя довольствоваться однимъ интеграломъ $\int_0^T e^{-t^2}dt$, а должно будетъ удержать членъ, заключающій въ себѣ $\int_0^T e^{-t^2}.t^4dt$, который мы откинули на томъ основаніи, что принимали T за величину порядка $\frac{1}{\sqrt[4]{N}}$. Могло бы даже случиться, что

по принятой величинѣ для $\frac{n}{\sqrt{N}}$, надлежало бы сохранить интегралъ $\int_0^T e^{-t^2}.t^6dt$ и дальнѣйшіе члены. Въ такомъ случаѣ числитель формулы (I) подвергнется нѣкоторому измѣненію. Наблюдая же что всѣ интегралы

$$\int_0^T e^{-t^2}.t^4dt, \quad \int_0^T e^{-t^2}.t^6dt, \ldots\ldots,$$

чрезъ интегрированіе по частямъ, выражаются посредствомъ уже найденнаго $\int_0^T e^{-t^2}dt$, измѣненіе, о которомъ говоримъ, не представитъ ни малѣйшаго затрудненія.

Возвратимся къ таблицѣ вѣроятныхъ потерь. Мы уже допустили, что отношеніе числа назначенныхъ людей къ полному числу участвующихъ въ дѣлѣ, неизмѣнно; примемъ также вѣроятность p почти постоянною, напримѣръ не меньшею дроби $\frac{9}{10}$ или всякой другой, въ величинѣ которой условились предварительно. На такомъ основаніи, таблица будетъ заключать въ себѣ два аргумента: полное число N сражающихся и число i убитыхъ или раненыхъ изъ n назначенныхъ людей. Искомое число будетъ ω, то есть уклоненіе въ ту и другую сторону вѣроятной потери $k = \frac{Ni}{n}$ отъ дѣйствительной. Таблицу удобно расположить на подобіе обыкновенной *Пиѳагоровой*. Верхній горизонтальный рядъ можетъ заключать, напримѣръ, различныя значенія для количества войска N, а первый вертикальный столбецъ, съ лѣвой стороны, различныя значенія для наблюденнаго числа i выбывшихъ изъ строя людей. Искомое число ω, или, еще лучше, предѣлы $k-\omega$ и $k+\omega$ дѣйствительной потери будутъ находиться на квадратѣ встрѣчи горизонтальнаго ряда съ вертикальнымъ столбцомъ.

Такъ какъ аргументъ i есть число наблюденное, то подъ нимъ можно разумѣть число убитыхъ, раненыхъ, плѣнныхъ и проч., полагая даже между ними какое угодно различіе. Напримѣръ, можно искать по таблицѣ, отдѣльно, предѣлы потери офицерами и солдатами, конными или пѣхотными и т. п. Она же послужитъ для опредѣленія числа убитыхъ холоднымъ или огнестрѣльнымъ оружіемъ. Даже, независимо отъ военнаго дѣла, эта самая таблица можетъ быть употребляема съ выгодою во многихъ случаяхъ, встрѣчающихся въ общественной жизни. Напримѣръ, если бы требовалось, при пріемкѣ весьма большаго числа какихъ либо вещей или припасовъ, опредѣлить съ достаточною вѣроятностію предѣлы количества, не имѣющаго надлежащей доброты, то, подвергая на-удачу испытанію болѣе или менѣе значительную часть этихъ припасовъ, можно бы было, посредствомъ

упоминаемой таблицы, составить себѣ довольно приблизительное понятіе о достоинствѣ полнаго количества, предполагая, что подробное его освидѣтельствованіе, по продолжительности своей, неисполнимо.

Можетъ быть люди, свѣдущіе въ военномъ дѣлѣ, найдутъ что изложенный здѣсь способъ неудобенъ на практикѣ въ самое время сраженія. Во всякомъ случаѣ мы полагаемъ, что таблица, о которой сей-часъ говорено, будетъ не безполезна въ томъ отношеніи, что послужитъ, немедленно послѣ сраженія, къ приблизительной оцѣнкѣ предѣловъ потерь, понесенныхъ арміею людьми, лошадьми и проч. Покамѣстъ различныя потери не будутъ опредѣлены еще точнымъ образомъ, эти приближенныя данныя, можетъ быть, покажутся не лишними для соображенія.

ТАБЛИЦЫ.

ТАБЛИЦА I^ая.

$$i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

t	i	t	i	t	i	t	i	t	i
0,00	0,0000000	0,31	0,3389081	0,62	0,6194114	0,93	0,8115635	1,24	0,9205052
0,01	0,0112833	0,32	0,3491259	0,63	0,6270463	0,94	0,8162710	1,25	0,9229001
0,02	0,0225644	0,33	0,3592785	0,64	0,6345857	0,95	0,8208908	1,26	0,9252359
0,03	0,0338410	0,34	0,3693644	0,65	0,6420292	0,96	0,8254236	1,27	0,9275136
0,04	0,0451109	0,35	0,3793819	0,66	0,6493765	0,97	0,8298703	1,28	0,9297342
0,05	0,0563718	0,36	0,3893296	0,67	0,6566275	0,98	0,8342315	1,29	0,9318987
0,06	0,0676215	0,37	0,3992059	0,68	0,6637820	0,99	0,8385081	1,30	0,9340080
0,07	0,0788577	0,38	0,4090093	0,69	0,6708399	1,00	0,8427008	1,31	0,9360632
0,08	0,0900781	0,39	0,4187385	0,70	0,6778010	1,01	0,8468105	1,32	0,9380652
0,09	0,1012806	0,40	0,4283922	0,71	0,6846654	1,02	0,8508380	1,33	0,9400150
0,10	0,1124630	0,41	0,4379690	0,72	0,6914330	1,03	0,8547842	1,34	0,9419137
0,11	0,1236230	0,42	0,4474676	0,73	0,6981038	1,04	0,8586499	1,35	0,9437622
0,12	0,1347584	0,43	0,4568867	0,74	0,7046780	1,05	0,8624360	1,36	0,9455614
0,13	0,1458671	0,44	0,4662251	0,75	0.7111556	1,06	0,8661435	1 37	0,9473124
0,14	0,1569470	0,45	0,4754818	0,76	0,7175367	1,07	0,8697732	1,38	0,9490160
0,15	0,1679959	0,46	0,4846555	0,77	0,7238216	1,08	0,8733261	1,39	0,9506733
0,16	0,1790117	0,47	0,4937452	0,78	0,7300104	1,09	0,8768030	1,40	0,9522851
0,17	0,1899923	0,48	0,5027498	0,79	0,7361035	1,10	0,8802050	1,41	0,9538524
0,18	0,2009357	0,49	0,5116683	0,80	0,7421010	1,11	0,8835330	1,42	0,9553762
0,19	0,2118398	0,50	0,5204999	0,81	0,7480033	1,12	0,8867879	1,43	0,9568573
0,20	0,2227025	0,51	0,5292437	0,82	0,7538108	1,13	0,8899707	1,44	0,9582966
0,21	0,2335218	0,52	0,5378987	0,83	0,7595238	1,14	0,8930823	1,45	0,9596950
0,22	0,2442958	0,53	0,5464641	0,84	0,7651427	1,15	0,8961238	1,46	0,9610535
0,23	0,2550225	0,54	0,5549392	0,85	0,7706680	1,16	0,8990962	1,47	0,9623729
0,24	0,2657000	0,55	0,5633233	0,86	0,7761002	1,17	0,9020004	1,48	0,9636541
0,25	0,2763263	0,56	0,5716157	0,87	0,7814398	1,18	0,9048374	1,49	0,9648979
0,26	0,2868997	0,57	0,5798158	0,88	0,7866873	1,19	0,9076083	1,50	0,9661052
0,27	0,2974182	0,58	0,5879229	0,89	0,7918432	1,20	0,9103140	1,51	0,9672768
0,28	0,3078800	0,59	0,5959365	0,90	0,7969082	1,21	0,9129555	1,52	0,9684135
0,29	0,3182834	0,60	0,6038561	0,91	0,8018828	1,22	0,9155339	1,53	0,9695162
0,30	0,3286267	0,61	0,6116812	0,92	0,8067677	1,23	0,9180501	1,54	0,9705857

$$i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

t	i	t	i	t	i	t	i	t	i
1,55	0,9716227	1,65	0,9803756	1,75	0,9866717	1,85	0,9911110	1,95	0,9941794
1,56	0,9726281	1,66	0,9811049	1,76	0,9871903	1,86	0,9914725	1,96	0,9944263
1,57	0,9736026	1,67	0,9818104	1,77	0,9876910	1,87	0,9918207	1,97	0,9946637
1,58	0,9745470	1,68	0,9824928	1,78	0,9881742	1,88	0,9921562	1,98	0,9948920
1,59	0,9754620	1,69	0,9831526	1,79	0,9886406	1,89	0,9924793	1,99	0,9951114
1,60	0,9763484	1,70	0,9837904	1,80	0,9890905	1,90	0,9927904	2,00	0,9953223
1,61	0,9772069	1,71	0,9844070	1,81	0,9895245	1,91	0,9930899		
1,62	0,9780381	1,72	0,9850028	1,82	0,9899431	1,92	0,9933782		
1,63	0,9788429	1,73	0,9855785	1,83	0,9903467	1,93	0,9936557		
1,64	0,9796218	1,74	0,9861346	1,84	0,9907359	1,94	0,9939226		

ТАБЛИЦА IIая.

$$I = \int_T^\infty e^{-t^2} dt, \qquad L = 10 + \mathrm{Log}.I.$$

T	I	L	T	I	L
0,00	0,88622692	9,9475448	0,31	0,58587739	9,7678068
0,01	0,87622724	9,9426168	0,32	0,57682206	9,7610419
0,02	0,86622957	9,9376330	0,33	0,56782450	9,7542141
0,03	0,85623590	9,9325935	0,34	0,55888613	9,7473234
0,04	0,84624822	9,9274978	0,35	0,55000833	9,7403692
0,05	0,83626853	9,9223458	0,36	0,54119246	9,7333518
0,06	0,82629882	9,9171371	0,37	0,53243983	9,7262706
0,07	0,81634106	9,9118717	0,38	0,52375173	9,7191254
0,08	0,80639724	9,9065490	0,39	0,51512941	9,7119163
0,09	0,79646932	9,9011691	0,40	0,50657408	9,7046430
0,10	0,78655925	9,8957315	0,41	0,49808692	9,6973051
0,11	0,77666897	9,8902359	0,42	0,48966907	9,6899027
0,12	0,76680043	9,8846823	0,43	0,48132163	9,6824353
0,13	0,75695555	9,8790704	0,44	0,47304567	9,6749031
0,14	0,74713623	9,8733998	0,45	0,46484222	9,6673056
0,15	0,73734436	9,8676704	0,46	0,45671226	9,6596427
0,16	0,72758182	9,8618819	0,47	0,44865676	9,6519143
0,17	0,71785047	9,8560340	0,48	0,44067662	9,6441200
0,18	0,70815215	9,8501266	0,49	0,43277272	9,6362598
0,19	0,69848869	9,8441594	0,50	0,42494591	9,6283336
0,20	0,68886189	9,8381322	0,51	0,41719697	9,6203412
0,21	0,67927350	9,8320446	0,52	0,40952667	9,6122822
0,22	0,66972530	9,8258968	0,53	0,40193572	9,6041566
0,23	0,66021902	9,8196880	0,54	0,39442481	9,5959642
0,24	0,65075637	9,8134185	0,55	0,38699458	9,5877049
0,25	0,64133903	9,8070877	0,56	0,37964564	9,5793784
0,26	0,63196866	9,8006956	0,57	0,37237854	9,5709846
0,27	0,62264689	9,7942418	0,58	0,36519382	9,5625235
0,28	0,61337532	9,7877263	0,59	0,35809196	9,5539946
0,29	0,60415552	9,7811488	0,60	0,35107341	9,5453979
0,30	0,59498904	9,7745090	0,61	0,34413857	9,5367334

$$I=\int_T^{\infty}e^{-t^2}dt,\qquad L=10+\text{Log}.I.$$

T	I	L	T	I	L
0,62	0,33728782	9,5280006	1,02	0,13219136	9,1212031
0,63	0,33052150	9,5191997	1,03	0,12869414	9,1095587
0,64	0,32383989	9,5103304	1,04	0,12526823	9,0978410
0,65	0,31724326	9,5013924	1,05	0,12191283	9,0860494
0,66	0,31073183	9,4923857	1,06	0,11862716	9,0741842
0,67	0,30430579	9,4833102	1,07	0,11541041	9,0622449
0,68	0,29796528	9,4741657	1,08	0,11226177	9,0502319
0,69	0,29171042	9,4649519	1,09	0,10918041	9,0381447
0,70	0,28554127	9,4556689	1,10	0,10616550	9,0259834
0,71	0,27945789	9,4463163	1,11	0,10321619	9,0137478
0,72	0,27346028	9,4368942	1,12	0,10033163	9,0014378
0,73	0,26754842	9,4274024	1,13	0,09751096	8,9890535
0,74	0,26172224	9,4178406	1,14	0,09475333	8,9765945
0,75	0,25598166	9,4082088	1,15	0,09205786	8,9640609
0,76	0,25032654	9,3985070	1,16	0,08942368	8,9514525
0,77	0,24475673	9,3887346	1,17	0,08684990	8,9387693
0,78	0,23927203	9,3788919	1,18	0,08433565	8,9260111
0,79	0,23387223	9,3689786	1,19	0,08188004	8,9131780
0,80	0,22855708	9,3589946	1,20	0,07948218	8,9002698
0,81	0,22332629	9,3489399	1,21	0,07714118	8,8872864
0,82	0,21817955	9,3388140	1,22	0,07485616	8,8742266
0,83	0,21311653	9,3286171	1,23	0,07262621	8,8610934
0,84	0,20813686	9,3183480	1,24	0,07045045	8,8478838
0,85	0,20324015	9,3080095	1,25	0,068327982	8,8345987
0,86	0,19842598	9,2975986	1,26	0,066257921	8,8212378
0,87	0,19369390	9,2871159	1,27	0,064239873	8,8078013
0,88	0,18904345	9,2765616	1,28	0,062271450	8,7942890
0,89	0,18447413	9,2659354	1,29	0,060353266	8,7807008
0,90	0,17998542	9,2552373	1,30	0,058483937	8,7670367
0,91	0,17557678	9,2444670	1,31	0,056662583	8,7532964
0,92	0,17124765	9,2336246	1,32	0,054888328	8,7394800
0,93	0,16699745	9,2227098	1,33	0,053160300	8,7255875
0,94	0,16282557	9,2117226	1,34	0,051477631	8,7116186
0,95	0,15873139	9,2006627	1,35	0,049839458	8,6975733
0,96	0,15471426	9,1895304	1,36	0,048244922	8,6834516
0,97	0,15077352	9,1783250	1,37	0,046693173	8,6692534
0,98	0,14690850	9,1670470	1,38	0,045183364	8 6549786
0,99	0,14311849	9,1556957	1,39	0,043714655	8,6406270
1,00	0,13940279	9,1442715	1,40	0,042286213	8,6261988
1,01	0,13576066	9,1327739	1,41	0,040897212	8,6116937

$$I=\int_T^{\infty}e^{-t^2}dt,\qquad L=10+\text{Log}.I.$$

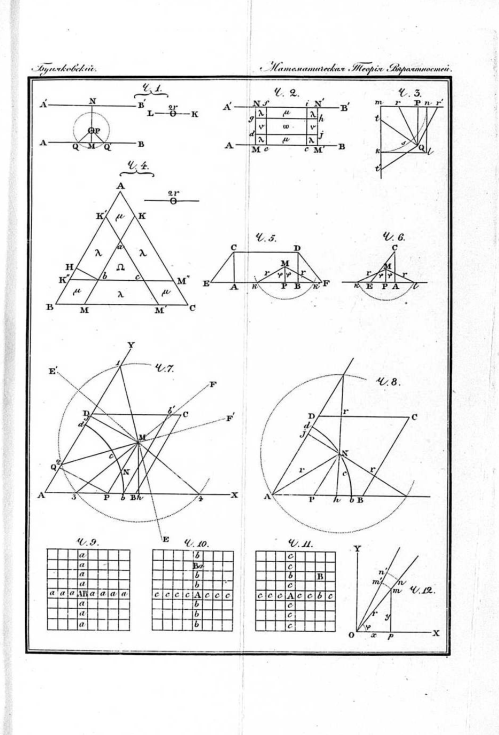
T	I	L	T	I	L
1,42	0,039546833	8,5971117	1,82	0,0089126452	7,9500066
1,43	0,038234264	8,5824527	1,83	0,0085549208	7,9322160
1,44	0,036958703	8,5677167	1,84	0,0082100522	7,9143460
1,45	0,035719353	8,5529036	1,85	0,0078776440	7,8963963
1,46	0,034515428	8,5380132	1,86	0,0075573099	7,8783673
1,47	0,033346149	8,5230457	1,87	0,0072486732	7,8602585
1,48	0,032210745	8,5080008	1,88	0,0069513660	7,8420702
1,49	0,031108456	8,4928785	1,89	0,0066650299	7,8238022
1,50	0,030038531	8,4776787	1,90	0,0063893151	7,8054543
1,51	0,0290002273	8,4624014	1,91	0,0061238808	7,7870268
1,52	0,0279928103	8,4470465	1,92	0,0058683946	7,7685194
1,53	0,0270155571	8,4316139	1,93	0,0056225331	7,7499320
1,54	0,0260677544	8,4161036	1,94	0,0053859808	7,7312649
1,55	0,0251486986	8,4005156	1,95	0,0051584307	7,7125177
1,56	0,0242576960	8,3848495	1,96	0,0049395841	7,6936904
1,57	0,0233940632	8,3691062	1,97	0,0047291503	7,6747831
1,58	0,0225571262	8,3532837	1,98	0,0045268462	7,6557957
1,59	0,0217462226	8,3373838	1,99	0,0043323966	7,6367282
1,60	0,0209606997	8,3214058	2,00	0,00414553469	7,6175806
1,61	0,0201999153	8,3053496	2,01	0,00396599899	7,5983526
1,62	0,0194632376	8,2892151	2,02	0,00379353735	7,5790443
1,63	0,0187500453	8,2730023	2,03	0,00362790419	7,5596558
1,64	0,0180597280	8,2567111	2,04	0,00346886093	7,5401869
1,65	0,0173916854	8,2403416	2,05	0,00331617596	7,5206376
1,66	0,0167453280	8,2238937	2,06	0,00316962441	7,5010078
1,67	0,0161200770	8,2073671	2,07	0,00302898799	7,4812976
1,68	0,0155153640	8,1907620	2,08	0,00289405492	7,4615068
1,69	0,0149306316	8,1740782	2,09	0,00276461988	7,4416354
1,70	0,0143653326	8,1573157	2,10	0,00264048358	7,4216835
1,71	0,0138189298	8,1404744	2,11	0,00252145295	7,4016509
1,72	0,0132908982	8,1235544	2,12	0,00240734083	7,3815376
1,73	0,0127807217	8,1065554	2,13	0,00229796580	7,3613435
1,74	0,0122878952	8,0894775	2,14	0,00219315226	7,3410688
1,75	0,0118119239	8,0723204	2,15	0,00209273004	7,3207132
1,76	0,0113523230	8,0550848	2,16	0,00199653434	7,3002768
1,77	0,0109086184	8,0377697	2,17	0,00190440576	7,2797595
1,78	0,0104803459	8,0203756	2,18	0,00181619000	7,2591613
1,79	0,0100670515	8,0029023	2,19	0,00173173772	7,2384822
1,80	0,0096682910	7,9853498	2,20	0,00165090455	7,2177221
1,81	0,0092836304	7,9677178	2,21	0,00157355090	7,1968808

$$I = \int_T^\infty e^{-t^2} dt, \qquad L = 10 + \text{Log.} I.$$

T	I	L	T	I	L
2,22	0,00149954175	7,1759586	2,62	0,00018716339	6,2722209
2,23	0,00142874667	7,1549552	2,63	0,00017698942	6,2479473
2,24	0,00136103962	7,1338709	2,64	0,00016733686	6,2235917
2,25	0,00129629888	7,1127052	2,65	0,00015818073	6,1991536
2,26	0,00123440684	7,0914583	2,66	0,00014949723	6,1746332
2,27	0,00117524997	7,0701303	2,67	0,00014126361	6,1500302
2,28	0,00111871873	7,0487209	2,68	0,00013345813	6,1253450
2,29	0,00106470738	7,0272303	2,69	0,00012606000	6,1005773
2,30	0,00101311393	7,0056583	2,70	0,00011904937	6,0757272
2,31	0,00096383998	6,9840049	2,71	0,00011240727	6,0507944
2,32	0,00091679067	6,9622702	2,72	0,00010611558	6,0257791
2,33	0,00087187454	6,9404540	2,73	0,00010015701	6,0006813
2,34	0,00082900344	6,9185563	2,74	0,00009451505	5,9755009
2,35	0,00078809246	6,8965772	2,75	0,00008917395	5,9502381
2.36	0,00074905978	6,8745165	2,76	0,00008411867	5,9248924
2,37	0,00071182661	6,8523743	2,77	0,00007933487	5,8994642
2,38	0,00067631708	6,8301505	2,78	0,00007480888	5,8739532
2,39	0,00064245819	6,8078448	2,79	0,00007052767	5,8483595
2,40	0,00061017965	6,7854578	2,80	0,00006647880	5,8226832
2,41	0,00057941385	6,7629889	2,81	0,00006265043	5,7969241
2,42	0,00055009578	6,7404384	2,82	0,00005903128	5,7710822
2,43	0,00052216288	6,7178061	2,83	0,00005561060	5,7451576
2,44	0,00049555503	6,6950919	2,84	0,00005237815	5,7191510
2,45	0,00047021445	6,6722960	2,85	0,00004932418	5,6930599
2,46	0,00044608562	6,6494183	2,86	0,00004643942	5,6668869
2,47	0,00042311518	6,6264587	2,87	0,00004371503	5,6406308
2,48	0,00040125189	6,6034171	2,88	0,00004114262	5,6142920
2,49	0,00038044655	6,5802937	2,89	0,00003871419	5,5878701
2,50	0,00036065192	6,5570882	2,90	0,00003642214	5,5613655
2,51	0,00034182267	6,5338008	2,91	0,00003425925	5,5347778
2,52	0,00032391530	6,5104316	2,92	0,00003221864	5,5081072
2,53	0,00030688808	6,4869801	2,93	0,00003029379	5,4813537
2,54	0,00029070099	6,4634465	2,94	0,00002847849	5,4545170
2,55	0,00027531565	6,4398310	2,95	0,00002676685	5,4275973
2,56	0,00026069528	6,4161332	2,96	0,00002515327	5,4005945
2,57	0,00024680462	6,3923533	2,97	0,00002363244	5,3735086
2.58	0,00023360989	6,3684912	2,98	0,00002219932	5,3463397
2,59	0,00022107873	6,3445470	2,99	0,00002084912	5,3190877
2,60	0,00020918015	6,3205205	3,00	0,00001957729	5,2917525
2,61	0,00019788447	6,2964117			

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Страница:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
2	15 *сверху*	Невѣденіе	Невѣдѣніе.
19	10 *снизу*	$m \cdot \frac{a^{m1-b}}{(a+b)^m}$	$m \cdot \frac{a^{m-1}b}{(a+b)^m}$.
30	1 *сверху*	$\frac{U}{V} = \frac{m-\mu+1}{\mu} \cdot \frac{a}{b} = \frac{m+1}{\mu} \cdot \frac{a}{b} - \frac{a}{b}$	$\frac{U}{V} = \frac{m-\mu+1}{\mu} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m+1}{\mu} \cdot \frac{b}{a} - \frac{b}{a}$.
43	1 *сверху*	$e^{\frac{m^2}{2xx'}} . m^{2\iota}$	$e^{\frac{m^2}{2xx'}} \cdot m^{2\iota}$.
62	14 *снизу*	Говорѣ	Говоря.
158	12 *сверху*	$\int_0^1 x^{m-2}(1 \quad x)^n dx$	$\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^n dx$.
219	12 *снизу*	$\frac{k^{m-m}-1}{(k-1)k^{m'-m+1}}$	$\frac{k^{m'-m}-1}{(k-1)k^{m'-m+1}}$.


Буняковскій.
Математическая Теорія Вѣроятностей.
Ч. 1.
Ч. 2.
Ч. 3.
Ч. 4.
Ч. 5.
Ч. 6.
Ч. 7.
Ч. 8.
Ч. 9.
Ч. 10.
Ч. 11.
Ч. 12.